



---

### 3. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie I

Abgabe bis 12.05.2014, 12.00 Uhr

---

#### Aufgabe 1

Es sei  $K$  ein quadratischer Zahlkörper mit Diskriminante  $d_K$ . Zeigen Sie, dass

$$A := \{a \in \mathfrak{o}_K : N(a) = 0 \pmod{d_K}\}$$

ein Ideal in  $\mathfrak{o}_K$  ist, dessen Index als  $\mathbb{Z}$ -Modul gerade  $|d_K|$  ist.

(5 Punkte)

#### Aufgabe 2

(a) Sei  $K$  ein Zahlkörper mit einer in  $\mathfrak{o}_K$  gelegenen Basis  $B := (\omega_1, \dots, \omega_n)$  über  $\mathbb{Q}$ . Zeigen Sie, dass wenn  $d(\omega_1, \dots, \omega_n)$  quadratfrei ist,  $B$  eine Ganzheitsbasis, d.h. eine  $\mathbb{Z}$ -Basis des  $\mathbb{Z}$ -Moduls  $\mathfrak{o}_K$  ist.

(b) Sei nun  $K = \mathbb{Q}[x]/(x^3 - x - 4)$  der Wurzelkörper von  $p(x) = x^3 - x - 4$  mit Nullstelle  $\theta$ . Zeigen Sie, dass  $(1, \theta, \frac{1}{2}(\theta + \theta^2))$  eine Ganzheitsbasis ist. Berechnen Sie die Diskriminante dieser Basis.

(3+4 Punkte)

#### Aufgabe 3

Sei  $d \in \mathbb{Z}$  quadratfrei und sei  $p \in \mathbb{P}$  eine Primzahl mit  $p \nmid 2d$  und sei weiter  $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ . Zeigen Sie, dass  $(p)_{\mathfrak{o}_K}$  genau dann ein Primideal ist, wenn  $x^2 \equiv d \pmod{p}$  keine Lösung besitzt.

(4 Punkte)

#### Aufgabe 4

Es sei  $p > 2$  eine Primzahl. Wir setzen  $K := \mathbb{F}_p(t)$ . Es sei  $d \in \mathbb{F}_p[t]$ ,  $\deg d > 0$  quadratfrei und  $L := K[x]/(x^2 - d) =: K[\sqrt{d}]$ . Bestimmen Sie eine Basis von  $L|K$ . Es sei  $a \in L$ . Bestimmen Sie bezüglich der von Ihnen angegebenen Basis eine Matrix des  $K$ -Endomorphismus

$$q_a : L \rightarrow L, x \mapsto a \cdot x.$$

Analog zum Fall von Zahlkörpern definieren wir Spur und Norm durch  $S(a) := S(q_a)$  und  $N(a) := N(q_a)$ . Ein Element  $a \in L$  heißt ganz über  $K$ , falls sein Minimalpolynom in  $\mathbb{F}_p[t][x]$  liegt. Beschreiben Sie die Menge der ganzen Zahlen und geben Sie eine Ganzheitsbasis an.

(4 Punkte)

Bitte geben Sie Ihre schriftliche Ausarbeitung bis spätestens Montag, den 12.05.2014 um 12.00 Uhr, im Übungskasten vor Raum 155 HG ab.