LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. A. Krieg
A. Freh

Aachen, den 10. April 2014

Übung zum Reading Course Siegelsche Modulformen

Abgabe bis zur letzten Vorlesungswoche

Aufgabe 1

a) Für $n > 1$ sei

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $S \in \mathcal{P}_n$.

b) Für $n > 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ sei

$$S_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \alpha & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -1 \\ -1 & \cdots & -1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $S_\alpha \in \overline{\mathcal{P}_n}$?

c) Für $n > 1$ sei

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Für welche n gilt $S \in \overline{\mathcal{P}_n}$?

(2+2+2 Punkte)

Aufgabe 2

Sei $S \in \mathcal{P}_n$. Zeigen Sie, dass dann ein eindeutig bestimmtes $P \in \mathcal{P}_n$ existiert mit $S = P^2$. Gilt eine analoge Aussage auch für $S \in \overline{\mathcal{P}_n}$? (4 Punkte)

Aufgabe 3

a) Sei $Y \in \partial\mathcal{R}_2$. Zeigen Sie, dass ein $U \in \mathcal{U}_2 = \mathrm{GL}(2;\mathbb{Z})$, $U \neq \pm E_2$, existiert mit $Y[U] = Y$.

b) Sei $S \in \mathcal{R}_2$. Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist $\mathrm{diag}(S, t) \in \mathcal{R}_3$?

(6 Punkte)

Aufgabe 4

Sei $\mathcal{S}_n = \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R}) \cap \mathcal{P}_{2n}$. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$P : \mathcal{H}_n \to S_n,\ Z = X + iY \mapsto P_Z = \begin{pmatrix} Y^{-1} & 0 \\ 0 & Y \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & -X \\ 0 & E \end{pmatrix} \right]$$

wohldefiniert und bijektiv ist. Zeigen Sie weiterhin für $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathrm{Sp}(n;\mathbb{R})$ die folgenden Identitäten:

i) $P_{M\langle Z\rangle} = P_Z \left[M^{-1} \right]$,

ii) $(\mathrm{Im}(M\langle Z\rangle))^{-1} = P_Z \left[\begin{pmatrix} D^{tr} \\ -C^{tr} \end{pmatrix} \right]$,

iii) $P_Z^{-1} = P_{-Z^{-1}} = P_Z[J]$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5

Eine Matrix $M \in M(m \times n, \mathbb{Z})$ mit $m \leqslant n$ heißt *primitiv*, wenn man sie zu einer Matrix in $\mathcal{U}_n = \mathrm{GL}(n;\mathbb{Z})$ ergänzen kann. Zeigen Sie:

(i) (C, D) ist eine zweite Blockzeile einer Matrix in Γ_n genau dann, wenn (C, D) primitiv und CD^{tr} symmetrisch ist.

(ii) Zu $R \in \mathrm{Sym}(n;\mathbb{Q})$ exisitiert eine Matrix $M \in \Gamma_n$ mit Rang $C = n$ und $R = C^{-1}D$.
Hinweis: Bringen Sie R auf Elementarteilerform und verwenden Sie (i).

(iii) Sind M, M' Matrizen, die (ii) erfüllen, so gilt $\Gamma_{n,0}M' = \Gamma_{n,0}M$, und $|\det(C)|$ ist eindeutig bestimmt.

(3+2+1 Punkte)

Aufgabe 6

a) Charakterisieren Sie $\{Z = iY \mid Z \in \mathcal{F}_2\}$ explizit, d.h. geben Sie explizite Bedingungen an die Matrixkoeffizienten an.

b) Sei

$$Z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $M \in \Gamma_2$, so dass $M\langle Z\rangle \in \mathcal{F}_2$.

(3+3 Punkte)

Aufgabe 7

Sei $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Gamma_n$ mit $0 < r = \operatorname{Rang}(C) < n$. Zeigen Sie: Es gibt $U, V \in \operatorname{GL}(n;\mathbb{Z})$, so dass

$$\begin{pmatrix} U^{tr} & 0 \\ 0 & U^{-1} \end{pmatrix} M \begin{pmatrix} V^{tr} & 0 \\ 0 & V^{-1} \end{pmatrix} \in \Gamma_{n,j}$$

für alle $j \geqslant r$. (2 Punkte)

Aufgabe 8

a) Zeigen Sie für $M \in \Gamma_n$ und $P = \begin{pmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{pmatrix}$ die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

  (i) $\frac{1}{2}(P[M] - P)$ ist gerade.

  (ii) $A^{tr}C$ und $B^{tr}D$ sind gerade.

  (iii) AB^{tr} und CD^{tr} sind gerade.

b) Zeigen Sie, dass die Menge $\Gamma_{n,\vartheta}$ der Matrizen $M \in \Gamma_n$ mit den Eigenschaften (i), (ii) bzw. (iii) aus a) eine Untergruppe von Γ_n ist.

(2+1 Punkte)

Aufgabe 9

Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie, dass für $W \in \mathcal{H}_m$ die Abbildung

$$\phi_W : \mathcal{M}_k(\Gamma_{n+m}) \to \mathcal{M}_k(\Gamma_n),\ f \mapsto f_W$$

mit

$$f_W : \mathcal{H}_n \to \mathbb{C},\ Z \mapsto f(\operatorname{diag}(Z, W))$$

ein Vektorraumhomomorphismus ist. Zeigen Sie weiterhin, dass die Fourierkoeffizienten von f_W Modulformen vom Grad m und Gewicht k in W sind. (4 Punkte)

Aufgabe 10

a) Zeigen Sie, dass für $S \in \overline{\mathcal{P}_n}$ die Abschätzung

$$\det(S) \leqslant \left(\frac{\operatorname{Spur}(S)}{n}\right)^n$$

gilt.

b) Zeigen Sie, dass für $\alpha \geqslant 0$ die Reihe

$$\sum_{T \in \Lambda_n, T \geqslant 0} (\det T)^{\alpha} e^{\pi i \operatorname{Spur}(TZ)}$$

auf den Bereichen $\{Z \in \mathcal{H}_n \mid \operatorname{Im}(Z) \geqslant \delta E\}$, $\delta > 0$, absolut gleichmäßig konvergiert.

(2+3 Punkte)

Aufgabe 11

Zeigen Sie, dass zu jedem $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ ein $C = C(f)$ existiert, so dass

$$|\alpha_f(T)| \leqslant C \cdot (\text{Spur } T)^{nk}$$

für alle $T \in \Lambda_n$ mit $T \neq 0$. (2 Punkte)

Aufgabe 12

Sei $n \in \mathbb{N}$ und $k > 0$. Zu $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ sei

$$\widetilde{f} : \mathcal{H}_n \to \mathbb{R},\ Z \mapsto (\det Y)^{k/2}|f(Z)|.$$

Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) $f \in \mathcal{S}_k(\Gamma_n)$.

(ii) Es existieren $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $|f(Z)| \leqslant \gamma_1 e^{-\gamma_2 \text{Spur}(Y)}$ für alle $Z = X + iY \in \mathcal{F}_n$.

(iii) Es existieren $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+$ mit $\widetilde{f}(Z) \leqslant \beta_1 e^{-\beta_2 \det(Y)^{1/n}}$ für alle $Z = X + iY \in \mathcal{H}_n$.

(iv) $\widetilde{f}(Z)$ ist auf $\mathcal{H}_n$ beschränkt.

(5 Punkte)

Aufgabe 13

Sei $n \in \mathbb{N}$, $k > 0$ und $0 \leqslant r \leqslant n$. Zeigen Sie, dass für $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ gilt:

(i) $f|\phi^n = \alpha_f(0)$.

(ii) $f|\phi^{n-r} = 0$ ist äquivalent zu $\alpha_f(T) = 0$ für alle $T \in \Lambda_n$ mit $\text{Rang}(T) \leqslant r$.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 14

Sei $(\mathcal{T}_n)_{n \geqslant 0}$ eine Folge von Endomorphismen $\mathcal{T}_n : \mathcal{M}_k(\Gamma_n) \to \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ mit der Eigenschaft

$$\mathcal{T}_{n+1}(f)|\phi = c_n \mathcal{T}_n(f|\phi),\ c_n \in \mathbb{C}^\times,$$

für alle $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_{n+1})$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{T}_n(\mathcal{S}_k(\Gamma_n)) \subset \mathcal{S}_k(\Gamma_n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (2 Punkte)

Aufgabe 15

Seien $\Gamma' \subset \Gamma \subset \Gamma_n$ Kongruenzgruppen und $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma')$, $f \neq 0$. Konstruieren Sie mit Hilfe von f eine Modulform $g \in \mathcal{M}(\Gamma)$. (3 Punkte)

Aufgabe 16

Sei $\Gamma \subset \Gamma_n$ eine Kongruenzgruppe mit $-E \notin \Gamma$. Zeigen Sie: Eine Abbildung $\nu : \Gamma \to \mathbb{C}^*$ ist genau dann ein Multiplikatorensystem von einem Gewicht $\in \frac{1}{2}\mathbb{Z}$, wenn eine Funktion $f : \mathcal{H}_n \to \mathbb{C}$ existiert mit $f|_r M = \nu(M) f$ für alle $M \in \Gamma$. (3 Punkte)

Aufgabe 17

Geben Sie unter Verwendung des Fundamentalbereiches $\mathcal{F}_n$ der vollen Modulgruppe einen Fundamentalbereich für eine beliebige Kongruenzgruppe $\Gamma \subset \Gamma_n$ an. (3 Punkte)

Aufgabe 18

Sei $k \in \mathbb{N}, S \in \mathcal{P}_{8k} \cap \Lambda_{8k} \cap \mathrm{GL}(8k, \mathbb{Z})$ und $f(Z) = \Theta^{(n)}(Z; S)$ die Theatareihe zu S.

1. Zeigen Sie: $\alpha_f(T) \neq 0 \Rightarrow T_D = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_j \in 2\mathbb{N}_0$, $1 \leqslant j \leqslant n$.
2. Sei $D := \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n)$ mit $\lambda_j \in 2\mathbb{N}_0$, $1 \leqslant j \leqslant n$. Geben Sie eine Schranke für die Anzahl nichtverschwindender Fourierkoeffizienten $a_f(T)$ mit $T_D = D$ mit Hilfe der Definition der Theatareihe an.

(2+2 Punkte)

Aufgabe 19

Sei $(\mathcal{T}_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge von Endomorphismen $\mathcal{T}_n : \mathcal{M}_k(\Gamma_n) \to \mathcal{M}_k(\Gamma_n)$ mit

$$\mathcal{T}_{n+1}(f)|\phi = c_n \mathcal{T}_n(f|\phi),$$

für alle $f \in \mathcal{M}_k(\Gamma_{n+1})$, wobei $c_n \in \mathbb{C}^*$. Zeigen Sie, dass dann

$$\mathcal{T}_n(\mathcal{M}_k(\Gamma_n)_\Theta) \subset \mathcal{M}_k(\Gamma_n)_\Theta$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (2 Punkte)

Aufgabe 20

1. Das Legendre-Symbol ist definiert durch

$$\left(\frac{a}{p}\right) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p|a, \\ 1, & \text{falls } a \text{ quadratischer Rest mod } p \\ -1, & \text{falls } a \text{ quadratischer Nichtrest mod } p \end{cases}$$

   Sei

$$A := \begin{pmatrix} 0 & e \\ -e^{tr} & B \end{pmatrix} \in M(12, \mathbb{Z}), e = (1, ..., 1), B = \left(\left(\frac{i-j}{11}\right)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant 11}.$$

   Zeigen Sie: Die Matrix

$$L_{24} := \begin{pmatrix} 4E_{12} & A - 2E_{12} \\ A^{tr} - 2E_{12} & 4E_{12} \end{pmatrix}$$

   ist gerade, unimodular und positiv definit.

Hinweis: Verwenden Sie die Identität

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^{tr} & S_3 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} E & -S_1^{-1} S_2 \\ 0 & E \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} S_1 & 0 \\ 0 & S_3 - S_1^{-1}[S_2] \end{pmatrix}$$

für

$$\begin{pmatrix} S_1 & S_2 \\ S_2^{tr} & S_3 \end{pmatrix} \in \mathrm{Sym}(n, \mathbb{R})$$

mit $S_1 \in \mathrm{Sym}(m, \mathbb{R}), \det(S_1) \neq 0, 1 \leqslant m < n$.

2. Stellen Sie $E_k^{(1)}$ für $k = 12, 16, 20$ als Linearkombination von Thetareihen dar. Verwenden Sie dabei ohne Beweis, dass $\mu(L_{24}) = 4$ gilt.

(3+5 Punkte)