Weierstraß'scher Approximationssatz

Vortrag zum Seminar zur Fourieranalysis, 06.11.2007

Andrea Klinkenberg

In dem ersten Teil des Vortrags wird sich bei der Untersuchung von beliebig oft differenzierbaren Funktionen herausstellen, dass nicht jede dieser Funktionen in der Umgebung eines gegebenen Punktes durch eine Taylor-Reihe dargestellt werden kann. Der Weierstraß'sche Approximationssatz zeigt jedoch, dass stetige Funktionen in einem beliebigen kompakten Intervall durch ein Polynom beliebig gut approximiert werden können. Mit diesem Satz wird sich der zweite Teil des Vortrags beschäftigen.

§1 Taylorreihendarstellung

— *Einleitung* —

In diesem Abschnitt geht es darum, zu untersuchen, ob jede beliebig oft differenzierbare Funktion f als Taylor-Reihe dargestellt werden kann. Motiviert wird diese Untersuchung z.B. durch die Darstellung der Exponentialfunktion.
Zuvor wird jedoch noch einiges Wichtige zu der aus Analysis I bereits bekannten Taylor-Reihe aufgeführt.

(1.1) Satz (Taylor'sche Formel mit Restglied)
Seien I ein Intervall, $n \in \mathbb{N}, f \in C^{(n)}(I)$ und $a \in I$. Dann gibt es eine Funktion $R_{n,a} : I \to \mathbb{R}$, so dass

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_{n,a}(x),\ x \in I.$$

Zu jedem $x \in I, x \neq a$, existiert ein $\zeta = \zeta_{a,x}$ echt zwischen a und x, so dass

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n)}(\zeta)}{n!}(x-a)^n.$$

Man nennt

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

das $(n-1)$te Taylorpolynom von f zum Entwicklungspunkt a. $\diamond$

(1.2) Definition (Taylor-Reihe)
Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$ und $f \in C^\infty(I)$. Dann heißt

$$T_{f,a}(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

die TAYLOR-Reihe von f mit Entwicklungspunkt a. $\diamond$

(1.3) Bemerkung

1. Der Konvergenzradius der Taylor-Reihe ist nicht notwendig > 0.
2. Falls die Taylor-Reihe konvergiert, konvergiert sie nicht notwendig gegen $f(x)$.
3. Die Taylor-Reihe konvergiert genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, für die das Restglied $R_{n,a}(x) \to 0$ für $n \to \infty$.
4. Falls $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine analytische Funktion ist, kann f in einem beliebigen Intervall um einen beliebigen Punkt durch eine Potenzreihe dargestellt werden. $\diamond$

Nun zu einem Beispiel:

(1.4) Beispiel
Die Exponentialfunktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$f(x) = e^x$$

besitzt die Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = e^x.$$

Ausgewertet an der Stelle $x = 0$ ergibt sich

$$f(0) = f'(0) = ... = f^{(n)}(0) = 1.$$

Damit ergibt sich als Entwicklung

$$f(x) = e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ...$$

Demzufolge hat die Taylor-Reihe der Exponentialfunktion die Form

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}.$$

$\diamond$

Es wird sich jedoch herausstellen, dass dies nicht immer möglich ist.

— *Gegenbeispiel zur Talyorreihenentwicklung* —

Um ein Gegenbeispiel zu konstruieren, wird zunächst folgendes Lemma gezeigt:

(1.5) Lemma
Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \forall\ |x| < \epsilon \quad (\epsilon > 0 \text{ fest})$$

eine Potenzreihe von f mit Entwicklungspunkt 0. Dann sind die Koeffizienten a_n durch f eindeutig bestimmt:

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},\ n \geq 0.$$

Damit ist die Potenzreihe die Taylor-Reihe von f. ◇

Beweis
Nach Definition ist

$$\sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R \geq \epsilon$. Deshalb kann in diesem Konvergenzradius gliedweise differenziert werden (nach Analysis I). Aufgrund dessen kann nun $f^{(n)}(0)$ einfach ausgerechnet werden.
Dazu:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \\
f'(x) &= \sum_{r=1}^{\infty} a_r r x^{r-1} \\
f''(x) &= \sum_{r=2}^{\infty} a_r r(r-1) x^{r-2} \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
&\ \ . \\
f^{(n)}(x) &= \sum_{r=n}^{\infty} a_r r(r-1)...(r-n+1) x^{r-n} \ \forall\ |x| < \epsilon
\end{aligned}$$

Setzt man nun $x = 0$ in $f^{(n)}(x)$ ein, so erhält man

$$f^{(n)}(0) = \sum_{r=n}^{\infty} a_r r(r-1)...(r-n+1)0^{r-n} \ \forall\ |x| < \epsilon$$

Es gibt jedoch nur einen Exponenten w, bei dem der Ausdruck 0^w nicht Null ist. Das ist der Exponent $w = 0$. Demnach fallen alle Summanden weg, für die $(r-n)$ nicht 0 ist. Es verbleibt also lediglich der Summand mit $r = n$. Insgesamt erhält man daher den Ausdruck

$$f^{(n)}(0) = a_n \cdot n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0^0$$

$$\Longrightarrow f^{(n)}(0) = a_n n! \iff a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \qquad \square$$

Nun kann das Gegenbeispiel konstruiert werden:

(1.6) Beispiel
Definiere

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & ,\ x \neq 0 \\ 0 & ,\ x = 0 \end{cases}$$

Behauptung: Diese Funktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar, lässt sich aber für kein $\epsilon > 0$ in eine Form wie in Lemma 1.5 bringen, also

$$h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \ \ \forall\ |x| < \epsilon. \qquad \diamond$$

Beweis
1. Schritt:

Zu zeigen: h ist beliebig oft differenzierbar für $x \neq 0$ und $h^{(r)}(x) = Q_r(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$, wobei Q_r ein Polynom ist.
Dies wird nun per Induktion über r bewiesen:
(IA): $r = 0$: $h^{(0)}(x) = Q_0(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ ist wahr mit $Q_0(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$.
(IV): Die Behauptung gelte für alle $n \leq r$.
(IS): $r \to r+1$.

Nach Induktionsvoraussetzung ist $h^{(r)}(x) = Q_r(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$. Dies ist differenzierbar, da die Exponentialfunktion differenzierbar ist, Polynome differenzierbar sind, die

Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x \neq 0$ differenzierbar sowie das Produkt und die Verkettung differenzierbarer Funktionen ist differenzierbar.

$$\begin{aligned}
h^{(r+1)}(x) &= (h^{(r)})' \\
&= (Q_r(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}})' \\
&= -\frac{1}{x^2}Q_r'(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} + 2\frac{1}{x^3}Q_r(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} \\
&= e^{-\frac{1}{x^2}}(-\frac{1}{x^2}Q_r'(\frac{1}{x}) + 2\frac{1}{x^3}Q_r(\frac{1}{x})) \\
&= Q_{r+1}(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}, \text{ mit } Q_{r+1}(t) = -t^2Q_r'(t) + 2t^3Q_r(t),\ t \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

Da Q_{r+1} ein Polynom ist, gilt die Behauptung für $r+1$.
Mit dem Induktionsprinzip gilt die Behauptung für alle $r \in \mathbb{N}$ und damit ist h beliebig oft differenzierbar für $x \neq 0$.

2. Schritt:
Zu zeigen: h ist beliebig oft differenzierbar in 0 mit $h^{(r)}(0) = 0$.
Dies wird nun per Induktion über r bewiesen:
(IA): $r = 0$: $h^{(0)}(0) = 0$ ist wahr nach Definition.
(IV): Die Behauptung gelte für alle $n \leq r$.
(IS): $r \to r+1$

$$\begin{aligned}
\frac{h^{(r)}(x) - h^{(r)}(0)}{x - 0} &\overset{\substack{\text{Schritt 1}\\ + \text{(IV)}}}{=} \frac{Q_r(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} \\
&= \frac{1}{x}Q_r(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} \longrightarrow 0, \text{ für } x \to 0
\end{aligned}$$

Da $\frac{1}{x^2} \to \infty$, für $x \to 0$, $e^{-x} \to 0$ für $x \to \infty$ und sich das Wachstum der Exponentialfunktion gegenüber dem Wachstum jedes Polynoms durchsetzt, geht $\frac{1}{x}Q_r(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}} \to 0$ für $x \to 0$. Damit gilt die Behauptung für $r+1$.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung für alle $r \in \mathbb{N}$ und damit ist h beliebig oft differenzierbar für $x = 0$.

Aus 1 und 2 folgt, dass $h(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ beliebig oft differenzierbar ist.

3. Schritt:
Angenommen

$$h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r \quad \forall\ |x| < \epsilon \ (\epsilon > 0 \text{ fest}).$$

Dann ist nach Lemma 1.5

$$a_r = \frac{h^{(r)}(0)}{r!} \overset{Schritt\ 2}{=} 0$$

und demzufolge

$$h(x) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} 0 \cdot x^r = 0 \;\; \forall\, |x| < \epsilon.$$

Dies ist aber ein Widerspruch zu

$$h(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \overset{Def}{\neq} 0 \;\; \forall\, x \neq 0.$$ □

Also ist es nicht immer möglich eine beliebig oft differenzierbare Funktion als Taylor-Reihe in der Umgebung eines bestimmten gegebenen Punktes darzustellen.

§2 Weierstraß'scher Approximationssatz

— *Satz von Weierstraß* —

Wie in Abschnitt 1 gezeigt, lässt sich nicht jede beliebig oft differenzierbare Funktion als Taylor-Reihe darstellen. Weierstraß zeigte jedoch folgendes Theorem, welches in der Praxis oft als Ersatz dienen kann, um stetige Funktionen in beliebigen kompakten Intervallen darzustellen.

(2.1) Satz (Weierstraß)
Sei $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein Polynom P mit:

$$\sup_{t \in [a,b]} |P(t) - f(t)| < \epsilon.$$ ◇

Um diesen Satz zu zeigen, wird dieser erstmal auf eine einfachere Aussage zurückgeführt, welche anschließend bewiesen wird.

— *Reduktion auf einfachere Aussage* —

(2.2) Satz
Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein Polynom P mit:

$$\sup_{t \in [0,1]} |P(t) - f(t)| < \epsilon.$$ ◇

Beweis (Satz 2.1 folgt aus Satz 2.2)
Sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\epsilon > 0$. Definiere

$$g : [0,1] \to \mathbb{C}$$

mit

$$g(s) = f(a + s(b-a)). \tag{1}$$

g ist stetig und nach Satz 2.2 gibt es ein Polynom Q mit

$$\sup_{s\in[0,1]} |Q(s) - g(s)| < \epsilon. \tag{2}$$

Setze

$$P(t) = Q(\frac{t-a}{b-a}). \tag{3}$$

Dann ist P ein Polynom und

$$\begin{aligned} \sup_{t\in[a,b]} |f(t) - P(t)| &= \sup_{s\in[0,1]} |f(a+s(b-a)) - P(a+s(b-a))| \\ &\overset{(1),(3)}{=} \sup_{s\in[0,1]} |g(s) - Q(s)| \overset{(2)}{<} \epsilon \end{aligned}$$

□

Der Satz von Weierstraß wird nun auf zwei verschiedene Arten bewiesen.

— *1. Beweis* —

Um diesen Beweis zu zeigen benötigen wir folgenden bereits bekannten Satz, der hier nochmal aufgeführt wird:

(2.3) Satz
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\epsilon > 0$. Dann gibt es ein trigonometrisches Polynom P mit:

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |P(t) - f(t)| \leq \epsilon.$$

◇

Beweis (Satz 2.2)
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und sei $\epsilon > 0$. Definiere

$$g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$$

mit

$$g(t) = f(|t|), |t| \leq 1, \tag{4}$$

$$g(t) = f(1), |t| > 1. \tag{5}$$

g ist stetig.
Nach Satz 2.3 gibt es für ein $n \geq 1$ ein trigonomestrisches Polynom $P(t) = \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt}$ so, dass:

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |g(t) - \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt}| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{6}$$

In den Intervallgrenzen [-R,R] konvergiert

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(is)^k}{k!}$$

gleichmäßig gegen $e^{(is)}$ für $m \to \infty$.
Für jedes $-n \leq r \leq n$ gibt es daher ein $m(r)$ so, dass gilt:

$$|\sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - e^{irt}| \leq \frac{\epsilon}{(4n+2)|a_r|+1} \; \forall |t| \leq 1, \; m(t) \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Setze

$$P(t) = \sum_{r=-n}^{n} a_r \sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!}. \tag{8}$$

P ist ein Polynom und

$$\begin{aligned}
\sup_{t\in[0,1]} |P(t) - f(t)| &\overset{(4)}{=} \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - g(t)| \\
&= \sup_{t\in[0,1]} |P(t) - \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} + \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} - g(t)| \\
&\overset{(\triangle\text{-Ungl})}{\leq} \sup_{t\in[0,1]} (|P(t) - \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt}| + |\sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} - g(t)|) \\
&\overset{(8)}{=} \sup_{t\in[0,1]} (|\sum_{r=-n}^{n} a_r \sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt}| + |\sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} - g(t)|) \\
&= \sup_{t\in[0,1]} (|\sum_{r=-n}^{n} a_r (\sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - e^{irt})| + |\sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} - g(t)|) \\
&\overset{(\triangle\text{-Ungl})}{\leq} \sup_{t\in[0,1]} (\sum_{r=-n}^{n} |a_r (\sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - e^{irt})| + |\sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} - g(t)|) \\
&= \sup_{t\in[0,1]} (\sum_{r=-n}^{n} |a_r| |\sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - e^{irt}| + |\sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} - g(t)|) \\
&\overset{(6)}{<} \sup_{t\in[0,1]} (\sum_{r=-n}^{n} |a_r| |\sum_{k=0}^{m(r)} \frac{(irt)^k}{k!} - e^{irt}|) + \frac{\epsilon}{2} \\
&\overset{(7)}{\leq} \sum_{r=-n}^{n} |a_r| |\frac{\epsilon}{(4n+2)|a_r| + 1}| + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \sum_{r=-n}^{n} |\frac{a_r \epsilon}{(4n+2)|a_r| + 1}| + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \sum_{r=-n}^{n} |\frac{\epsilon}{(4n+2)}| + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \sum_{r=-n}^{n} \frac{\epsilon}{(4n+2)} + \frac{\epsilon}{2}, \text{ da } n \geq 1,\ \epsilon > 0 \\
&= \frac{(2n+1)\epsilon}{(4n+2)} + \frac{\epsilon}{2} \\
&= \frac{(4n\epsilon + 2\epsilon + 4n\epsilon + 2\epsilon)}{(8n+4)} \\
&= \frac{\epsilon(8n+4)}{(8n+4)} = \epsilon
\end{aligned}$$

□

— *2. Beweis* —

Für den 2. Beweis werden zunächst zwei Lemmata eingeführt.

(2.4) Lemma
Sei

$$f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$$

eine stetige Funktion und

$$f(t) = f(-t) \text{ für alle } t \in \mathbb{T}.$$

Für alle $\epsilon > 0$ existiert $n \geq 1$ und $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ so, dass

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t) - \sum_{r=0}^{n} a_r cos(rt)| < \epsilon.$$

◇

Beweis
Zuerst wird gezeigt, dass für den Fourierkoeffizienten gilt:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(r) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-irt} dt \\
&\overset{\text{(Periodizität)}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-irt} dt \\
&\overset{\text{(f(t)=f(-t))}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(-t) e^{-irt} dt \\
&\overset{\text{(sub.: s=-t)}}{=} -\frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} f(s) e^{irs} ds \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{irs} ds \\
&= \hat{f}(-r)
\end{aligned}$$

Demnach gilt:

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,t) &= \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1}\hat{f}(r)e^{irt}, \text{ (s. Körner Lemma (1.4))} \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{r=-n}^{-1} \frac{n+1-|r|}{n+1}\hat{f}(r)e^{irt} + \sum_{r=1}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1}\hat{f}(r)e^{irt} \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{r=1}^{n} \frac{n+1-r}{n+1}\hat{f}(r)e^{-irt} + \sum_{r=1}^{n} \frac{n+1-r}{n+1}\hat{f}(r)e^{irt}, \text{ da } \hat{f}(r) = \hat{f}(-r) \\
&= \hat{f}(0) + \sum_{r=1}^{n} 2\frac{n+1-r}{n+1}\hat{f}(r)cos(rt), \text{ da } cos(z) = \frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}) \\
&= \sum_{r=0}^{n} a_r cos(rt) \text{ mit}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_0 &= \hat{f}(0) \\
a_i &= 2\frac{n+1-i}{n+1}\hat{f}(i) \text{ für alle } i > 0
\end{aligned}$$

Da $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ nach Definition eine stetige Funktion ist, konvergiert $\sigma_n(f,t)$ gleichmäßig gegen $f(t)$ für $n \to \infty$ (s. Körner Lemma (2.3(ii)). □

(2.5) Lemma
Es gibt ein relles Polynom T_n vom Grad n mit führendem Koeffizienten 1, wenn $n = 0$ und führendem Koeffizienten 2^{n-1}, wenn $n \geq 1$, so dass gilt:

$$cos(n\theta) = T_n(cos(\theta)), [\theta \in \mathbb{T}]. \qquad \diamond$$

Beweis
Dies wird nun per Induktion über n bewiesen:
(IA)
Für n=0:

$$cos(0) = 1 = T_0(cos(\theta)),\ T_0(t) = 1\ \forall t \in \mathbb{R}$$

Für n=1:

$$cos(\theta) = T_1(cos(\theta)),\ T_1(t) = t\ \forall t \in \mathbb{R}$$

(IV) Für alle $n < m$ gelte $cos(n\theta) = T_n(cos(\theta)), [\theta \in \mathbb{T}],\ m \geq 2$.
(IS) Für $m = n$:

$$\begin{aligned}
cos(m\theta) &= cos(m\theta) + cos((m-2)\theta) - cos((m-2)\theta) \\
&= cos(m\theta + \theta - \theta) + cos(m\theta - 2\theta + \theta - \theta) - cos((m-2)\theta) \\
&= cos((m-1)\theta + \theta) + cos((m-1)\theta - \theta) - cos((m-2)\theta) \\
&\overset{(*)}{=} 2cos(\frac{(m-1)\theta + \theta + (m-1)\theta - \theta}{2})cos(\frac{(m-1)\theta + \theta - (m-1)\theta + \theta}{2}) - cos((m-2)\theta) \\
&= 2 \cdot cos((m-1)\theta) \cdot cos(\theta) - cos((m-2)\theta) \\
&\overset{(IV)}{=} 2 \cdot T_{m-1}(cos(\theta)) \cdot cos(\theta) - T_{m-2}(cos(\theta)) \\
&= T_m(cos(\theta)),\ \text{mit } T_m(t) = 2tT_{m-1}(t) - T_{m-2}(t)
\end{aligned}$$

(*) $cos(\alpha) + cos(\beta) = 2cos(\frac{\alpha+\beta}{2})cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$
Der führende Koeffizient stimmt, da $T_{m-1}(t)$ den führenden Koeffizienten 2^{m-2} hat und t Grad $m-1$. Durch multiplizieren mit $2t$ hat das Polynom T_m den Grad m und den führenden Koeffizienten 2^{m-1}. Damit gilt die Behauptung für $n = m$.
Mit dem Induktionsprinzip folgt die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$. □

Beweis (Satz 2.2)
Sei $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\epsilon > 0$. Definiere

$$g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$$

mit

$$g(t) = f(|cos(t)|) \text{ für alle } t \in \mathbb{T}. \tag{9}$$

g ist stetig und $g(t) = g(-t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$.
Dies gilt, denn:

1. g ist wohldefiniert.

   Beweis
   $0 \leq |cos(t)| \leq 1\ \forall t \in \mathbb{R}$
   $\Rightarrow g(t) = f(|cos(t)|)$

   $g(t + 2\pi k) = f(|cos(t + 2\pi k)|) = f(|cos(t)|) = g(t)$
   $\Rightarrow g$ ist 2π-periodisch
   $\Rightarrow g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ □

2. g ist stetig.

   Beweis
   klar, da f und $|cos(t)|$ stetig sind $\rightarrow$ Verkettung ist stetig. $\square$

3. $g(t) = g(-t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$.

   Beweis
   $g(-t) = f(|cos(-t)|) = f(|cos(t)|) = g(t)$ $\square$

Nach Lemma 2.4 gibt es ein $n \geq 1$ und $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |g(t) - \sum_{r=0}^{n} a_r cos(rt)| < \epsilon. \tag{10}$$

Da nach Lemma 2.5 Polynome $T_i, i \leq i \leq n$ existieren, so dass

$$\begin{aligned} g(t) - \sum_{r=0}^{n} a_r cos(rt) &= g(t) - \sum_{r=0}^{n} a_r T_r(cos(t)) \ \forall t \in \mathbb{T} \quad (11) \\ &= f(|cos(t)|) - \sum_{r=0}^{n} a_r T_r(cos(t)) \ \forall t \in \mathbb{T} \quad (12) \end{aligned}$$

gilt

$$\begin{aligned} \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - P(x)| &= \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - \sum_{r=0}^{n} a_r T_r(x)| \text{ mit } P(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r T_r(x) \text{ (nach}(**)) \\ &\leq \sup_{0\leq t\leq\pi} |f(|cos(t)|) - \sum_{r=0}^{n} a_r T_r(cos(t))| \\ &\overset{(9)}{=} \sup_{0\leq t\leq\pi} |g(t) - \sum_{r=0}^{n} a_r T_r(cos(t))| \\ &\overset{(11)}{=} \sup_{0\leq t\leq\pi} |g(t) - \sum_{r=0}^{n} a_r cos(rt)| \\ &\leq \sup_{t\in\mathbb{T}} |g(t) - \sum_{r=0}^{n} a_r cos(rt)| \overset{(10)}{<} \epsilon \end{aligned}$$

(**) $P(x) = \sum_{r=0}^{n} a_r^{'} x^r = \sum_{r=0}^{n} a_r T_r(x)$ mit

$$\begin{aligned} a_n^{'} &= a_n \cdot 2^{n-1} = a_n \cdot b_{n,1} \\ a_{n-1}^{'} &= a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + a_n \cdot b_{n,2} = a_{n-1} \cdot b_{n-1,1} + a_n \cdot b_{n,2} \\ a_i^{'} &= \sum_{l=i}^{n} a_i \cdot b_{l,l-i+1} \\ T_i(x) &= \sum_{k=0}^{i} b_{i,i-k} x^k,\ b_{i,1} = 2^{i-1} \end{aligned}$$

□

— *Äquivalenzen* —

Es wurde also Satz 2.2 über das Lemma 2.4 bewiesen. Dass dies auch umgekehrt möglich ist, dass man Lemma 2.4 also über Satz 2.2 beweisen kann, wird nun in dem folgenden Beweis gezeigt:

Beweis
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, $f(t) = f(-t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und $\epsilon > 0$.
Zu $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetig betrachte $g : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit

$$g(t) = f(arccos(t)),$$

dabei $arccos : [0,1] \to [0,\pi]$.
g ist stetig, da f und $arccos$ stetig sind.
Nach Satz 2.2 gibt es also ein Polynom P mit

$$\sup_{t \in [0,1]} |P(t) - g(t)| < \epsilon$$

Falls f zusätzlich $f(t) = f(-t)$ erfüllt, so gilt

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t) - P(cos(t))| \ < \ \epsilon$$

Das ist klar nach Konstruktion von P, was für $t \in [0,\pi]$ klar ist und es folgt für $t \in [-\pi, 0]$ aus

$$\sup_{t \in \mathbb{T}} |f(t) - P(cos(t))| \overset{(f \text{ und } cos \text{ gerade})}{=} \sup_{t \in \mathbb{T}} |f(-t) - P(cos(-t))| < \epsilon.$$

Schließlich ist

$$P(cos(t)) = \sum_{r=0}^{n} a_r cos(t)^r.$$

Bleibt nun noch folgendes zu zeigen:

$$cos(t)^r = \sum_{l=0}^{r} b_l cos(lt) \tag{13}$$

mit geeigneten Koeffizienten b_l. □

Beweis (zu (13))
Mit den Potenzen von Winkelfunktionen

$$cos(x)^n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} cos((n-2k)x) \tag{14}$$

folgt

$$\begin{aligned} P(cos(t)) &= \sum_{r=0}^{n} a_r (cos(t))^r \\ &\overset{(14)}{=} \sum_{r=0}^{n} a_r [\frac{1}{2^r} \sum_{k=0}^{r} \binom{r}{k} cos((r-2k)t]. \end{aligned}$$

Also existiert b_l, $l \in \mathbb{N}_0$ so, dass

$$P(cos(t)) = \sum_{l=0}^{n} b_l (cos(lt)).$$

□

Somit wurde die Äquivalenz zwischen Satz 2.2 und Lemma 2.4 bewiesen. Eine weitere Äquivalenz, die man zeigen kann, ist die zwischen Lemma 2.4 und Satz 2.3.

Beweis (Lemma 2.4 ⇒ Satz 2.3)
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\epsilon > 0$. Definiere

$$g_1 : \mathbb{T} \to \mathbb{C},\ g_1(t) = \begin{cases} f(t) & , 0 \le t \le \pi \\ f(-t) & , -\pi \le t \le 0. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass g_1 stetig ist, 2π-periodisch und $g_1(t) = g_1(-t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Des Weiteren definiere

$$g_2 : \mathbb{T} \to \mathbb{C},\ g_2(t) = \begin{cases} f(t) & , -\pi \le t \le 0 \\ f(-t) & , 0 \le t \le \pi. \end{cases}$$

Daraus folgt, dass g_2 stetig ist, 2π-periodisch und $g_2(t) = g_2(-t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$. Nach Satz 2.4 existiert ein Polynom P mit

$$P(t) := \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}(a_r + b_r)cos(rt)$$

sowie $a_1, ..., a_n$ und $b_1, ..., b_n \in \mathbb{C}$ mit

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |g_1(t) - \sum_{r=0}^{n} a_r cos(rt)| \quad < \quad \epsilon \text{ und} \tag{15}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |g_2(t) - \sum_{r=0}^{n} b_r cos(rt)| \quad < \quad \epsilon. \tag{16}$$

Da

$$f(t) \quad = \quad \frac{1}{2}(g_1(t) + g_2(-t)) \text{ für alle } t \in [0, \pi] \text{ und} \tag{17}$$

$$f(t) \quad = \quad \frac{1}{2}(g_1(-t) + g_2(t)) \text{ für alle } t \in [-\pi, 0]. \tag{18}$$

ist

$$\begin{aligned}
& \sup_{t\in[-\pi,0]} |f(t) - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}(a_r + b_r)cos(rt)| \\
\overset{(18)}{=} \quad & \sup_{t\in[-\pi,0]} |\frac{1}{2}(g_1(-t) + g_2(t)) - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n} a_r cos(-rt) - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n} b_r cos(rt)| \\
\overset{(\triangle\text{-Ungl})}{\le} \quad & \frac{1}{2}\sup_{t\in[-\pi,0]} |g_1(-t) - \sum_{r=0}^{n} a_r cos(-rt)| + \frac{1}{2}\sup_{t\in[-\pi,0]} |g_2(t) - \sum_{r=0}^{n} b_r cos(rt)| \\
\overset{(15)(16)}{<} \quad & \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich folgendes für:

$$\begin{aligned}
&\sup_{t\in[0,\pi]} |f(t) - \frac{1}{2}\sum_{r=0}^{n}(a_r + b_r)cos(rt)| \\
\overset{(17)}{=} \quad &\sup_{t\in[0,\pi]} |\frac{1}{2}(g_1(t) + g_2(-t)) - \frac{1}{2}(\sum_{r=0}^{n} a_r cos(rt) - \sum_{r=0}^{n} b_r cos(-rt))| \\
\overset{(\triangle\text{-Ungl})}{\leq} \quad &\frac{1}{2}\sup_{t\in[0,\pi]} |g_1(t) - \sum_{r=0}^{n} a_r cos(rt)| + \frac{1}{2}\sup_{t\in[0,\pi]} |g_2(-t) - \sum_{r=0}^{n} b_r cos(-rt)| \\
\overset{(15)(16)}{<} \quad &\frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

□

Nun zur Rückrichtung:

Beweis (Satz 2.3 ⇒ Lemma 2.4)
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, $f(t) = f(-t)$ für alle $t \in \mathbb{T}$ und $\epsilon > 0$.
Da $f(t) = f(-t)$ muss auch $P(t) = P(-t)$ gelten.
Nach Satz 2.3 existiert ein trigonometrisches Polynom P mit

$$\begin{aligned}
P(t) &= \sum_{r=-n}^{n} a_r e^{irt} = \sum_{r=-n}^{n} a_r(cos(rt) + isin(rt)) \text{ und} \\
P(-t) &= \sum_{r=-n}^{n} a_r(cos(rt) + isin(rt)) \neq P(t), \text{ wenn } sin(rt) \neq 0.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass

$$P(t) = \sum_{r=-n}^{n} a_r cos(rt) = \sum_{r=0}^{n} b_r cos(rt) \text{ mit}$$

$$b_0 := a_0 \text{ und } b_i := 2a_i \text{ für alle } 1 \leq i \leq n.$$

Also ist

$$\sup_{t\in\mathbb{T}} |P(t) - f(t)| = \sup_{t\in\mathbb{T}} |\sum_{r=0}^{n} b_r cos(rt) - f(t)| < \epsilon.$$

□

Da Satz 2.2 eine Reduktion von Satz 2.1 ist und gezeigt worden ist, dass Lemma 2.4 äquivalent ist zu Satz 2.3 sowie Satz 2.2 zu Lemma 2.4, ist auch Satz 2.3 äquivalent zu Satz 2.1, d.h. also, dass die stetigen Funktionen $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ genauso gut durch Polynome approximiert werden können wie die stetigen Funktionen $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ durch trigonometrische Polynome.

Literatur

[1] Körner, T.: Fourier Analysis, Cambridge 1990.

[2] Krieg, A.: Analysis I, Aachen 2005.