



5. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie I

Abgabe bis 02.06.2014, 12.00 Uhr

Beachten Sie die um eine Woche verkürzte Abgabefrist für dieses Blatt!

Aufgabe 1

Es sei wieder $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ mit $\varrho := \sqrt{-5}$. Berechnen Sie die Primidealzerlegung in \mathfrak{o}_K von $(17 - \varrho, 7 - 14\varrho)$. (4 Punkte)

Aufgabe 2

Sei K ein algebraischer Zahlkörper und seien zwei ganze Ideale \mathfrak{a} und \mathfrak{b} von \mathfrak{o}_K gegeben. Zeigen Sie, dass aus $(N(\mathfrak{a}), N(\mathfrak{b})) = 1$ folgt, dass auch $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} = (1)_{\mathfrak{o}_K}$ gilt.

Wenden Sie dies auf die ganzen Ideale $(1 - \sqrt{-11})$ und $(\frac{21}{2} + \frac{7}{2}\sqrt{-11})$ zum Zahlkörper $\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$ an. (4 Punkte)

Aufgabe 3

- (a) Sei K ein algebraischer Zahlkörper und \mathfrak{o}_K sein Ganzheitsring. Sei weiter ein ganzes Ideal \mathfrak{a} in \mathfrak{o}_K gegeben. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{a}$ ein Hauptidealring ist.
- (b) Berechnen Sie für das Beispiel $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ und das Ideal $(9)_{\mathfrak{o}_K}$ Erzeuger für die maximalen Ideale in $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{a}$.
- (c) Geben Sie mit Hilfe von (a) einen neuen Beweis dafür an, dass alle Ideale im Ring der ganzen Zahlen eines algebraischen Zahlkörpers von zwei Elementen erzeugt werden.

(4+3+2 Punkte)

Bitte geben Sie Ihre schriftliche Ausarbeitung bis spätestens Montag, den 02.06.2014 um 12.00 Uhr, im Übungskasten vor Raum 155 HG ab.