RWTH Aachen
Lehrstuhl A für Mathematik

„Komplexe Differenzierbarkeit und das Dirichlet-Problem"

Schriftliche Ausarbeitung
im Rahmen des Seminars zur Fourieranalysis

Betreuer:
Prof. Dr. H. Führ
Dipl.-Gyml. L. Nöthen

von
Fabian Metzger
259349

Aachen, 4. Dezember 2007

Inhaltsverzeichnis

Komplexe Differenzierbarkeit und das Dirichlet-Problem

Vortrag zum Seminar Fourieranalysis, 4. Dezember 2007

Fabian Metzger

§ 1 Problemstellung

In diesem Vortrag soll es darum gehen, dass so genannte Dirichlet-Problem im zweidimensionalen Fall für eine Scheibe zu lösen. Hierunter versteht man die Lösung der Laplace-Gleichung $\nabla^2\phi = 0$ in einem offenen Gebiet Ω, mit der Bedingung, dass $\phi = G$ auf dem Rand $\partial\Omega$ gelten soll, wobei G eine stetige Funktion ist. Zur Lösung des Problems, wollen wir die gewonnenen Erkenntnisse des letzten Vortrages nutzen. Spezifizieren wir also zunächst unser

(1.1) Problem. (Dirichlet-Problem für eine Scheibe)
Sei

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}, \qquad \overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

und

$$\partial D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Angenommen die Funktion $G : \partial D \to \mathbb{R}$ ist stetig. Können wir dann ein $\phi : \overline{D} \to \mathbb{R}$ finden, so dass

a) ϕ_{xx} und ϕ_{yy} mit $\phi_{xx} + \phi_{yy} = 0$ auf ganz D existieren,

b) ϕ stetig ist für alle Punkte von $\overline{D}$ und

c) $\phi = G$ auf dem Rand ∂D gilt? ◇

Bevor wir uns allerdings mit diesem speziellen Problem auseinander setzen, wollen wir in Kapitel §2 noch einige allgemeine Definitionen und Sätze zur komplexen Differenzierbarkeit betrachten. Wir bemerken allerdings schon an dieser Stelle, das im Folgenden die Isomorphie zwischen $\mathbb{C}$ und $\mathbb{R}^2$ ausgenutzt wird, d.h. für eine Teilmenge $E \subset \mathbb{R}^2$, verifizieren wir $E_{\mathbb{C}} = \{x + iy : (x,y) \in E\}$.

§2 Komplexe Differenzierbarkeit

In diesem Kapitel wollen wir uns zunächst mit der komplexen Differenzierbarkeit beschäftigen, um anschließend die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen herzuleiten. Dies führt uns zu der folgenden

(2.1) Definition. (Komplexe Differenzierbarkeit)
Seien $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$ offen, $z_0 \in \Omega_{\mathbb{C}}$ und $f : \Omega_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann heißt die Funktion f *komplex differenzierbar in* z_0, wenn der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0) =: \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}(z_0)$$

existiert. Diesen nennt man *komplexe Ableitung von f an der Stelle* z_0. ◇

Zur Verdeutlichung betrachten wir die folgenden

(2.2) Beispiele.

a) Für $a, b \in \mathbb{C}$ sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = az + b$. Dann gilt für $z \neq z_0$

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{az + b - az_0 - b}{z - z_0} = \frac{a(z - z_0)}{z - z_0} = a,$$

also $f'(z) = a$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) Sei $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, g(z) = \exp(z)$ die Exponentialfunktion. Dann gilt für $z \neq z_0$

$$\frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} = \frac{e^z - e^{z_0}}{z - z_0} = e^{z_0}\, \frac{e^{(z-z_0)} - 1}{z - z_0} = e^{z_0}\, \frac{\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^k}{k!} - 1}{z - z_0}$$
$$= e^{z_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(z - z_0)^{k-1}}{k!} \xrightarrow[z \to z_0]{} e^{z_0} \cdot 1.$$

Die Exponentialfunktion ist also komplex differenzierbar in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ und es gilt $g'(z) = \exp(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$. ◇

Betrachten wir nun noch einmal (2.1) etwas genauer und definieren folgende Funktion:

$$\eta(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - f'(z_0),$$

unter der Voraussetzung, dass f in z_0 differenzierbar ist, folgt nach Definition (2.1)

$$\lim_{z \to z_0} \eta(z) = 0.$$

Setzen wir demnach ferner $\eta(z_0) := 0$, so ist diese Funktion in einer Umgebung von $z = z_0$ definiert und im Punkt z_0 stetig. Durch Umformen obiger Gleichung erhalten wir also das

(2.3) Korollar.
Seien die Voraussetzungen wie in (2.1). Ist die Funktion $f : \Omega_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ an der Stelle z_0 komplex differenzierbar, so existiert eine Darstellung der Form

$$f(z) - f(z_0) = (f'(z_0) + \eta(z)) \cdot (z - z_0),$$

mit einer in z_0 stetigen Funktion $\eta(z)$ und $\lim_{z \to z_0} \eta(z) = 0$. ◇

Bevor wir jetzt zu dem sehr wichtigen Begriff der Holomorphie übergehen, wollen wir noch hervorheben, dass für komplexe Ableitungen die gleichen Rechenregeln gelten wie im Reellen. Dies wird dadurch begründet, dass zur Herleitung nur Körper- und Stetigkeitseigenschaften verwendet werden, die sowohl in $\mathbb{R}$ als auch in $\mathbb{C}$ gelten.

(2.4) Definition. (Holomorphie)
Sei $\Omega_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{C}$ offen und $z_0 \in \Omega_{\mathbb{C}}$. Eine Funktion $f : \Omega_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ heißt *holomorph in* z_0, wenn f in einer Umgebung von z_0 komplex differenzierbar ist. Man nennt $f : \Omega_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ *holomorph*, wenn f in allen Punkten $z_0 \in \Omega_{\mathbb{C}}$ komplex differenzierbar ist. Eine *ganze Funktion* ist eine holomorphe Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. ◇

Zur Illustration betrachten wir die folgenden

(2.5) Beispiele.

a) Für $a, b \in \mathbb{C}$ ist nach (2.2)a) die Funktion $f(z) = az + b$ eine ganze Funktion.

b) Nach (2.2)b) ist die Exponentialfunktion eine ganze Funktion. Für $g(z) = \exp(z)$ ist $g'(z) = g(z)$ selbst wieder eine Exponentialfunktion und damit ebenfalls holomorph. ◇

Diesen letzten Sachverhalt aus Beispiel (2.5)b) wollen wir ohne expliziten Beweis[1] verallgemeinert festhalten in dem

[1] vgl. AnaIV, XVIII(2.2)

(2.6) Satz.
Jede holomorphe Funktion ist beliebig oft komplex differenzierbar. Jede Ableitung ist wieder holomorph. ◇

Dieser Satz ist insofern bemerkenswert und überraschend, da er nicht für die reelle, sondern eben nur für die komplexe Analysis seine Gültigkeit besitzt. Die Beweisidee beruht darauf, dass man jede holomorphe Funktion in eine Potenzreihe entwickeln kann[2]. Diese ist mittels gliedweiser Differentiation unendlich oft komplex differenzierbar, wobei die jeweiligen Ableitungen erneut holomorph sind[3].

Kommen wir nun zu dem für den weitern Verlauf dieser Ausarbeitung sehr wichtigen

(2.7) Satz. (Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen)
Sei Ω ein offenes Gebiet im $\mathbb{R}^2$ und $f : \Omega_{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Definiere

$$u(x,y) := Re\Big(f(x+iy)\Big), \qquad v(x,y) := Im\Big(f(x+iy)\Big),$$

so dass

$$f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega$ gilt. Dann folgt:

a) u, v sind partiell differenzierbar in Ω,

b) es gelten die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen (CRD)

$$u_x(x,y) = v_y(x,y) \quad \text{und} \quad u_y(x,y) = -v_x(x,y)$$

für alle $(x,y) \in \Omega$ und

c)

$$f'(x+iy) = u_x(x,y) - iu_y(x,y) = v_y(x,y) + iv_x(x,y)$$

in Ω. ◇

Beweis.
Sei $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega_{\mathbb{C}}$ beliebig gewählt. Setze

$$f'(z_0) =: A + iB, \tag{1}$$

[2]vgl. AnaIV, XVIII(3.6)
[3]vgl. u.a. AnaIV, XVI(2.8)

mit $A, B \in \mathbb{R}^2$. Des Weiteren ist

$$\begin{aligned} z - z_0 &= x + iy - x_0 - iy_0 \\ &= (x - x_0) + i(y - y_0). \end{aligned}$$

Nach Voraussetzung gilt dann für eine hinreichend kleine Umgebung von z_0 die Zerlegung

$$f(z) - f(z_0) = \Big(u(x,y) - u(x_0,y_0)\Big) + i\Big(v(x,y) - v(x_0,y_0)\Big).$$

Mit (2.3) folgt

$$\begin{aligned} &\Big(u(x,y) - u(x_0,y_0)\Big) + i\Big(v(x,y) - v(x_0,y_0)\Big) = \\ &= \Big(A + iB\Big) \cdot \Big((x - x_0) + i(y - y_0)\Big) + \eta(x + iy)\Big((x - x_0) + i(y - y_0)\Big). \end{aligned}$$

Durch Trennung in Real- und Imaginärteil erhalten wir ($z \to z_0$)

$$\begin{aligned} u(x,y) - u(x_0,y_0) &= A(x - x_0) - B(y - y_0) + Re\Big(\eta(x + iy)\Big)(x - x_0), \\ v(x,y) - v(x_0,y_0) &= B(x - x_0) + A(y - y_0) + Im\Big(\eta(x + iy)\Big)(y - y_0). \end{aligned} \tag{2}$$

Betrachten wir nun die erste Formel aus (2) an der Stelle $y = y_0$, d.h. für ein rein reelles $z - z_0 = x - x_0 \neq 0$, erhalten wir nach umformen

$$\frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} = A + Re\Big(\eta(x + iy_0)\Big).$$

Führen wir jetzt den Grenzübergang tatsächlich aus, so gilt für die linke Seite

$$\lim_{x \to x_0} \frac{u(x,y_0) - u(x_0,y_0)}{x - x_0} = u_x(x_0,y_0)$$

und für die rechte

$$\lim_{x \to x_0} \Big(A + Re\big(\eta(x,y_0)\big)\Big) \overset{(2.3)}{=} A.$$

Wir erhalten demnach

$$u_x(x_0,y_0) = A.$$

Die partielle Ableitung von u nach x existiert also. Analog ergibt sich aus der zweiten Gleichung in (2) die Beziehung

$$v_x(x_0,y_0) = B.$$

Die Betrachtung von (2) an der Stelle $x = x_0$, d.h. für ein rein imaginäres $z - z_0 = i(y - y_0) \neq 0$, liefert die weiteren Formeln

$$u_y(x_0, y_0) = -B \quad \text{und} \quad v_y(x_0, y_0) = A.$$

Da z_0 beliebig gewählt wurde und der Differenzenquotient immer existiert, sind u und v auf ganz Ω partiell differenzierbar in allen Komponenten. Es gilt zusammenfassend

$$\begin{aligned} u_x(x,y) &= v_y(x,y), \\ -u_y(x,y) &= v_x(x,y) \end{aligned}$$

für alle $(x, y) \in \Omega$. Durch ersetzen von A und B in Gleichung (1) erhalten wir unmittelbar

$$\begin{aligned} f'(x+iy) &= u_x(x,y) - iu_y(x,y) \\ &= v_y(x,y) + iv_x(x,y). \end{aligned}$$

$\square$

Bevor wir zum nächsten Abschnitt übergehen, soll an dieser Stelle die durchaus wichtige Bemerkung gemacht werden, dass auch die „Rückrichtung“ von Satz (2.7) gilt, wobei hierfür noch gezeigt werden müsste das aus der Holomorphie von f nicht nur die partielle Differenzierbarkeit, sondern sogar die reelle Differenzierbarkeit von u und v folgt. Diese Äquivalenz ist vor allem deswegen von größerer Bedeutung, da dadurch ein praktisches Hilfsmittel gegeben ist, um Funktionen auf Holomorphie zu überprüfen. Erfüllt demnach eine zu untersuchende Funktion die Bedingungen (2.7)a)-c), wobei u und v wie bereits erwähnt reell differenzierbar sein müssen, so ist sie damit auch holomorph. Da diese „Richtung“ und die reelle Differenzierbarkeit von u und v allerdings für den weiteren Verlauf nicht benötigt werden, sei an dieser Stelle auf AnaIV, XVI§3 verwiesen.

§3 Das Dirichlet-Problem

Nachdem im vorherigen Kapitel einige elementare Definitionen bzgl. der komplexen Differenzierbarkeit und insbesondere die CRD eingeführt wurden, wollen wir nun wieder unser Ausgangsproblem (1.1) betrachten und es mit Hilfe des vorherigen Kapitels sowie der bereits bekannten Vorträge lösen. Hierfür benötigen wir jedoch noch zwei weitere Lemmata.

(3.1) Lemma.
Unter den Voraussetzungen von Satz (2.7), ist u unendlich oft partiell differenzierbar und es gilt $\nabla^2 u = 0$ auf ganz Ω. ◇

Beweis.
Nach (2.7)c) haben wir

$$\begin{aligned} f'(x+iy) &= u_x(x,y) - iu_y(x,y) \qquad (3)\\ &= v_y(x,y) - iu_y(x,y). \qquad (4)\end{aligned}$$

Da gemäß (2.6) die Funktion $f'(x+iy)$ wieder holomorph ist, sind nach (2.7)a) die partiellen Ableitungen $u_x(x,y)$ sowie $u_y(x,y)$ bezogen auf f' wieder partiell differenzierbar in Ω. Per Induktion folgt, dass der Differenzenquotient von u bezüglich x und y für alle Ordnungen existiert. Damit ist u unendlich oft partiell differenzierbar in Ω. Es bleibt also noch $\nabla^2 u = 0$ zu zeigen.

Bilden wir die zweite Ableitung von f, so gilt einerseits durch nochmaliges Anwenden von Gleichung (3) auf sich selbst

$$f''(x+iy) = u_{xx}(x,y) - iu_{xy}(x,y),$$

aber andererseits erhalten wir durch Anwenden von Gleichung (4) auf (3) die Formel

$$f''(x+iy) = -u_{yy}(x,y) - iu_{xy}(x,y).$$

Ein Vergleich beider Ergebnisse liefert damit $u_{xx}(x,y) = -u_{yy}(x,y)$ und demnach

$$\nabla^2 u = 0.$$ □

Unmittelbar aus diesem Lemma erhalten wir das

(3.2) Lemma.
Seien u und f wieder wie in Satz (2.7). Definiere $\widetilde{u}(x,y) := u(x,-y)$, so dass $\widetilde{u}(x,y) = Re\Big(f\big((x+iy)^*\big)\Big)$ gilt. Dann ist $\widetilde{u}(x,y)$ unendlich oft partiell differenzierbar und es gilt $\nabla^2\widetilde{u} = 0$ auf ganz Ω. ◇

Beweis.
Mit der Kettenregel erhalten wir

$$\begin{aligned} \widetilde{u}_x(x,y) &= \quad u_x(x,-y), \\ \widetilde{u}_{xx}(x,y) &= \ \ u_{xx}(x,-y), \\ \widetilde{u}_y(x,y) &= -u_y(x,-y), \\ \widetilde{u}_{yy}(x,y) &= \ \ u_{yy}(x,-y) \end{aligned}$$

und demnach

$$\widetilde{u}_{xx}(x,y) + \widetilde{u}_{yy}(x,y) = u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) \overset{(3.1)}{=} 0.$$

Die Tatsache, dass $\widetilde{u}(x,y)$ auf ganz Ω unendlich oft partiell differenzierbar ist, folgt ebenfalls unmittelbar aus Lemma (3.1). □

Nach dem wir sämtliche Vorarbeit geleistet haben, können wir nun das anfangs gestellte Problem (1.1) lösen. Hierzu formulieren wir es um zu dem

(3.3) Theorem. (Dirichlet-Problem für eine Scheibe)
Seien D, $\overline{D}$ und ∂D wie in (1.1). Angenommen $G : \partial D \to \mathbb{R}$ ist stetig. Setze $g(\theta) = G\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big)$, $\theta \in \mathbb{T}$, und definiere $\phi\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) r^{|n|} \exp(in\theta)$ für $0 \le r < 1$ sowie $\phi\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big) = g(\theta)$ im Falle $r = 1$. Dann ist ϕ eine reellwertige Funktion auf $\overline{D}$, so dass

a) ϕ unendlich oft partiell differenzierbar ist und $\nabla^2 \phi = 0$ auf ganz D gilt,

b) ϕ stetig ist für alle Punkte in $\overline{D}$ und

c) $\phi = G$ auf dem Rand ∂D erfüllt ist. ◇

Beweis.
Sei

$$f_{(1)}(z) = \frac{\hat{g}(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}(n) z^n$$

und

$$f_{(2)}(z) = \frac{\hat{g}(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}(-n) z^n.$$

Setze nun $F(z) = f_{(1)}(z) + f_{(2)}(z^*)$ im Falle $|z| < 1$ und

$$F\big(\exp(i\theta)\big) = g(\theta)$$

für $\theta \in \mathbb{T}$. Nach Satz[4] (2.3) des letzten Vortrages ist F damit eine wohldefinierte, reellwertige und stetige Funktion auf $\overline{D}_{\mathbb{C}} = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Damit ist aber auch

$$\begin{aligned}
\phi\big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{g}(n) r^{|n|} e^{in\theta} \\
&= \hat{g}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}(n) r^{|n|} e^{in\theta} + \sum_{n=-\infty}^{-1} \hat{g}(n) r^{|n|} e^{in\theta} \\
&= \frac{\hat{g}(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}(n) \Big(re^{i\theta}\Big)^n + \frac{\hat{g}(0)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{g}(-n) \Big(\big(re^{i\theta}\big)^*\Big)^n \\
&= f_{(1)}\big(r\exp(i\theta)\big) + f_{(2)}\big(r\exp(i\theta)^*\big) \\
&= F\big(r\exp(i\theta)\big)
\end{aligned}$$

für $0 \leq r < 1$ und

$$\begin{aligned}
\phi\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big) = g(\theta) &= F\big(\exp(i\theta)\big) \\
&= G\big(\cos(\theta), \sin(\theta)\big),
\end{aligned}$$

falls $\theta \in \mathbb{T}$ ist, eine wohldefinierte, reellwertige und stetige Funktion auf $\overline{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$. Damit bleibt nur noch a) zu zeigen.

Beachten wir hierfür, dass ϕ reellwertig ist, erhalten wir

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) = Re\Big(\phi(x,y)\Big) &= Re\Big(F(x+iy)\Big) \\
&= \underbrace{Re\Big(f_{(1)}(x+iy)\Big)}_{=:u(x,y)} + \underbrace{Re\Big(f_{(2)}(x-iy)\Big)}_{=:\widetilde{u}(x,y)}
\end{aligned}$$

und damit wie gewünscht

$$\nabla^2 \phi(x,y) = \underbrace{\nabla^2 u(x,y)}_{\underset{(3.1)}{=}\,0} + \underbrace{\nabla^2 \widetilde{u}(x,y)}_{\underset{(3.2)}{=}\,0} = 0.$$

Da u und $\widetilde{u}$ nach Lemma (3.1) bzw. (3.2) unendlich oft partiell differenzierbar sind, ist ϕ auch unendlich oft partiell differenzierbar. □

[4] vgl. Körner, Lemma 27.4

§4 Literaturverzeichnis

- **Körner, T.**: Fourier Analysis, Cambridge 1990
- **Krieg, A.**: Analysis IV, Aachen 2007
- **Bronstein I.N., Samendjajew K.A.**: Taschenbuch der Mathematik, Moskau 1991
- http://de.wikipedia.org/wiki/Holomorphie#Holomorphie_und_Analytizit.C3.A4t (Stand:14.11.2007)