LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. A. Krieg
M. Woitalla

Aachen, den 3. April 2014

Übungen zur Algebraischen Zahlentheorie II

Reading Course im Sommersemester 2014

Die Notation auf diesem Übungsblatt orientiert sich am Skript „Algebraische Zahlentheorie Teil 2“ von Professor Krieg. Sie sollten sich beim Zitieren von Ergebnissen zu den behandelten Themen möglichst auf sein Skript beziehen. Um die Zulassung für die Prüfung zu erwerben, müssen Sie am Ende des Semesters Ihre bearbeiteten Lösungen beim Assistenten abgeben. Sie dürfen auch zu zweit abgeben. Den Abgabezeitraum haben wir auf die Woche vom 07.07. bis 11.07.2014 festgelegt. Ihre korrigierten Lösungen können am Freitag, den 18.07.2014, beim Assistenten abgeholt werden. Die Zulassung zur mündlichen Prüfung erhält, wer mindestens ein Drittel der maximalen Punktzahl – das sind 24 Punkte – erreicht hat.

Quadratische Kongruenzen und Dirichletsche Charaktere

Aufgabe 1

(a) Zeigen Sie für eine ungerade Primzahl p, dass die Summe $\sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right)$ veschwindet.

(b) Zeigen Sie für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p \equiv 1 \pmod 4$ die Identität $\sum_{k=1}^{p-1} k \left(\frac{k}{p}\right) = 0$.

(c) Zeigen Sie für alle $p \in \mathbb{P}$ mit $p \geqslant 5$, dass $\sum_{k=1}^{p-1} \frac{(p-1)!}{k} \equiv 0 \pmod{p^2}$.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2

(a) Bestimmen Sie alle Lösungen der folgenden Kongruenzen

(i) $3x^2 + 12x + 1 \equiv 0 \pmod{10}$,

(ii) $x^2 \equiv 5 \pmod{19}$,

(iii) $x^2 \equiv 5 \pmod{29}$.

(b) Berechnen Sie das Legendre-Symbol $\left(\frac{219}{383}\right)$.

(c) Ist 5 ein quadratischer Rest modulo 119?

(d) Beschreiben Sie alle Primzahlen $p > 2$, für die -3 ein quadratischer Rest modulo p ist durch Kongruenzbedingungen.

(3+1+1+2 Punkte)

Aufgabe 3

(a) Es sei $\chi = \chi_1 \cdots \chi_r$ wobei jedes χ_i ein Dirichletscher Charakterer $\bmod n_i$ ist. Weiter seien $n_1, \ldots, n_r$ paarweise teilerfremd. Zeigen Sie, dass der Führer von χ gleich dem Produkt der Führer der χ_i, $i = 1, \ldots, r$, ist.

(b) Es sei $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine Funktion mit der Eigenschaft $f(mn) = f(m)f(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ und f sei periodisch $\bmod N$, wobei N mimimal gewählt sei. Zeigen Sie, dass dann $f \equiv 0$ oder f ein Dirichletscher Charakter $\bmod N$ ist.

(4+6 Punkte)

Kettenbrüche

Aufgabe 4

(a) Bestimmen Sie einen algebraischen Ausdruck für den unendlichen Kettenbruch $< 5, 5, 5, \ldots >$.

(b) Untersuchen Sie für zwei möglicherweise unendliche Kettenbrüche $a =< a_0, a_1, \ldots >$ und $b =< b_0, b_1, \ldots >$, wann $a < b$ ist.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 5

(a) Seien $b_i \in \mathbb{R}$, $i \geqslant 0$, $b_i > 0$ für $i \geqslant 1$. Wir definieren analog zur Vorlesung die rekursiven Folgen $(A_n)_{n \geqslant -1}$, $(B_n)_{n \geqslant -1}$ durch

$$\begin{array}{llll} A_{-1} := 1 & , A_0 := b_0 & , A_{n+1} := b_{n+1}A_n + A_{n-1} & , n \geqslant 0 \quad , \\ B_{-1} := 0 & , B_0 := 1 & , B_{n+1} := b_{n+1}B_n + B_{n-1} & , n \geqslant .0 \end{array}$$

Zeigen Sie, dass es Dreiecksmatrizen $M_j \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ gibt, so dass

$$M_0 \cdots M_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} A_n & A_{n-1} \\ B_n & B_{n-1} \end{pmatrix} & \text{falls } n \equiv 1 \pmod 2 \\ \\ \begin{pmatrix} A_{n-1} & A_n \\ B_{n-1} & B_n \end{pmatrix} & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 2\,. \end{cases}$$

(b) Es seien zwei endliche Kettenbrüche $a =< a_0, \ldots, a_n >$ und $b =< b_0, \ldots, b_m >$ gegeben. Geben Sie mit Hilfe der rekursiven Folgen $(A_n)_n$ und $(B_n)_n$ einen Ausdruck für den zusammengesetzten Kettenbruch $a.b :=< a_0, \ldots, a_n, b_0, \ldots, b_m >$ an.

(3+3 Punkte)

Die p-adischen Zahlen

Aufgabe 6

Zeigen Sie:

(a) $\mathbb{Z}$ liegt dicht in $\mathbb{Z}_p$.

(b) Die Menge $1 + p\mathbb{Z}_p$ ist eine Untergruppe der Einheitengruppe $\mathcal{E}_p$ des Ringes der ganzen p-adischen Zahlen.

(c) $\mathcal{E}_p = \mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p$ und jedes $a \in \mathbb{Z}_p$, $a \neq 0$, besitzt eine eindeutige Darstellung der Form $a = \varepsilon p^{\nu_p(a)}$, $\varepsilon \in \mathcal{E}_p$.

(d) $\mathbb{Z}_p$ ist ein Haupidealring. Bestimmen Sie alle Ideale und irreduziblen Elemente.

(2+2+2+3 Punkte)

Aufgabe 7

Gegeben seien r verschiedene Primzahlen p_j, $1 \leqslant j \leqslant r$ sowie Zahlen $x_\infty \in \mathbb{Q}_\infty = \mathbb{R}$ und $x_j \in \mathbb{Q}_{p_j}$, $1 \leqslant j \leqslant r$. Zeigen Sie:
Zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert ein $x \in \mathbb{Q}$ mit

$$|x - x_\infty| \leqslant \varepsilon \quad \text{und} \quad |x - x_j| \leqslant \varepsilon \,, 1 \leqslant j \leqslant r \,.$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass es genügt, die Aussage für $x_j \in \mathbb{Z}_{p_j}$ zu beweisen und verwenden Sie dann den Chinesischen Restsatz. (6 Punkte)

Aufgabe 8

Es sei $p \in \mathbb{P}$ eine Primzahl. Zeigen Sie:

(a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} n!$ konvergiert in $\mathbb{Q}_p$, nicht jedoch $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

(b) Es gilt $-1 = \sum_{n=0}^{\infty} (p-1)p^n$ in $\in \mathbb{Q}_p$.

(c) Sei $x \in \mathbb{Q}_p$ mit $x^2 = -1$. Zeigen Sie, dass dann $p \equiv 1 \pmod 4$ gilt.

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 9

Zeigen Sie, dass wenn man $\mathbb{H}$ als Teilalgebra von $\mathrm{M}(2,\mathbb{C})$ auffasst, gilt , dass

$$\{F_z\,;\, z \in \mathbb{H},\, , z^2 = -1\} = \mathrm{SU}_2(\mathbb{C}) \cap \mathrm{SH}(2,\mathbb{C})\,,$$

wobei $\mathrm{SH}(2,\mathbb{C}) = \{M \in \mathrm{M}(2,\mathbb{C}) \;:\; \overline{M}^{\mathrm{tr}} = -M\}$ die schiefhermiteschen 2×2-Matrizen über $\mathbb{C}$ bezeichne. (3 Punkte)

Aufgabe 10

Zeigen Sie, dass $a, b \in \mathbb{H}$ genau dann in $\mathbb{H}$ konjugiert sind, wenn $\mathrm{Re}(a) = \mathrm{Re}(b)$ und $|a| = |b|$ ist. (4 Punkte)

Aufgabe 11

Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{H}$ und $a, b \in S^3$:

(a) Die durch $x \mapsto axb$ bzw. $x \mapsto a\overline{x}b$ gegebenen Abbildungen sind othogonal und für die Spiegelung $s_a : x \mapsto x - 2 < a, x > a$ gilt $s_a(x) = -a\overline{x}a$.

(b) Es gilt $s_a \circ s_b = p_a \circ p_{\overline{b}}$, wobei $p_c : \mathbb{H} \to \mathbb{H}\,,\; x \mapsto cxc$ für $c \in S^3$.

(c) Die Gruppe $\mathrm{O}(\mathbb{H})$ wird von den Abbildungen p_a und der Konjugationsabbildung $x \mapsto \overline{x}$ erzeugt und jede orthogonale Abbildung $f \in \mathrm{SO}(\mathbb{H})$ ist ein Produkt aus höchstens vier Abbildungen p_a, $a \in S^3$.

(2+1+5 Punkte)