



2. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie I

Abgabe bis 28.04.2014, 11.45 Uhr

In der dritten und vierten Aufgabe wollen wir die Arithmetik der ganzen Gaußschen Zahlen benutzen, um primitive Pythagoräische Tripel zu parametrisieren und einen (relativ) kurzen Beweis für Fermats Zwei-Quadrate-Satz zu geben.

Aufgabe 1

Sei $K = \mathbb{Q}(\varrho)$ und $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\varrho]$ mit $\varrho = \sqrt{-5}$.

Zeigen Sie, dass $6 = 2 \cdot 3 = (1 + \varrho) \cdot (1 - \varrho)$ zwei Zerlegungen von 6 in paarweise nicht assoziierte, irreduzible Elemente sind.

Betrachten Sie nun die Ideale

$$I_1 = (3, 1 + \varrho)$$

$$I_2 = (3, 1 - \varrho)$$

$$I_3 = (2, 1 + \varrho)$$

$$I_4 = (2, 1 - \varrho)$$

in $\mathfrak{o}_K$. Berechnen Sie die Produkte $I_j \cdot I_l$ für $j, l \in \{1, \dots, 4\}$, $j \neq l$ und $I = I_1 \cdots I_4$ mit möglichst einfachen Erzeugern. Bestimmen Sie ein Vetretersystem von $\mathfrak{o}_K/I_j$ und vergleichen Sie den Index von I_j in $\mathfrak{o}_K$ mit dem von I in $\mathfrak{o}_K$ (4 Punkte)

Aufgabe 2

Seien $K_j = \mathbb{Q}(\sqrt{p_j})$ mit $p_1 = 2, p_2 = 3$. Desweiteren sei $\alpha_1 = 1 + \sqrt{2} \in K_1$ und $\alpha_2 = 2 + \sqrt{3} \in K_2$. Zeigen Sie, dass

(a) $\alpha_j \in \mathfrak{o}_{K_j}$, $j = 1, 2$,

(b) $\alpha_j \in \mathfrak{o}_{K_j}^\times$, $j = 1, 2$ und

(c) $\mathfrak{o}_{K_j}$ für $j = 1, 2$ unendlich viele Einheiten enthalten,

(d) die Gleichung $x^2 - 2y^2 = 1$ unendlich viele Lösungen in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ besitzt. Gilt das gleiche für die Gleichung $x^2 - 3y^2 = 1$?

(2+1+2+1 Punkte)

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie, dass $\mathfrak{o}_i = \mathbb{Z}[i]$ versehen mit der Einschränkung der Normabbildung $N|_{\mathfrak{o}_i}$

$$N : \mathbb{Q}(i) \rightarrow \mathbb{Q} \quad , \quad N(x + iy) = x^2 + y^2$$

ein euklidischer Ring ist.

- (b) Seien $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{o}_i$ und α, β teilerfremd mit $\alpha\beta = \varepsilon\gamma^n$ für eine Einheit ε und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass es Einheiten $\varepsilon', \varepsilon'' \in \mathfrak{o}_i^\times$ gibt und $\xi, \eta \in \mathfrak{o}_i$, so dass $\alpha = \varepsilon'\xi^n$ und $\beta = \varepsilon''\eta^n$.
- (c) Wir setzen

$$\mathcal{P} := \{(x, y, z) \in \mathbb{N}^3 \mid x^2 + y^2 = z^2, x, y, z > 0, \text{ggT}(x, y, z) = 1\}.$$

Dann sind die Elemente von $\mathcal{P}$ genau von der Form

$$x = u^2 - v^2, y = 2uv, z = u^2 + v^2$$

wobei

$$u, v \in \mathbb{Z}, u > v > 0, \text{ggT}(u, v) = 1, uv \in 2\mathbb{Z}$$

und diejenigen, die man in obiger Darstellung durch Vertauschen von x und y erhält.

(2+1+4 Punkte)

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe wollen wir Fermat's Zwei-Quadrate-Satz mit Hilfe der Arithmetik in $\mathfrak{o}_i$ beweisen.

- (a) Eine natürliche Zahl n ist genau dann eine Primzahl, wenn $(n-1)! \equiv -1 \pmod{p}$ gilt.
- (b) Es sei $p = 1 + 4r, r \in \mathbb{N}$ eine Primzahl. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Gleichung

$$-1 \equiv x^2 \pmod{p}$$

eine Lösung in $\mathbb{Z}$ besitzt, nämlich $x = (2r)! \in \mathbb{N}$. Folgern Sie daraus, dass p kein Prim-element in $\mathfrak{o}_i$ ist.

- (c) Zeigen Sie für alle Primzahlen $p \neq 2$ die Äquivalenz:

$$p = a^2 + b^2, a, b \in \mathbb{Z} \iff p \equiv 1 \pmod{4}$$

Eine natürliche Zahl n heißt *darstellbar*, falls es natürliche Zahlen $a, b \in \mathbb{N}_0$ gibt, so dass $n = a^2 + b^2$.

- (d) Sind $m, n \in \mathbb{N}$ darstellbar, so auch ihr Produkt mn .
- (e) Sei $p = 3 + 4r, r \in \mathbb{N}$ eine Primzahl und $n \in \mathbb{N}$ darstellbar. Zeigen Sie, dass aus $p|n$ stets $p^2|n$ folgt und n/p^2 ebenfalls darstellbar ist.
- (f) Eine natürliche Zahl ist genau dann darstellbar, wenn in ihrer Primfaktorzerlegung alle Primzahlen der Form $4r + 3$ mit geradem Exponenten auftreten.

(3+2+2+1+2+2 Punkte)

Bitte geben Sie Ihre schriftliche Ausarbeitung bis spätestens Montag, den 28.04.2014 um 11.45 Uhr, im Übungskasten vor Raum 155 HG ab.