LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. A. Krieg
M. Woitalla

Aachen, den 2. Juni 2014

6. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie I

Abgabe bis 23.06.2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 1

Seien $L|K|\mathbb{Q}$ algebraische Zahlkörper. Wir definieren für ein über (p) liegendes Primideal $\mathfrak{p}$ in $\mathfrak{o}_K$ den Trägheitsgrad durch $[\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p} : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] = t_K$.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes Primideal $\mathfrak{p}_L \trianglelefteq \mathfrak{o}_L$ und $\mathfrak{p}_K := \mathfrak{p}_L \cap \mathfrak{o}_K$ mit Trägheitsindizes t_L bzw. t_K und Verzweigungsindizes e_L bzw. e_K gilt, dass $t_K|t_L$ und $e_K|e_L$. Zeigen Sie weiter, dass man $\mathfrak{o}_L/\mathfrak{p}_L$ als endlich-dimensionalen $\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}_K$ Vektorraum auffassen kann und t_K, t_L mit dem Begriff der Restklassengrade in II(2.7) übereinstimmen.

(b) Nehmen Sie an, dass $K|\mathbb{Q}$ galoisch ist. Seien $\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r$ die für eine Primzahl p über (p) gelegenen Primidideale. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ auf diesen Idealen transitiv operiert.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2

Sei K ein algebraischer Zahlkörper, der galoisch über $\mathbb{Q}$ ist. Sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und $\mathfrak{p}$ ein über (p) gelegenes Primideal.

(a) Zeigen Sie, dass sich die fundamentale Gleichung aus Satz II(2.8) zu $efg = [K : \mathbb{Q}]$ mit $e_i = e$ und $f_i = f$ vereinfacht.

(b) Betrachten Sie die Gruppe

$$G_{\mathfrak{p}} := \{\sigma \in \mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K) \,|\, \sigma\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}$$

und nehmen Sie an, dass sie Normalteiler in $\mathrm{Aut}_{\mathbb{Q}}(K)$ ist. Es sei $Z_{\mathfrak{p}} \leqslant K$ der Fixkörper dieser Gruppe, also

$$Z_{\mathfrak{p}} := \{a \in K \,|\, \sigma a = a \text{ für alle } \sigma \in G_{\mathfrak{p}}\}\,.$$

Zeigen Sie, dass (p) voll zerlegt in $Z_{\mathfrak{p}}$ ist, das heißt

$$(p) = \mathfrak{p}_1 \cdots \mathfrak{p}_r \quad \text{mit } \mathfrak{p}_i \in \mathbb{P}_K \text{ und } f_i = 1 \text{ für alle } i\,.$$

(2+4 Punkte)

Aufgabe 3

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper. Es gebe ein $\alpha \in K$, so dass $\mathfrak{o}_K = \mathbb{Z}[\alpha]$. Es sei $p \in \mathbb{Z}$ eine Primzahl und

$$\overline{\mu_\alpha}(X) = \overline{p}_1(X)^{e_1} \cdots \overline{p}_r(X)^{e_r} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$$

sei die Zerlegung des Minimalpolynoms von α modulo p. Setze $\mathfrak{p}_j := (p)_{\mathfrak{o}_K} + (p_j(\alpha))_{\mathfrak{o}_K}$. Dann gilt

$$(p)_{\mathfrak{o}_K} = \mathfrak{p}_1^{e_1} \cdots \mathfrak{p}_r^{e_r}$$

mit Trägheitsindizes $f_i = [\mathfrak{o}_K/\mathfrak{p}_i : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}] = \deg(p_i)$. (4 Punkte)

Aufgabe 4

In dieser Aufgabe seien $p, l \in \mathbb{P}$ Primzahlen, ζ_p eine primitive p-te Einheitswurzel und $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$. Wir nennen l verzweigt über $\mathfrak{o}_K$, falls es ein $\mathfrak{q} \in \mathbb{P}_K$ gibt mit $\mathfrak{q}^2 | (l)_{\mathfrak{o}_K}$.

(a) Es bezeichne $\overline{\mathbb{F}_l}$ den algebraischen Abschluss des endlichen Körpers $\mathbb{F}_l$. Zeigen Sie, dass $X^p - 1 \in \mathbb{F}_l[X]$ genau dann eine mehrfache Nullstelle in $\overline{\mathbb{F}_l}$ hat, wenn $p = l$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass p die einzige über $\mathfrak{o}_K$ verzweigte Primzahl ist.

(c) Es sei nun $p = 7$. Bestimmen Sie die Primidealzerlegung von $(l)_{\mathfrak{o}_K}$ für $l = 2, 3, 5, 7, 11, 13, 29$ sowie die Trägheits- und Verzweigungsgrade und Erzeuger der auftretenden Primideale.

Hinweis: Zum Faktorisieren von Polynomen über endlichen Körpern empfiehlt es sich ein Computeralgebrasystem zu verwenden. Die Faktorisierungsroutinen für Ideale über Dedekindringen dürfen nicht benutzt werden. (1+2+7 Punkte)

Bitte geben Sie Ihre schriftliche Ausarbeitung bis spätestens Montag, den 23.06.2014 um 12.00 Uhr, im Übungskasten vor Raum 155 HG ab.