LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. A. Krieg
M. Woitalla

Aachen, den 20. Juni 2014

7. Übung zur Algebraischen Zahlentheorie I

Abgabe bis 14.07.2014, 12.00 Uhr

Aufgabe 1

Es sei K ein algebraischer Zahlkörper.

(a) Es sei $\mathfrak{a}$ ein ganzes Ideal von K und $m \in \mathbb{N}$ sei so gewählt, dass $\mathfrak{a}^m = (a)_{\mathfrak{o}_K}$ für ein $a \in \mathfrak{o}_K$. Zeigen Sie, dass $\mathfrak{a}\mathfrak{o}_L$ ein Hauptideal ist, wobei $L = K(\sqrt[m]{a})$.

(b) Zeigen Sie, dass es zu jedem Zahlkörper K eine endliche Erweiterung L gibt, in der jedes Ideal von K ein Hauptideal wird.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie den Isomorphietyp von $\mathcal{C}_K$ sowie Vertreter aller Idealklassen für $K \in \{\mathbb{Q}(\sqrt{5}), \mathbb{Q}(\sqrt{-11}), \mathbb{Q}(\sqrt{15})\}$. (6 Punkte)

Aufgabe 3

Sei p eine Primzahl mit $p \equiv 1 \bmod 4$ und $c \in \mathbb{Z}$ mit $c^2 \equiv -1 \bmod p$.

(a) Zeigen Sie, dass

$$\Gamma := \left\{(x, y) \in \mathbb{Z}^2; y \equiv cx \bmod p\right\}$$

ein Gitter im $\mathbb{R}^2$ ist im Sinne von Definition III(1.1). Bestimmen Sie weiter $\mathrm{vol}(\Gamma)$.

(b) Betrachten Sie die Menge

$$X := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leqslant \frac{4p}{\pi}\right\}$$

und zeigen Sie durch Anwendung des Minkowskischen Gitterpunktsatzes, dass p als Summe von zwei Quadraten darstellbar ist (vergleiche Blatt 2).

(3+3 Punkte)

Aufgabe 4

Bestimmen Sie eine Grundeinheit von $\mathbb{Q}(\sqrt{14})$ und $\mathbb{Q}(\sqrt{33})$ (4 Punkte)

Bitte geben Sie Ihre schriftliche Ausarbeitung bis spätestens Montag, den 14.07.2014 um 12.00 Uhr, im Übungskasten vor Raum 155 HG ab.