Eine nirgends differenzierbare Funktion

Ausarbeitung zum Seminar zur Fourieranalysis, 11.12.2007

Aaron Klüppelberg

Obwohl es keine Umstände macht, sich eine stetige Funktion vorzustellen, die an gewissen Punkten nicht differenzierbar ist, so erscheint einem der Gedanke an eine Funktion, die zwar stetig, aber an keiner Stelle differenzierbar ist, ungewohnt oder befremdlich, was nicht zuletzt daran liegt, dass einem solche Funktionen selten oder überhaupt nicht begegnet sind. Tatsächlich ist die Annahme, dass stetige Funktionen zumindest *irgendwo* differenzierbar sein müssten, zu Lebzeiten von Mathematikern wie Bolzano oder Weierstraß in Fachkreisen durchaus als gültig anerkannt worden. Dieser Vortrag soll nun einen Einblick in die Klasse eben jener Funktionen gewähren, die zwar überall stetig, jedoch nirgends differenzierbar sind.

§ 1 Eine nirgends differenzierbare Funktion

Es soll zunächst ein Beispiel präsentiert werden, das in der Tat eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktionen darstellt. Der Beweis dieser Eigenschaft wird in eine Richtung weisen, die im zweiten Abschnitt zu einer abstrakten Konstruktion von ebensolchen Funktionen führen wird.

(1.1) Beispiel
Sei $n \in \mathbb{N}$. Für $n \to \infty$ konvergiert die Reihe $h^n(t) \equiv \sum_{r=0}^{n} (r!)^{-1} \sin((r!)^2 t)$ auf $\mathbb{T} = [-\pi, \pi)$ gleichmäßig gegen eine Funktion $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, die überall stetig, aber nirgends differenzierbar ist. $\diamond$

Bevor die Aussage aus Beispiel (1.1) bewiesen wird, wollen wir uns zunächst eine Beweisidee zurechtlegen. Dazu ist es nützlich, den Funktionsgraphen näher zu betrachten:

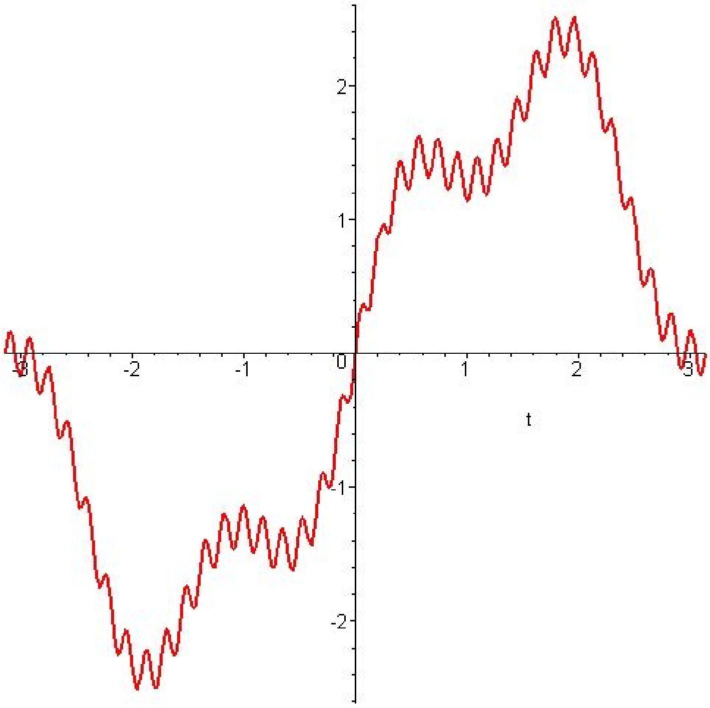

Abbildung 1: $h^n(t)$ für $n = 3$

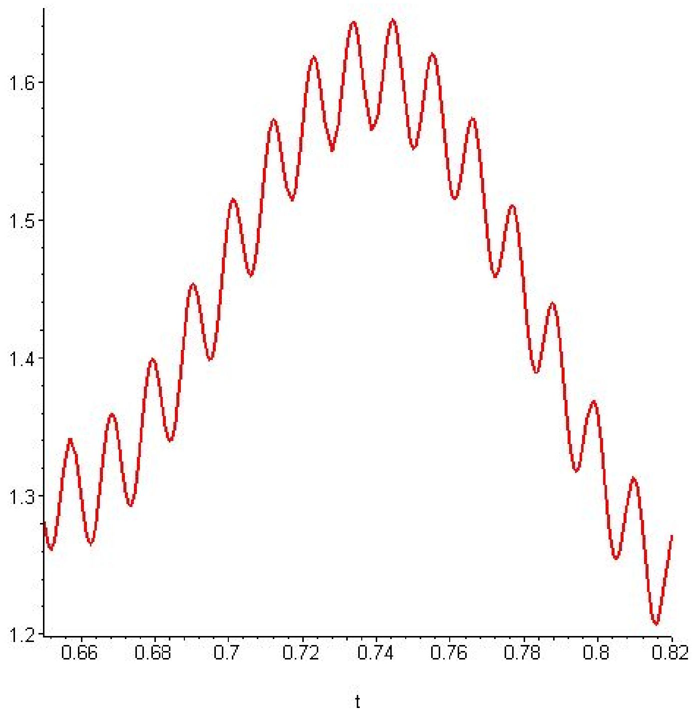

Abbildung 2: $h^n(t)$ für $n = 4$

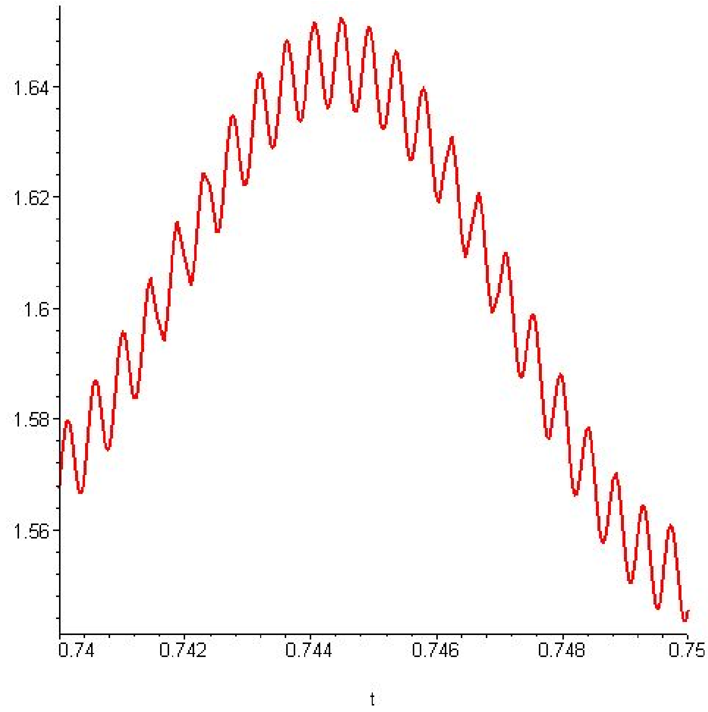

Abbildung 3: $h^n(t)$ für $n = 5$

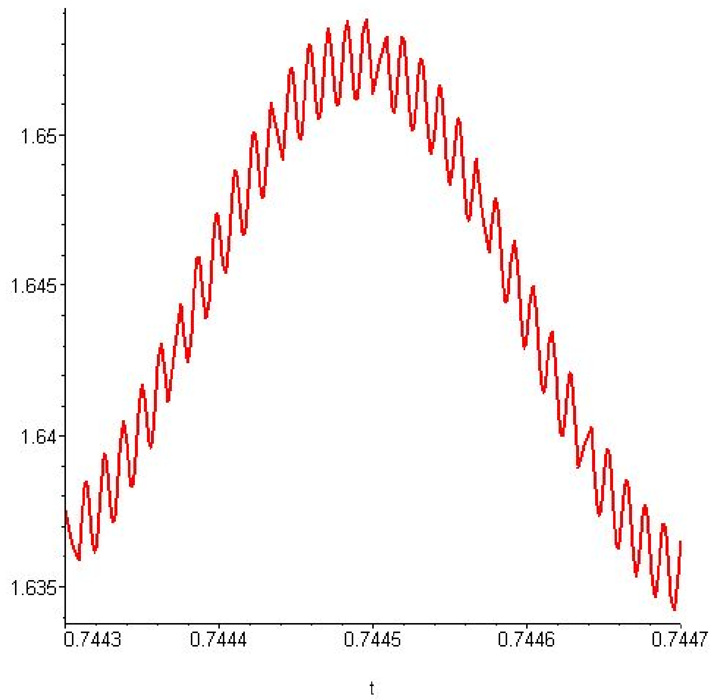

Abbildung 4: $h^n(t)$ für $n = 6$

Der Funktionsgraph ändert sich strukturell nicht, wenn man näher in ein Intervall 'hineinzoomt'.
Die Idee für den Beweis der nicht-Differenzierbarkeit des Beispiels ist nun, dass eine Folge $\{t_n\}_n$, die sich einem Punkt $t \in \mathbb{T}$ nähert, schneller gegen den Punkt t konvergiert als die zugehörigen Funktionswerte $h(t_n)$ gegen $h(t)$. Es wird sich zeigen, dass diese Bedingung erfüllt wird, wenn die t_n als bestimmte Extremstellen der Funktion h gewählt werden, die sich in der Umgebung jedes Punktes $t \in \mathbb{T}$ häufen.

Es sollen nun einige rechnerische Vorüberlegungen getroffen werden, um die Struktur des Beweises klarer aufschreiben zu können.

(1.2) Lemma

i) $\sum_{r=n}^{\infty} (r!)^{-1} \leq 2(n!)^{-1}$ für $n \in \mathbb{N}$,

ii) $|\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$,

iii) Für alle $K \geq 3$ und $x \in \mathbb{T}$ gibt es ein $y \in \mathbb{T}$ mit $K^{-1}\pi < |x - y| \leq 3K^{-1}\pi$ und $|\sin(Kx) - \sin(Ky)| \geq 1$. $\diamond$

Beweis

i) Wegen $n + k \geq n + 1 \geq 2$ für $n, k \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=n}^{\infty} (r!)^{-1} &= \sum_{r=n}^{\infty} (n!)^{-1} \prod_{k=1}^{r-n} (n+k)^{-1} \leq \sum_{r=n}^{\infty} (n!)^{-1} \prod_{k=1}^{r-n} (n+1)^{-1} \\
&= \sum_{r=n}^{\infty} (n!)^{-1} (n+1)^{-(r-n)} \leq (n!)^{-1} \sum_{r=n}^{\infty} 2^{-(r-n)} \\
&= (n!)^{-1} \sum_{r=0}^{\infty} 2^{-r} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} 2(n!)^{-1}
\end{aligned}$$

ii) Für $x = y$ ist die Aussage trivial, für $x \neq y$ folgt sie aus dem Mittelwertsatz:
Für $x \neq y$ existiert ein $\xi \in (x, y)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\sin(x) - \sin(y)}{x - y} &= \cos\xi \rightarrow \frac{|\sin(x) - \sin(y)|}{|x - y|} = |\cos(\xi)| \leq 1 \\
&\Rightarrow |\sin(x) - \sin(y)| \leq |x - y|
\end{aligned}$$

iii) In den Intervallen $I_+ := \left(x + K^{-1}\pi, x + 3K^{-1}\pi\right)$ und $I_- := \left(x - 3K^{-1}\pi, x - K^{-1}\pi\right)$ nimmt $\sin(Kx)$ jeweils alle Werte zwischen 1 und -1 an. Durch die Bedingung $K \geq 3$ liegt mindestens eins der Intervalle ganz in $\mathbb{T}$, denn für $x = 0$ gilt:

$$0 < K^{-1}\pi \leq |0 - y| = |y| < 3K^{-1}\pi \leq \pi \Rightarrow y \in (-\pi, \pi) \subset \mathbb{T}.$$

Für $x \neq 0$ wähle man das Intervall $I_{(-1)^{sgn(x)+1}}$, welches durch Verschiebung in Richtung x erst recht in $\mathbb{T}$ enthalten ist.
Deswegen kann man y_1 und y_2 aus diesem Intervall finden, für die $\sin(Ky_1) = 1$ und $\sin(Ky_2) = -1$ gelten. Eines dieser y_i erfüllt dann nach Konstruktion Aussage (iii). □

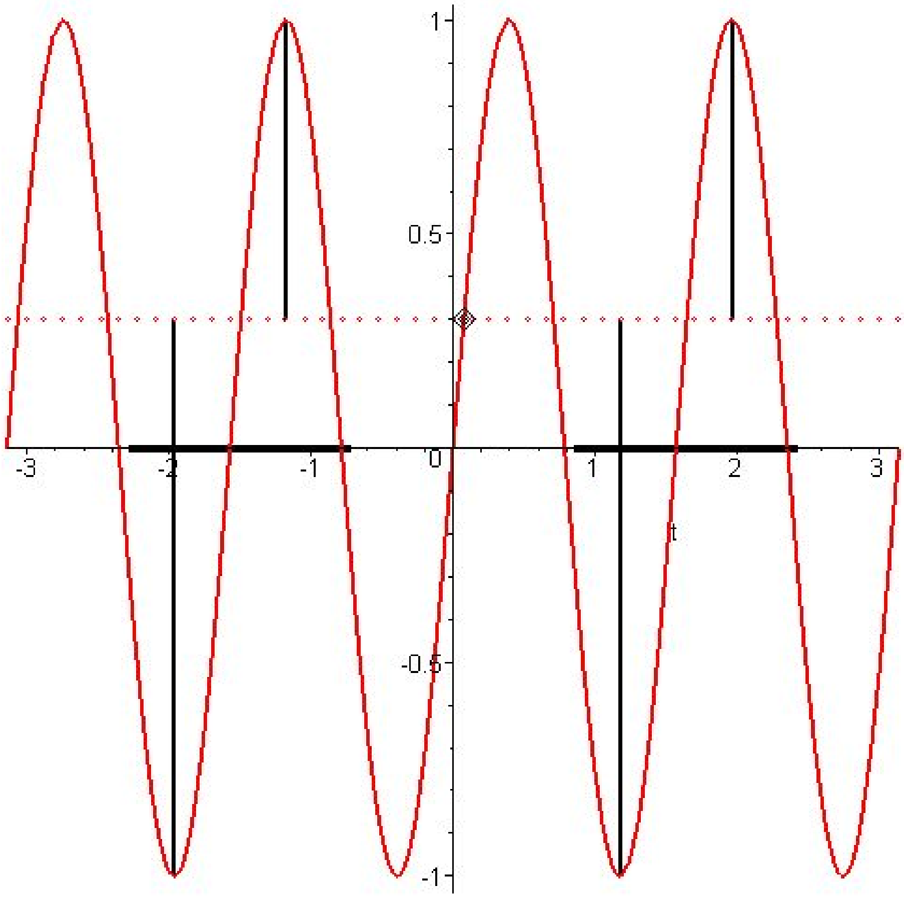

Abbildung 5: Grafik zu Lemma (1.2)iii): $\sin((2!)^2 x)$. Zu $x = 0.076$ werden in den auf der x-Achse schwarz unterlegten Intervallen Punkte gesucht, deren Funktionswerte von $\sin(4 \cdot 0.076) = 0.3$ einen Abstand größer oder gleich 1 haben. Die Extrema in den markierten Intervallen wurden exemplarisch mit der $y = 0.3$-Linie verbunden und so zwei mögliche Punkte ausgemacht, die die geforderte Eigenschaft haben.

Nach diesen Vorüberlegungen können wir uns dem eigentlichen Beweis von Bsp.(1.1) widmen.

Beweis (von Beispiel (1.1))
Die gleichmäßige Konvergenz der Reihe $\sum_{r=0}^{n}(r!)^{-1}\sin((r!)^2t)$ gegen eine stetige Funktion $h(t)$ folgt leicht, wenn man sich klar macht $(*)$, dass $r! > r^2$ für alle $r \geq 4$ erfüllt ist und deswegen $(0!)^{-1} + (1!)^{-1} + (2!)^{-1} + (3!)^{-1} + \sum_{r=4}^{\infty} r^{-2}$ eine konvergente Majorante darstellt (vgl. Satz (2.1) in [3]).

($(*)$: $r! > r^2 \Leftrightarrow (r-1)! > r$ für $r \geq 4$. Beweis über vollständige Induktion nach r:
IA: $r = 4$: (4-1)! = 6 > 4
IV: Gelte die Behauptung für ein $r \geq 4$.
IS: $r \to (r+1)$:
$((r+1)-1)! = r! = r \cdot (r-1)! \overset{\text{I.V.}}{>} r \cdot r = r^2 > r \Leftrightarrow r > 1$, was für alle $r \geq 4$ erfüllt ist.)

Widmen wir uns nun der Eigenschaft der nicht-Differenzierbarkeit von h an beliebigen Punkten $t \in \mathbb{T}$. Dazu wollen wir zeigen, dass der Differenzenquotient $\frac{|h(t)-h(t_n)|}{|t-t_n|}$ für eine Folge $\{t_n\}_n \to t$ divergiert.
Wir zerlegen zunächst für $n \in \mathbb{N}$ die Reihe in drei Teile $h(t) \equiv h_n(t) + k_n(t) + l_n(t)$ mit

a) $h_n(t) = \sum_{r=0}^{n-1}(r!)^{-1}\sin((r!)^2t)$

b) $k_n(t) = (n!)^{-1}\sin((n!)^2t)$

c) $l_n(t) = \sum_{r=n+1}^{\infty}(r!)^{-1}\sin((r!)^2t)$.

Dann wollen wir eine Folge $\{t_n\}_n \subset \mathbb{T}$ konstruieren, die gegen ein $t \in \mathbb{T}$ konvergiert.

Sei also $t \in \mathbb{T}$, dann wählen wir für jedes $n \geq 3$, $n \in \mathbb{N}$ ein t_n wie in La(1.2)iii) beschrieben, also so, dass

$$(n!)^{-2}\pi < |t - t_n| < 3(n!)^{-2}\pi$$

ist und trotzdem

$$|\sin((n!)^2t) - \sin((n!)^2t_n)| \geq 1 \text{ gilt.}$$

Dann können wir den Zähler des Differenzenquotienten schreiben als:

$$\begin{aligned} |h(t)-h(t_n)| &= |k_n(t)-k_n(t_n)+h_n(t)-h_n(t_n)+l_n(t)-l_n(t_n)| \\ &\geq ||k_n(t)-k_n(t_n)|-|h_n(t)-h_n(t_n)|-|l_n(t)-l_n(t_n)|| \end{aligned}$$

Wir wollen nun die einzelnen Differenzen in diesem Betrag abschätzen.

1.

$$\begin{aligned} |k_n(t) - k_n(t_n)| &= |(n!)^{-1}(\sin((n!)^2 t) - \sin((n!)^2 t_n))| \\ &= (n!)^{-1} |\sin((n!)^2 t) - \sin((n!)^2 t_n)| \underset{\text{Wahl von } t_n}{\overset{\text{La(1.2)iii)}}{\geq}} (n!)^{-1} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} |l_n(t) - l_n(t_n)| &\leq |l_n(t)| + |l_n(t_n)| \\ &= |\sum_{r=n+1}^{\infty} (r!)^{-1} \sin((r!)^2 t)| + |\sum_{r=n+1}^{\infty} (r!)^{-1} \sin((r!)^2 t_n)| \\ &\overset{\text{La(1.2)i)}}{\leq} 2((n+1)!)^{-1} + 2((n+1)!)^{-1} = 4((n+1)!)^{-1} \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} |h_n(t) - h_n(t_n)| &= |\sum_{r=0}^{n-1} (r!)^{-1}(\sin((r!)^2 t) - \sin((r!)^2 t_n))| \\ &\leq \sum_{r=0}^{n-1} (r!)^{-1} |\sin((r!)^2 t) - \sin((r!)^2 t_n)| \\ &\overset{\text{La(1.2)ii)}}{\leq} \sum_{r=0}^{n-1} (r!)^{-1} |(r!)^2 t - (r!)^2 t_n| \\ &= \sum_{r=0}^{n-1} (r!) |t - t_n| = \left((n-1)! + \sum_{r=0}^{n-2} (r!) \right) |t - t_n| \\ &\leq \left((n+1)! + \sum_{r=0}^{n-2} (n-2)! \right) |t - t_n| \\ &= ((n-1)! + (n-1)(n-2)!) \, |t - t_n| \\ &\overset{\text{La(1.2)iii)}}{\leq} 2(n-1)! 3(n!)^{-2} \pi = 6\pi n^{-1} (n!)^{-1} \end{aligned}$$

Der zweite Term wird anschaulich klein, da die Koeffizienten $(r!)^{-1}$ für $r > n$ klein sind. Der dritte Term wird anschaulich klein, weil die Frequenz $(r!)^2$ der Oszillation im Sinus für $r < n$ so klein ist, dass sich $h_n(t)$ und $h_n(t_n)$ zumindest für größere n nicht stark unterscheiden.

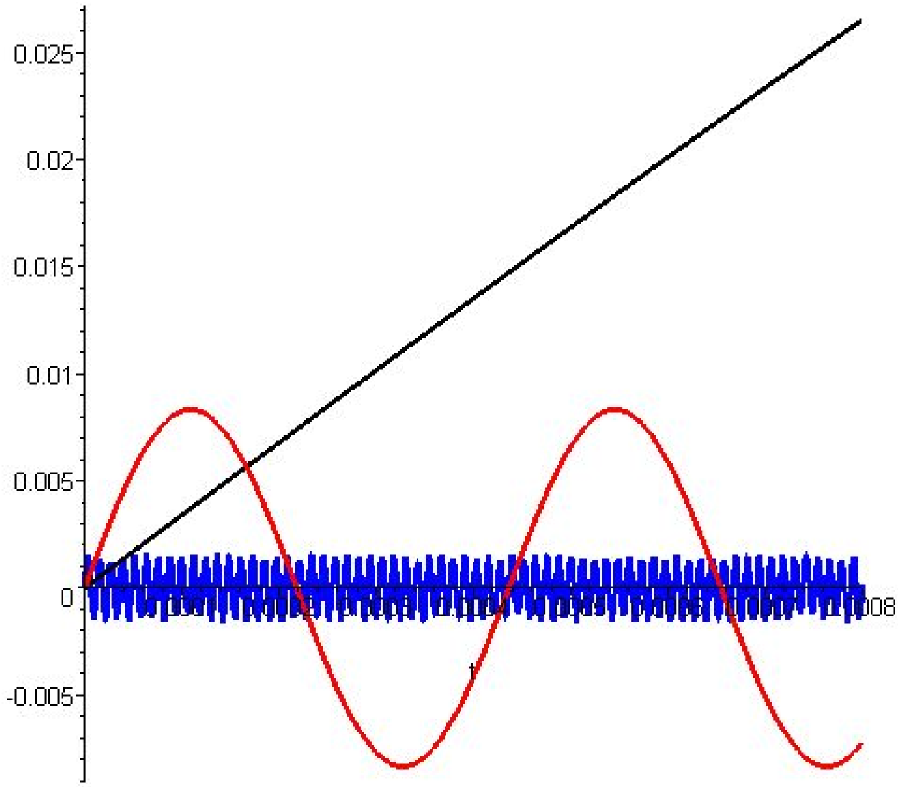

Abbildung 6: Die rote Linie zeigt $k_5(t)$. Die Funktion oszilliert stark gegenüber $h_5(t)$ (schwarz) und ist betragsmäßig groß gegenüber $l_5(t)$ (blau), weswegen die Differenz $k_5(t) - k_5(t_n)$ die Differenz $h(t) - h(t_n)$ für geeignete t_n dominiert.

Fasst man die letzten beiden Terme zusammen, so erhält man:

$$\begin{aligned} |l_n(t) - l_n(t_n)| + |h_n(t) - h_n(t_n)| &\leq 4((n+1)!)^{-1} + 6\pi n^{-1}(n!)^{-1} \\ &= (n!)^{-1}\left(4(n+1)^{-1} + 6\pi n^{-1}\right) \\ &\leq (n!)^{-1}\left((4+6\pi)n^{-1}\right) \\ &\leq (n!)^{-1} \cdot 30n^{-1} \end{aligned} \tag{1}$$

Das bedeutet, dass der erste Term im Betrag des Differenzenquotienten größer ist, sobald $n \geq 30$ ist. Da der Grenzprozess für $n \to \infty$ interessiert, kann man also ohne Einschränkung $n \geq 60$ wählen und schreiben:

$$\begin{aligned}
|h(t) - h(t_n)| &= |k_n(t) - k_n(t_n) + h_n(t) - h_n(t_n) + l_n(t) - l_n(t_n)| \\
&\geq ||k_n(t) - k_n(t_n)| - |h_n(t) - h_n(t_n)| - |l_n(t) - l_n(t_n)|| \\
&\overset{n \geq 60 > 30}{=} |k_n(t) - k_n(t_n)| - |h_n(t) - h_n(t_n)| - |l_n(t) - l_n(t_n)| \\
&\overset{(1)}{\geq} (n!)^{-1} - (n!)^{-1} \cdot 30n^{-1} \overset{\text{ab } n=60}{\geq} (n!)^{-1}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{(n!)^{-1}}{2}
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt:

$$\frac{|h(t) - h(t_n)|}{|t - t_n|} \overset{n \geq 60}{\geq} \frac{(n!)^{-1}}{2|t - t_n|} \overset{\text{La(1.2)iii)}}{\geq} \frac{(n!)^{-1}}{2 \cdot 3\pi (n!)^{-2}} = \frac{(n!)}{6\pi} \overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \infty,$$

womit die Divergenz des Differenzenquotienten für eine Folge $\{t_n\}_n$, die gegen ein beliebiges $t \in \mathbb{T}$ konvergiert, gezeigt ist. Folglich ist h in keinem Punkt $t \in \mathbb{T}$ differenzierbar.

□

§2 Die Funktion von Weierstrass und Hardy

Nun wollen wir uns einer analytischen Betrachtung der Art der Fourierreihe aus Beispiel (1.1) widmen und aus ihrer Struktur die Klasse nirgends differenzierbarer Funktionen von Weierstrass und Hardy ableiten. Die Eigenheit der Fourierreihe aus dem Beispiel, dass bestimmte Fourierkoeffizienten gar nicht auftreten, soll uns dabei den richtigen Weg weisen.

(2.1) Definition (Lakunäre Folge)
Sei $0 \leq \lambda(0) < \lambda(1) < ...$ eine Folge ganzer Zahlen. Existiert eine Proportionalitätskonstante $q > 1$ und ein Startparameter $0 \leq N \in \mathbb{N}_0$, so dass $\lambda(n+1) \geq q\lambda(n)$ für alle $n \geq N$ gilt, so nennt man die Folge $\{\lambda(j)\}_j$ lakunär. ◇

Zur Eingewöhnung an diese Folgenart dienen die nachfolgenden

(2.2) Beispiele

a) $\lambda(j) = b^j$ ist für $b \geq 2$ aus $\mathbb{N}$ eine lakunäre Folge, denn es gilt $\frac{\lambda(j+1)}{\lambda(j)} = \frac{b^{j+1}}{b^j} = b > 1$ für alle $j \in \mathbb{N}_0$.

b) $\lambda(j) = (j!)^2$ ist eine lakunäre Folge, denn es gilt $\frac{\lambda(j+1)}{\lambda(j)} = \frac{((j+1)!)^2}{(j!)^2} = (j+1)^2 \geq 4$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

c) $\lambda(j) = j(j+1)(j+2)$ ist keine lakunäre Folge, denn es gilt für $j > 0$: $\frac{(j+1)(j+2)(j+3)}{j(j+1)(j+2)} = \frac{j+3}{j} = 1 + \frac{3}{j} \to 1$ für $j \to \infty$, es gibt also kein $q > 1$, welches immer kleiner ist als die Quotienten $\frac{\lambda(j+1)}{\lambda(j)}$. ◇

Eine wichtige Eigenschaft lakunärer Folgen ist festgehalten in folgendem

(2.3) Lemma

Sei $\{\lambda(j)\}_j$ eine lakunäre Folge mit Proportionalitätskonstante q und Startparameter N. Dann gilt für alle $j \geq N+1$:

$$\begin{aligned} \lambda(j+1) - \lambda(j) &\geq c\lambda(j) \\ \lambda(j) - \lambda(j-1) &\geq c\lambda(j) \end{aligned}$$

Dabei ist $c = \min\left(q-1, \frac{q-1}{q}\right)$. ◇

Beweis

Die erste Ungleichung ist erfüllt, denn nach Definition (2.1) und den Voraussetzungen gilt $\lambda(j+1) - \lambda(j) \geq q\lambda(j) - \lambda(j) = (q-1)\lambda(j) \geq c\lambda(j)$ nach Wahl von c.

Für die zweite Ungleichung definieren wir zu jedem $j \geq N+1$ ein $k(j) \geq 0$ so, dass $\lambda(j) = q\lambda(j-1) + k(j)$ erfüllt ist, also wegen $\lambda(j) \geq q\lambda(j-1)$ als $k(j) \equiv \lambda(j) - q\lambda(j-1)$. Es gilt:

$$\begin{aligned} & \lambda(j) - \lambda(j-1) && \geq c\lambda(j) \\ \Leftrightarrow\ & (q-1)\lambda(j-1) + k(j) && \geq cq\lambda(j-1) + ck(j) \\ \Leftrightarrow\ & (q-1-cq)\lambda(j-1) + (1-c)k(j) && \geq 0 \end{aligned}$$

Letztere Ungleichung ist aber durch $c = \min\left(q-1, \frac{q-1}{q}\right) \leq \frac{q-1}{q}$ erfüllt, denn es ist

$$\begin{aligned} (q-1-cq)\lambda(j-1) + (1-c)k(j) &\geq \left(q-1-\frac{q-1}{q}q\right)\lambda(j-1) + \left(1-\frac{q-1}{q}\right)k(j) \\ &= (q-1-q+1)\lambda(j-1) + \left(1-1+\frac{1}{q}\right)k(j) \\ &= \frac{1}{q}k(j) \geq 0. \end{aligned}$$

□

Nun wollen wir Fourierreihen erzeugen, deren Fourierkoeffizienten 0 sind, sollten sie nicht gerade an einer Stelle auftreten, die durch ein Element einer lakunären Folge angesprochen wird.

(2.4) Definition (Lakunäre Fourierreihe)
Es sei $\{\lambda(j)\}_j \subset \mathbb{N}_0$ eine lakunäre Folge. Konvergiert $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\lambda(j)}| + |b_{\lambda(j)}|$, so nennt man eine Fourierreihe der Form $\sum_{j=0}^{\infty} a_{\lambda(j)} e^{i\lambda(j)t} + b_{\lambda(j)} e^{-i\lambda(j)t}$ eine lakunäre Fourierreihe. $\diamond$

Eine Identifikation der Summanden mit den Fourierkoeffizienten erfolgt nun in der

(2.5) Bemerkung
Die Fourierkoeffizienten einer lakunären Fourierreihe $g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\lambda(j)} e^{i\lambda(j)t} + b_{\lambda(j)} e^{-i\lambda(j)t}$ sind augenscheinlich

$$\hat{g}(m) = \begin{cases} b_{\lambda(j)} & \text{für } -m = \lambda(j) > 0 \\ a_{\lambda(0)} + b_{\lambda(0)} & \text{für } m = \lambda(0) = 0 \\ a_{\lambda(j)} & \text{für } +m = \lambda(j) > 0 \\ 0 & \text{für } |m| \notin \{\lambda(j)\}_j \end{cases}.$$ $\diamond$

Um uns etwas Schreibarbeit zu sparen, fassen wir ein recht offensichtliches Ergebnis bei der Betrachtung von lakunären Fourierreihen in einem Korollar zusammen:

(2.6) Korollar
Ist $g(t) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\lambda(j)} e^{i\lambda(j)t} + b_{\lambda(j)} e^{-i\lambda(j)t}$ eine lakunäre Fourierreihe, so konvergiert sie gleichmäßig auf $\mathbb{T}$ und ist dort stetig. $\diamond$

Beweis
Da nach Definition einer lakunären Fourierreihe $\sum_{j=0}^{\infty} |a_{\lambda(j)}| + |b_{\lambda(j)}| < \infty$ ist, liegt bereits eine konvergente Majorante für die Fourierreihe vor. Satz (2.1) in [3] liefert dann den Beweis. $\square$

Lakunäre Fourierreihen haben die Eigenschaft aus Beispiel (1.1), immer größere Lücken zwischen ihren Fourierkoeffizienten aufzuweisen. Das nachfolgende Lemma wird zusammen mit dieser Eigenschaft den Schlüssel zur Konstruktion nirgends differenzierbarer Funktionen bilden, da es das Wachstumsverhalten (bzw. Abklingverhalten) der Fourierkoeffizienten derartiger Reihen beschreibt.

(2.7) Lemma
Sei $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, deren Fourierreihe gleichmäßig gegen sie konvergiert und $n \in \mathbb{N}$. Ist $\hat{g}(r) = 0$ für $0 \neq |r - m| < 2n$, so gilt für den m-ten Fourierkoeffizienten:

$$|\hat{g}(m)| \leq 2\pi^4 \left(n^{-1} \sup_{|t| \leq n^{-1/4}} |t^{-1} g(t)| + \frac{n^{-2}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)| dt \right). \qquad \diamond$$

Ein Beweis dieses Lemmas wird im letzten Abschnitt dieser Ausarbeitung erfolgen.

Der nächste Satz liefert nun die Konstruktionsanleitung für nirgends differenzierbare Funktionen.

(2.8) Satz
Es sei $g(t) := \sum_{j=0}^{\infty} a_{\lambda(j)} e^{i\lambda(j)t} + b_{\lambda(j)} e^{-i\lambda(j)t}$ eine lakunäre Fourierreihe. Dann gilt:

(i) Ist $g(0) = g'(0) = 0$, so folgen $\lambda(j) a_{\lambda(j)} \to 0$ und $\lambda(j) b_{\lambda(j)} \to 0$ für $j \to \infty$.

(ii) (i) trifft bereits zu, wenn g nur in 0 differenzierbar ist.

(iii) (i) trifft bereits zu, wenn g an einem (einzigen) beliebigen Punkt differenzierbar ist. $\diamond$

Beweis

(i) Für $\delta > 0$ ist $t^{-1} g(t)$ auf $\mathbb{T} \setminus [-\delta, \delta]$ stetig. Für $t \to 0$ wird der Quotient zu:

$$t^{-1} g(t) = \frac{g(t) - g(0)}{t - 0}$$

Dies ist der Differenzenquotient für die Ableitung von $g(t)$ bei $t = 0$ und er konvergiert nach Voraussetzung gegen $0 < \infty$. Damit ist $t^{-1} g(t)$ auf ganz $[-\pi, \pi] \supset \mathbb{T}$ stetig. Diese Eigenschaft wird etwas später gebraucht.
Da $g(t)$ als lakunäre Fourierreihe stetig ist, kann Lemma (2.7) angewandt werden.
Bevor wir dies tun, wollen wir noch einige Überlegungen zu n aus der Formel von Lemma (2.7) anstellen um die Größe der Lücken zwischen den Fourierkoeffizienten von g zu beschreiben.
Da n offenbar kleiner oder gleich der Gesamtanzahl von Nachbarfourierkoeffizienten eines Fourierkoeffizienten m ist, die gleich 0 sind, ist dies im Falle der Wahl $N(j) \equiv \left\lfloor \frac{\min(\lambda(j+1) - \lambda(j), \lambda(j) - \lambda(j-1)) - 1}{2} \right\rfloor \overset{\text{La(2.3)}}{\geq} \left\lfloor \frac{c\lambda(j) - 1}{2} \right\rfloor \geq \frac{c\lambda(j)}{3} > 0$ für n für alle $j \geq \max(N+1, m)$ mit m so, dass $c\lambda(j) \geq 5$ erfüllt ist, auch erfüllt. N

beschreibt den Startparameter der lakunären Folge $\{\lambda(j)\}_j$.
Die Bedingung $c\lambda(j) \geq 5$ ist dabei erfüllbar, da $\{\lambda(j)\}_j$ als streng monoton wachsende Folge ganzer Zahlen unbeschränkt ist.
Der Grund dafür ist die Tatsache, dass $\hat{g}(\lambda(j)+1) = ... = \hat{g}(\lambda(j+1)-1) = 0$ nach der Definition der lakunären Fourierreihen gilt und somit zwischen $\hat{g}(\lambda(j))$ und $\hat{g}(\lambda(j+1))$ gerade $\lambda(j+1) - \lambda(j) - 1$ Fourierkoeffizienten den Wert 0 haben, wie es in der Voraussetzung zu Lemma (2.7) gefordert ist.

Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es außerdem wegen der Unbeschränktheit der $\lambda(j)$ zu jeder Konstanten $\pi^3 \int_{\mathbb{T}} |g(t)|dt$ ein $J \in \mathbb{N}$, so dass $N(j)^{-1}\pi^3 \int_{\mathbb{T}} |g(t)|dt < \varepsilon/2$ für alle $j \geq J$ erfüllt ist.

Da $t^{-1}g(t)$ stetig auf $\mathbb{T}$ ist und nach Voraussetzung $g(0) = g'(0) = 0$ gilt, gibt es zudem für jedes $\varepsilon > 0$ ein $k_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\sup_{|t|<N(j)^{-1/4}} |t^{-1}g(t)| < \varepsilon/4\pi^4$ für alle $j \geq k_0$ gilt, denn $N(j)^{-1/4}$ konvergiert für $j \to \infty$ gegen 0.

Sei also $\varepsilon > 0$, dann gilt nach obigen Überlegungen für $j \geq \max(N+1, m, J, k_0)$ nach Lemma (2.7):

$$
\begin{aligned}
|\hat{g}(\lambda(j))| &\leq 2\pi^4 \left(N(j)^{-1} \sup_{|t|<N(j)^{-1/4}} |t^{-1}g(t)| + \frac{N(j)^{-2}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)|dt \right) \\
\Rightarrow |N(j)\hat{g}(\lambda(j))| &\leq 2\pi^4 \left(\sup_{|t|<N(j)^{-1/4}} |t^{-1}g(t)| + \frac{N(j)^{-1}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)|dt \right) \\
&\leq 2\pi^4 \left(\frac{\varepsilon}{4\pi^4} + \frac{N(j)^{-1}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)|dt \right) \\
&= \frac{\varepsilon}{2} + N(j)^{-1}\pi^3 \int_{\mathbb{T}} |g(t)|dt \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

Das Produkt $N(j)\hat{g}(\lambda(j))$ konvergiert also für $j \to \infty$ gegen 0. Nach Definition von $N(j)$ gilt dann auch

$$
|N(j)\hat{g}(\lambda(j))| \geq \left| \frac{c\lambda(j)}{3} \hat{g}(\lambda(j)) \right| = \frac{c}{3} \left| \lambda(j) a_{\lambda(j)} \right| \to 0.
$$

Der Beweis für $\left|\lambda(j) b_{\lambda(j)}\right|$ ist unter Berücksichtigung von Bemerkung (2.5) völlig analog, womit die Behauptung gezeigt ist.

(ii) Definiere die Funktion $f(t) \equiv g(t) - g(0) - g'(0)\sin(t)$. Diese unterscheidet sich in ihren Fourierkoeffizienten nur bei $\hat{f}(0)$ und $\hat{f}(\pm 1)$ von der Funktion $g(t)$, so dass auch f konvergiert, wenn g konvergiert. f ist also stetig, wenn - wie in der Voraussetzung - g stetig ist.

Nach Konstruktion gilt außerdem $f(0) = g(0) - g(0) = 0$ und $f'(0) = g'(0) - g'(0)\cos(0) = 0$, also ist Teil (i) anwendbar und liefert $\lambda(j)a_{\lambda(j)} \to 0$ und $\lambda(j)b_{\lambda(j)} \to 0$ für $j \to \infty$. Da sich f und g wie eingangs erwähnt nur in den Fourierkoeffizienten $-1, 0, 1$ unterscheiden, ist somit die Aussage für $g(t)$ gezeigt, welches bei 0 nur differenzierbar ist, aber keine Bedingungen an $g(0)$ und $g'(0)$ aufweist.

(iii) Sei $t_0 \in \mathbb{T}$ der Punkt, an dem $g(t)$ differenzierbar ist. Definiere $f(t) \equiv g((t + t_0)_{\mathrm{mod}\mathbb{T}})$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} f(t) &= g((t+t_0)_{\mathrm{mod}\mathbb{T}}) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{\lambda(j)} e^{i\lambda(j)(t+t_0)_{\mathrm{mod}\mathbb{T}}} + b_{\lambda(j)} e^{-i\lambda(j)(t+t_0)_{\mathrm{mod}\mathbb{T}}} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} (a_{\lambda(j)} e^{i\lambda(j)t_0}) e^{i\lambda(j)t} + (b_{\lambda(j)} e^{-i\lambda(j)t_0}) e^{-i\lambda(j)t} \end{aligned}$$

$f(t)$ ist also eine lakunäre Fourierreihe, deren Fourierkoeffizienten betragsgleich zu denen von $g(t)$ sind. Nach Konstruktion ist f außerdem in 0 differenzierbar mit $f'(0) = g'(0 + t_0) = g'(t_0)$. Somit ist Teil (ii) anwendbar und liefert wegen der Betragsgleichheit der Fourierkoeffizienten das Ergebnis aus (i).

□

Dies führt zu dem Umkehrschluss, dass eine Funktion, bei der die Konvergenz in Satz (2.8)i) nicht erfüllt ist, nirgends differenzierbar sein kann.

(2.9) Lemma
Sei $g(t) := \sum_{j=0}^{\infty} a_{\lambda(j)} e^{i\lambda(j)t} + b_{\lambda(j)} e^{-i\lambda(j)t}$ eine lakunäre Fourierreihe derart, dass $\lambda(j)a_{\lambda(j)}$ oder $\lambda(j)b_{\lambda(j)}$ nicht gegen 0 konvergieren. Dann ist $g(t)$ eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion.

Beweis
Gäbe es ein $t \in \mathbb{T}$, in dem $g(t)$ differenzierbar wäre, so folgte aus Satz (2.8)iii), dass $\lambda(j)a_{\lambda(j)}$ und $\lambda(j)b_{\lambda(j)}$ gegen 0 konvergieren, was ein Widerspruch zur Voraussetzung ist. □

Dadurch erhalten wir schließlich die Quintessenz dieser Ausarbeitung:

(2.10) Beispiel (Eine Klasse nirgends differenzierbarer Funktionen)
Ist $b \geq 2$ eine ganze Zahl und $0 < \alpha < 1$, so definiert $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b^{-n\alpha} cos(b^n x) = \sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} cos(b^n x)$, $1 < a < b$, eine stetige, nirgends differenzierbare Funktion. $\diamond$

Beweis
Nach Beispiel (2.2)i) ist $\{b^n\}_n$ eine lakunäre Folge.
Offenbar ist $f(x)$ dann eine lakunäre Fourierreihe mit $a_{\lambda(n)} = b_{\lambda(n)} = b^{-n\alpha}/2$ und der Majoranten $\sum_{n=1}^{\infty} b^{-n\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} (b^{\alpha})^{-n} = 1/(b^{\alpha} - 1) < \infty$.
Weiterhin gilt

$$\lambda(n) a_{\lambda(n)} = b^n \frac{b^{-n\alpha}}{2} = \frac{1}{2} b^{(1-\alpha)n} \to \infty,$$

da $1 - \alpha > 0$ ist und deswegen eine Zahl größer als 1 zur n-ten Potenz genommen wird.
Insgesamt sind also die Voraussetzungen von Lemma (2.9) erfüllt und $f(x)$ somit eine stetige, aber nirgends differenzierbare Funktion. $\square$

(2.11) Bemerkung
Beispiel (2.2)ii) ist genau die lakunäre Folge aus dem Beispiel im ersten Abschnitt dieser Ausarbeitung und die zugehörige lakunäre Fourierreihe hat die Koeffizienten $a_{\lambda(j)} = -b_{\lambda(j)} = (j!)^{-1}/(2i)$. $(j!)^{-1}(j!)^2 = (j!)$ divergiert für j gegen ∞. Auch diese Funktion gehört also zur hier hergeleiteten Klasse. $\diamond$

§3 Der Beweis von Lemma (2.7)

Der noch offene Beweis von Lemma (2.7) erfolgt in mehreren Schritten und enthält einige technische Abschätzungen. Um zu diesen Abschätzungen zu gelangen, führen wir zunächst einen weiteren Kern ein.

(3.1) Definition (Jackson-Kern)
Seien $n \in \mathbb{N}$ und $t \in \mathbb{T}$, dann definiert $L_n(t) = \lambda_n^{-1} K_n(t)^2$ den Jackson-Kern n-ten Grades. Dabei ist $K_n(t)$ der bekannte Fejér-Kern und λ_n eine Normierungskonstante, so dass $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} L_n(t) dt = 1$ erfüllt ist. $\diamond$

Durch seine Verwandtschaft zum Fejér-Kern lassen sich Abschätzungen für den Jackson-Kern herleiten.

(3.2) Korollar
Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gelten:

i) $K_n(t) \leq \frac{\pi^2}{(n+1)t^2}$ für $t \neq 0$

ii) $\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} K_n(t)^2 dt = \sum_{r=-n}^{n} \hat{K}_n(r)^2 > \frac{n}{2}$

iii) $\lambda_n = 1 + \frac{n(2n+1)}{3(n+1)}$

iv) $0 \leq L_n(t) \leq 2\pi^4 n^{-3} t^{-4}$ für $t \neq 0$ $\diamond$

Beweis

i) Zunächst soll gezeigt werden, dass für $t \in [-\pi, \pi]$ die Beziehung $t^2 \leq \pi^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ gilt:

$$\begin{aligned} t^2 \leq \pi^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) &\Leftrightarrow 0 \leq \pi^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right) - t^2 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq \left(\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) - t\right) \underbrace{\left(\pi \sin\left(\frac{t}{2}\right) + t\right)}_{\leq 0,\ t \in [-\pi, 0],\ \geq 0,\ t \in [0,\pi]} \end{aligned}$$

Bleibt zu zeigen, dass $f(t) \equiv \pi \sin(t/2) - t$ für $t \in [-\pi, 0]$ kleiner als 0 und für $t \in [0, \pi]$ größer als 0 ist:
Offenbar gilt $f(-\pi) = f(0) = f(\pi) = 0$ und außerdem

$$f''(t) = -\frac{\pi}{4} \sin\left(\frac{t}{2}\right) \begin{cases} \geq 0 & \text{auf } [-\pi, 0] \\ \leq 0 & \text{auf } [0, \pi] \end{cases}.$$

Daher ist $f(t)$ auf dem Intervall $[-\pi, 0]$ konvex und auf $[0, \pi]$ konkav, also kleiner/größer als die lineare Interpolation der Funktion zwischen den Intervallenden:

$$\begin{aligned} f(t) &\leq \frac{-t}{\pi} f(-\pi) + \frac{\pi + t}{\pi} f(0) = 0 \text{ für } t \in [-\pi, 0] \\ f(t) &\geq \frac{t}{\pi} f(0) + \frac{\pi - t}{\pi} f(\pi) = 0 \text{ für } t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Damit ist die Ungleichung $t^2 \leq \pi^2 \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$ gezeigt.

Für $t \neq 0$ lässt sich diese Ungleichung umschreiben zu $\frac{1}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)} \leq \frac{\pi^2}{t^2}$. Dies setzten wir in den Ausdruck für den Fejér-Kern ein und erhalten abschließend für $t \neq 0$

$$K_n(t) = \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2} t\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2 \leq \frac{1}{(n+1)} \left(\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \right)^2 \leq \frac{1}{n+1} \frac{\pi^2}{t^2}.$$

ii) Sei $n \in \mathbb{N}$, es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(t)^2 dt &= \frac{1}{2\pi}\sum_{r,s=-n}^{n}\int_{\mathbb{T}} \frac{(n+1-|r|)(n+1-|s|)}{(n+1)^2} e^{i(r+s)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{r,s=-n}^{n} \frac{(n+1-|r|)(n+1-|s|)}{(n+1)^2} 2\pi\delta_{r,-s} = \sum_{r=-n}^{n} \hat{K}_n(t)^2\end{aligned}$$

iii) Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}\lambda_n &= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(t)^2 dt = \sum_{r=-n}^{n}\left(\frac{n+1-|r|}{n+1}\right)^2 \\ &= 1 + 2\sum_{r=1}^{n}\left(\frac{n+1-r}{n+1}\right)^2 = 1 + 2\sum_{r=1}^{n} 1 - \frac{2r}{n+1} + \frac{r^2}{(n+1)^2} \\ &= n - \frac{2}{n+1}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{2}{(n+1)^2}\sum_{r=1}^{n} r^2 \\ &\overset{(**)}{=} n - n + \frac{2}{6(n+1)^2}(n(n+1)(2n+1)) = 1 + \frac{n(2n+1)}{3(n+1)}\end{aligned}$$

Der Zusammenhang $(**)$, $\sum_{r=1}^{n} r^2 = 1/6 \cdot n(n+1)(2n+1)$, soll über vollständige Induktion nach n gezeigt werden. Dazu:
I.A.: $n = 1$: $\sum_{r=1}^{1} r^2 = 1 = 1/6 \cdot 1 \cdot (1+1) \cdot (2+1)$
I.V.: Gelte die Behauptung für ein $n \in \mathbb{N}$.
I.S.: $n \to n+1$

$$\begin{aligned}\sum_{r=1}^{n+1} r^2 &= (n+1)^2 + \sum_{r=1}^{n} r^2 \overset{\text{I.V.}}{=} (n+1)^2 + \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{6}(6n+6) + \frac{1}{6}n(2n+1)\right) = \frac{(n+1)}{6}(7n+6+2n^2) \\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(2n+3) = \frac{1}{6}((n+1))((n+1)+1)(2(n+1)+1)\end{aligned}$$

iv) $0 \leq L_n(t)$ ist klar, da λ_n und $K_n(t)$ beide positiv sind. Für $t \neq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \lambda_n^{-1} K_n(t)^2 \leq \frac{n+1}{(n+1)+\frac{1}{3}n(2n+1)} \frac{\pi^4}{(n+1)^2 t^4} \\ &= \frac{\pi^4}{t^4} \frac{1}{(n+1)^2+\frac{1}{3}n(2n+1)(n+1)} \leq \frac{2\pi^4}{n^3 t^4}, \text{ denn} \end{aligned}$$

$$(n+1)^2 + \frac{1}{3}n(2n+1)(n+1) = \frac{2}{3}n^3 + 2n^2 + \frac{7}{3}n + 1 \geq \frac{n^3}{2} \qquad \square$$

Mit diesen Beziehungen soll nun zunächst eine Abschätzung für den 0-ten Fourierkoeffizienten einer Funktion getroffen werden, wenn die nächsten $2n$ Nachbarn dieses Koeffizienten 0 sind, da dies bei den benutzten, lakunären Fourierreihen offenbar der Fall ist.

(3.3) Satz
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, deren Fourierreihe gleichmäßig gegen sie konvergiert und gelte $\hat{f}(r) = 0$ für $0 \neq |r| \leq 2n$. Dann lässt sich der 0-te Fourierkoeffizient von f schreiben als

$$\hat{f}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t) L_n(t) dt. \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $n \in \mathbb{N}$. Offenbar gilt für $L_n(t)$ die Darstellung

$$\begin{aligned} L_n(t) &= \lambda_n^{-1} K_n(t)^2 = \lambda_n^{-1} \sum_{r=-2n}^{2n} l_r e^{irt} \text{ mit} \\ l_r &= \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{n+1-|k|}{n+1} \right) \left(\frac{n+1-|r-k|}{n+1} \right). \end{aligned}$$

Damit lässt sich der 0-te Fourierkoeffizient von f schreiben als:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(t)L_n(t)dt &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{f}(r)e^{irt}\lambda_n^{-1}\sum_{s=-2n}^{2n} l_s e^{ist}dt \\
&\overset{(***)}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-2n}^{2n} \hat{f}(r)\lambda_n^{-1}l_s\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} e^{i(r+s)t}dt \\
&= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\sum_{s=-2n}^{2n} \hat{f}(r)\lambda_n^{-1}l_s\delta_{r,-s} = \sum_{s=-2n}^{2n}\hat{f}(-s)\lambda_n^{-1}l_s \\
&= \hat{f}(0)\lambda_n^{-1}l_0 = \hat{f}(0), \text{ denn}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
l_0 &= \sum_{r=-n}^{n}\left(\frac{n+1-|r|}{n+1}\right)\left(\frac{n+1-|0-r|}{n+1}\right) \\
&= \sum_{r=-n}^{n}\left(\frac{n+1-|r|}{n+1}\right)^2 \overset{\text{vgl. Kor.(3.2)iii)}}{=} \lambda_n
\end{aligned}$$

$(***)$: Die Vertauschung von Summation und Integration ist nach Voraussetzung möglich, da $\sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)\exp(irt)$ gleichmäßig gegen $f(t)$ konvergiert und $\mathbb{T}$ ein Intervall endlicher Länge ist.

□

Damit folgt unmittelbar die Abschätzung

(3.4) Lemma
Für f wie in Satz (3.3) folgt $|\hat{f}(0)| \leq I_1 + I_2 + I_3$ mit

1. $I_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{|t|\leq n^{-1}} |f(t)|L_n(t)dt \leq n^{-1}\sup_{|t|\leq n^{-1}} |t^{-1}f(t)|$,
2. $I_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{n^{-1}<|t|\leq n^{-1/4}} |f(t)|L_n(t)dt \leq 2\pi^3 n^{-1}\sup_{|t|\leq n^{-1/4}} |t^{-1}f(t)|$,
3. $I_3 = \frac{1}{2\pi}\int_{n^{-1/4}<|t|} |f(t)|L_n(t)dt \leq 2\pi^4 n^{-2}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|dt$ ◇

Beweis
Zunächst gilt mit der Dreiecksungleichung:
$|\hat{f}(0)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t)L_n(t)dt\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(t)|L_n(t)dt$
Die Aufteilung dieses Ausdrucks in die drei Summanden ist trivial. Für diese gilt:

1.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|\leq n^{-1}} |f(t)|L_n(t)dt \leq \sup_{|t|\leq n^{-1}} |f(t)| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|t|\leq n^{-1}} L_n(t)dt \\
&\leq \sup_{|t|\leq n^{-1}} |\frac{1}{n^{-1}n} f(t)| \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} L_n(t)dt \\
&\leq \sup_{|t|\leq n^{-1}} |\frac{1}{tn} f(t)| = n^{-1} \sup_{|t|\leq n^{-1}} |t^{-1}f(t)|
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{n^{-1}<|t|\leq n^{-1/4}} |f(t)|L_n(t)dt \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{n^{-1}<|t|\leq n^{-1/4}} |f(t)|2\pi^4 n^{-3}|t|^{-4}dt \\
&\leq \pi^3 n^{-3} \sup_{n^{-1}<|t|\leq n^{-1/4}} |t^{-1}f(t)| \int\limits_{n^{-1}<|t|\leq n^{-1/4}} |t|^{-3}dt \\
&\leq 2\pi^3 n^{-3} \sup_{|t|\leq n^{-1/4}} |t^{-1}f(t)| \left(-\frac{1}{2}|t|^{-2}\right)_{n^{-1}}^{n^{-1/4}} \leq 2\pi^3 n^{-3} \sup_{|t|\leq n^{-1/4}} |t^{-1}f(t)|n^2 \\
&= 2\pi^3 n^{-1} \sup_{|t|\leq n^{-1/4}} |t^{-1}f(t)|
\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}
I_3 &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{n^{-1/4}<|t|} |f(t)|L_n(t)dt \leq 2\pi^4 n^{-3} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{n^{-1/4}<|t|} |f(t)|t^{-4}dt \\
&\leq 2\pi^4 n^{-3} \sup_{n^{-1/4}<|t|} t^{-4} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{n^{-1/4}<|t|} |f(t)|dt \\
&\leq 2\pi^4 n^{-3} \left(n^{-1/4}\right)^{-4} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|dt = 2\pi^4 n^{-2} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|dt \qquad \square
\end{aligned}$$

Diese Abschätzungen führen schließlich zu folgendem

(3.5) Korollar
Für f wie in Satz (3.3) gilt die Abschätzung

$$|\hat{f}(0)| \leq 2\pi^4 \left(n^{-1} \sup_{|t|\leq n^{-1/4}} |t^{-1}f(t)| + \frac{n^{-2}}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} |f(t)|dt \right). \qquad \diamond$$

Beweis
Für $n^{-1}\sup_{|t|\le n^{-1/4}}|t^{-1}f(t)| = \infty$ ist die Abschätzung trivialerweise erfüllt. Sei deshalb $n^{-1}\sup_{|t|\le n^{-1/4}}|t^{-1}f(t)| < \infty$.
Mit den Abschätzungen aus (3.4) folgt:

$$\begin{aligned}
|\hat{f}(0)| &\le n^{-1}\sup_{|t|<n^{-1}}|t^{-1}f(t)| + 2\pi^3 n^{-1}\sup_{|t|<n^{-1/4}}|t^{-1}f(t)| + 2\pi^4 n^{-2}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|dt \\
&\le n^{-1}\sup_{|t|<n^{-1/4}}|t^{-1}f(t)| + 2\pi^3 n^{-1}\sup_{|t|<n^{-1/4}}|t^{-1}f(t)| + 2\pi^4 n^{-2}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|dt \\
&= (1+2\pi^3)n^{-1}\sup_{|t|<n^{-1/4}}|t^{-1}f(t)| + 2\pi^4 n^{-2}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|dt \\
&\le 2\pi^4\left(n^{-1}\sup_{|t|\le n^{-1/4}}|t^{-1}f(t)| + \frac{n^{-2}}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|f(t)|dt\right) \qquad \square
\end{aligned}$$

Damit können wir schließlich Lemma (2.7) beweisen, das wir hier nochmals aufführen wollen:

(3.6) Lemma
Sei $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, deren Fourierreihe gleichmäßig gegen sie konvergiert und $n \in \mathbb{N}$. Ist $\hat{g}(r) = 0$ für $0 \ne |r-m| < 2n$, so gilt für den m-ten Fourierkoeffizienten:

$$|\hat{g}(m)| \le 2\pi^4\left(n^{-1}\sup_{|t|\le n^{-1/4}}|t^{-1}g(t)| + \frac{n^{-2}}{2\pi}\int_{\mathbb{T}}|g(t)|dt\right). \qquad \diamond$$

Beweis
Seien $m,n \in \mathbb{N}$, so dass $\hat{g}(r) = 0$ für alle $r \in \mathbb{N}$ mit $0 \ne |r-m| \le 2n$ erfüllt ist. Dann definiere $f(t) = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)e^{irt}$ mit $\hat{f}(r) := \hat{g}(r+m)$. Offenbar gilt nach Konstruktion $\hat{f}(r) = 0$ für $0 \ne |r| \le 2n$. Weiterhin gilt:

$$\begin{aligned}
f(t) &= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)e^{irt} = \sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{g}(r+m)e^{irt} \\
&= \sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{g}(r+m)e^{i(r+m)t}e^{-imt} = g(t)e^{-imt}
\end{aligned}$$

Wegen der Stetigkeit von g ist also auch f stetig und $\sum_{r=-\infty}^{\infty}\hat{f}(r)e^{irt}$ konvergiert wegen $|f(t)| = |g(t)|$ auch gleichmäßig gegen f.

Korollar (3.5) ist also anwendbar und liefert:

$$\begin{aligned} |\hat{g}(m)| = |\hat{f}(0)| &\leq 2\pi^4 \left(n^{-1} \sup_{|t| \leq n^{-1/4}} |t^{-1} f(t)| + \frac{n^{-2}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |f(t)| dt \right) \\ &= 2\pi^4 \left(n^{-1} \sup_{|t| \leq n^{-1/4}} |t^{-1} g(t)| + \frac{n^{-2}}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} |g(t)| dt \right) \end{aligned}$$

□

Literatur

[1] T. W. Körner, *Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1988

[2] T. W. Körner, *Exercises in Fourier Analysis*, Cambridge University Press, 1993

[3] T. Reimes, *Konvergenz von Fourier-Reihen*, Seminar zur Fourieranalysis, RWTH-Aachen, WS0708

[4] A. Krieg, *Analysis I*, RWTH-Aachen, WS0304

[5] A. Krieg, *Analysis II*, RWTH-Aachen, SS04