Punktweise Konvergenz stückweise glatter Funktionen

Vortrag zum Seminar zur Fourieranalysis, 23.10.2007

Margarete Tenhaak

Im letzten Vortrag wurde die Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion definiert. Fourier behauptete, dass die Fourier-Reihe einer periodischen Funktion f immer gegen die Funktion f konvergiert. Doch diese Behauptung ist keineswegs offensichtlich und rief damals großen Unglauben hervor. In diesem Vortrag wollen wir zeigen, dass Fouriers Vermutung richtig ist, wenn wir einige sinnvolle Bedingungen an die Funktion f stellen.

§1 Vorbereitungen

Im folgenden Abschnitt werden einige grundlegende Definitionen eingeführt.

(1.1) Definition (stückweise stetig)
Sei $-\infty < a < b < \infty$. Eine Funktion f heißt *stückweise stetig* auf dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$, falls gilt:

a) f ist stetig auf $[a, b]$ außer in endlich vielen Punkten $x_1, ..., x_k$.

b) In jedem dieser Punkte $x_1, ..., x_k$ existiert der rechtsseitige und der linksseitige Grenzwert von f.

$$f(x_j-) = \lim_{h \to 0+} f(x_j - h) \text{ und } f(x_j+) = \lim_{h \to 0+} f(x_j + h)$$

(Die Existenz der Grenzwerte $f(x_j\pm)$ bedeutet, dass sie einen endlichen Wert haben. $\pm\infty$ ist also für die Grenzwerte nicht erlaubt.)

Die Menge der stückweise stetigen Funktionen auf $[a, b]$ wird mit *PC(a,b)* bezeichnet. ◇

Der Begriff aus (1.1) führt uns zu einer weiteren Definition:

(1.2) Definition (stückweise glatt)
Wir nennen eine Funktion f *stückweise glatt* auf $[a, b]$ wenn f und die erste Ableitung f' von f beide stückweise stetig auf $[a, b]$ sind, d.h. genau dann wenn

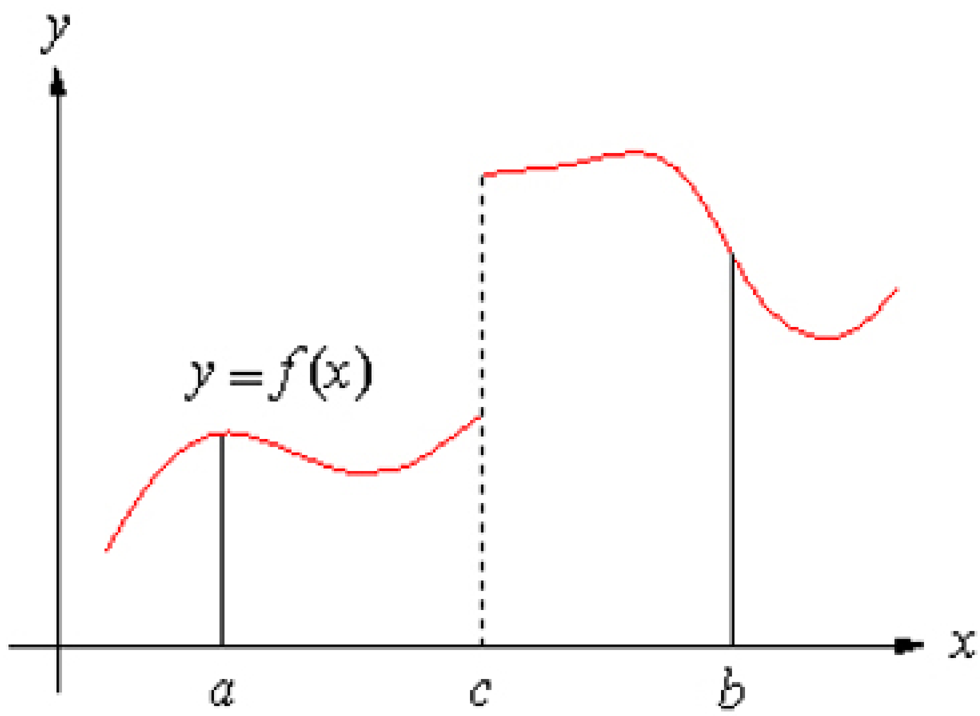
a) $f \in PC(a, b)$;

b) f' existiert und ist stetig auf (a, b) außer in endlich vielen Punkten $x_1, ..., x_K$, worin alle Punkte enthalten sind in denen f unstetig ist; außerdem existieren die einseitigen Grenzwerte $f'(x_j-)$ und $f(x_j+)$, insbesondere existieren also auch $f'(a+)$ und $f'(b-)$.

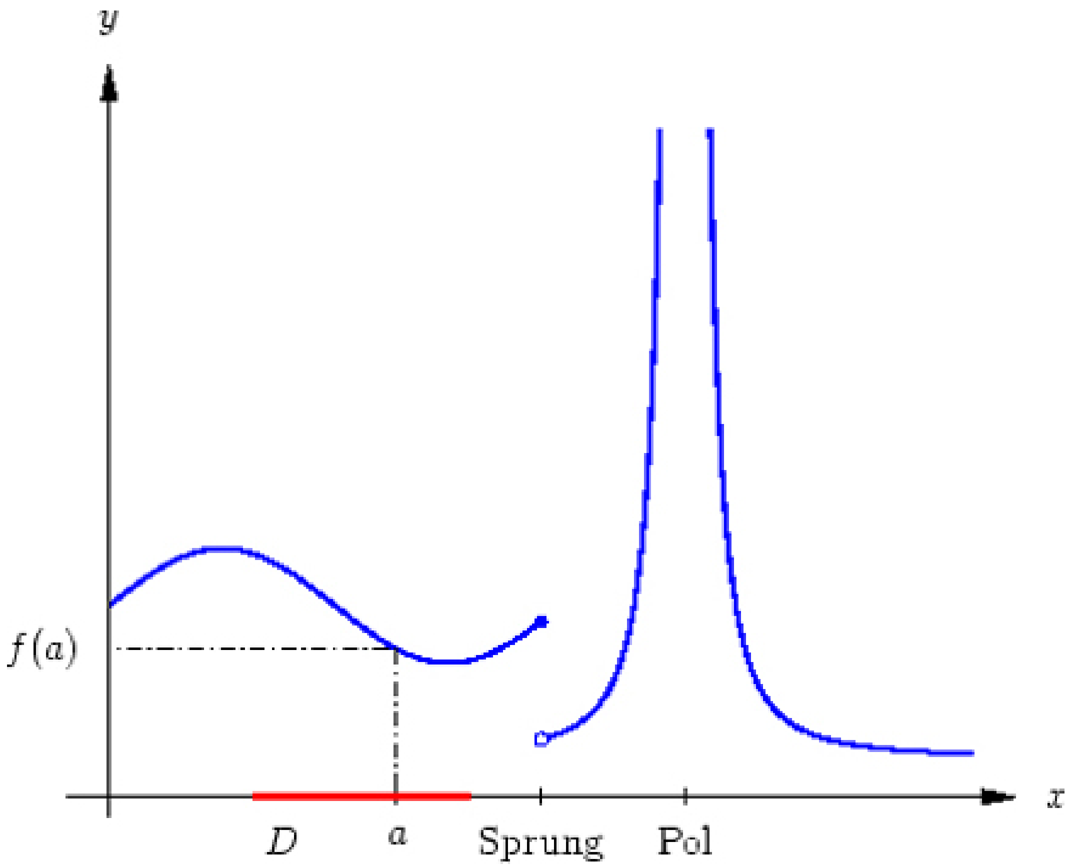
Die Menge der stückweise glatten Funktionen bezeichnen wir mit *PS(a,b)*. ◇

Anschaulich ausgedrückt, ist der Graph einer stückweise glatten Funktion eine glatte Kurve mit nur endlich vielen Sprungstellen (Unstetigkeitsstellen von f) und nur endlich vielen Ecken (an denen f' unstetig ist).

Die folgende Abbildung zeigt eine stückweise glatte Funktion (oben) und eine Funktion, die nicht stückweise glatt ist (unten):



stückweise glatte Funktion



nicht stückweise glatte Funktion

Nun kommen wir zur letzten Definition:

(1.3) Definition
Eine Funktion, die auf ganz $\mathbb{R}$ definiert ist, heißt *stückweise stetig* bzw. *stückweise glatt auf* $\mathbb{R}$, falls dies für jedes abgeschlossene Intervall $[a, b]$ gilt. Die Menge der stückweise stetigen bzw. glatten Funktionen auf $\mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $PC(\mathbb{R})$ bzw. $PS(\mathbb{R})$. ◇

Dies bedeutet, dass f und f' auf ganz $\mathbb{R}$ unendlich viele Unstetigkeitsstellen haben können, aber nur endlich viele in jedem abgeschlossenen Intervall.

§2 Konvergenz-Theorem

Wir kehren nun zurück zur Betrachtung der Fourier-Reihe einer 2π-periodischen Funktion $f(t)$. Im letzten Vortrag wurde die Fourier-Reihe von f wie folgt definiert:

$$\frac{1}{2}A_0 + \sum_{r=1}^{\infty}(A_r \cos(rt) + B_r \sin(rt)) = \sum_{r=-\infty}^{\infty} \hat{f}(r)e^{irt} \tag{1}$$

wobei gilt

$$A_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(rt)dt \quad \text{und} \quad B_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(rt)dt,$$

$$\hat{f}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-irt}dt. \tag{2}$$

Wie bereits bekannt, ist die Summe jeder unendlichen Reihe definiert als der Grenzwert ihrer Partialsummen. Wir bezeichnen die N-te Partialsumme der Fourier-Reihe von f mit $S_N(f,t)$ und wollen zeigen, dass $S_N(f,t)$ für $N \to \infty$ gegen die Funktion f konvergiert. Es ist also

$$S_N(f,t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{r=1}^{N}(A_r \cos(rt) + B_r \sin(rt)) = \sum_{r=-N}^{N} \hat{f}(r)e^{irt}. \tag{3}$$

Einsetzen von (2) liefert

$$\begin{aligned} S_N(f,t) &= \sum_{r=-N}^{N} \Big(\tfrac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-irx}dx\Big)\, e^{irt} \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\sum_{r=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ir(t-x)}dx \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\sum_{r=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ir(x-t)}dx \quad . \end{aligned}$$

Die letzte Umformung erhält man durch Ersetzen von r durch -r. Die Summe wird dabei nicht verändert, weil r von $-N$ bis N summiert wird. Jetzt wollen wird noch $s := x - t$ substituieren und verwenden das Lemma über periodische Funktionen aus dem letzten Vortrag

$$\begin{aligned} S_N(f,t) &= \tfrac{1}{2\pi}\sum_{r=-N}^{N}\int_{-\pi+t}^{\pi+t} f(t+s)e^{irs}ds \\ &= \tfrac{1}{2\pi}\sum_{r=-N}^{N}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+s)e^{irs}ds \ . \end{aligned}$$

Zur besseren Übersicht führen wir die Bezeichnung

$$D_N(s) = \frac{1}{2\pi}\sum_{r=-N}^{N} e^{irs} \tag{4}$$

ein. Man nennt $D_N(s)$ den *N-ten Dirichlet Kern*. Mit dieser Bezeichnung lässt sich die N-te Partialsumme also darstellen als

$$S_N(f,t) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+s)D_N(s)ds \ . \tag{5}$$

Im Folgenden wollen wir die Eigenschaften des Dirichlet Kern genauer betrachten und drücken ihn dazu zunächst einfacher aus.

$$D_N(s) = \frac{1}{2\pi}e^{-iNs}(1 + e^{is} + ... + e^{i2Ns}) = \frac{1}{2\pi}e^{-iNs}\sum_{r=0}^{2N} e^{irs}$$

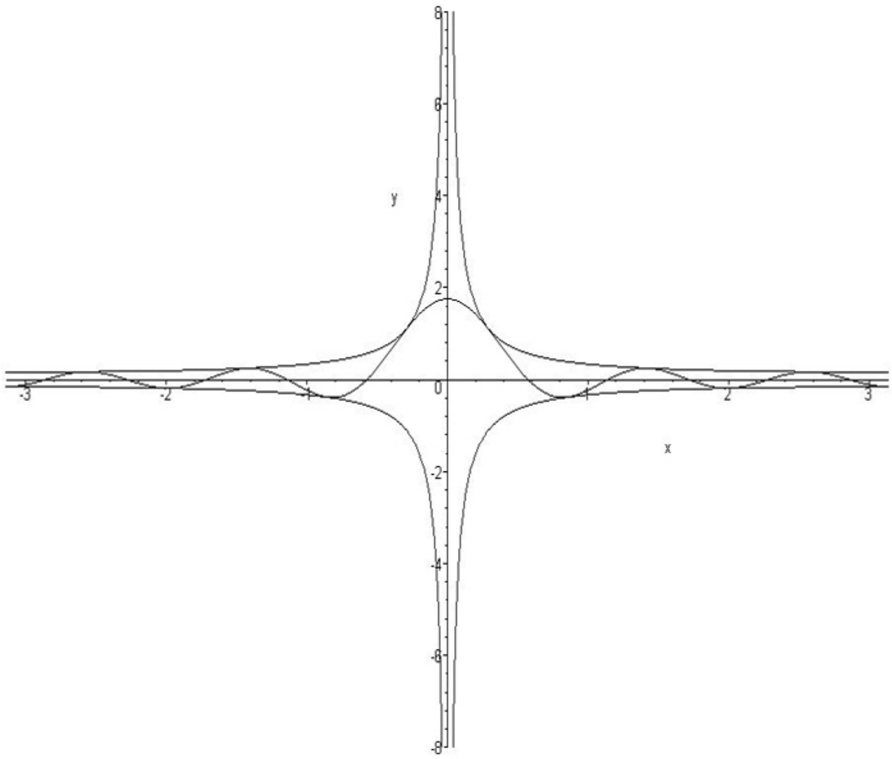
Offentlich lässt er sich als endliche geometrische Reihe ausdrücken.
Weil $\sum_{n=0}^{K} x^n = (x^{K+1} - 1)/(x-1)$ für alle $x \neq 1$, erhalten wir für $s \neq 0$

$$D_N(s) = \frac{1}{2\pi}e^{-iNs}\frac{e^{i(2N+1)s} - 1}{e^{is} - 1} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{i(N+1)s} - e^{-iNs}}{e^{is} - 1} \ . \tag{6}$$

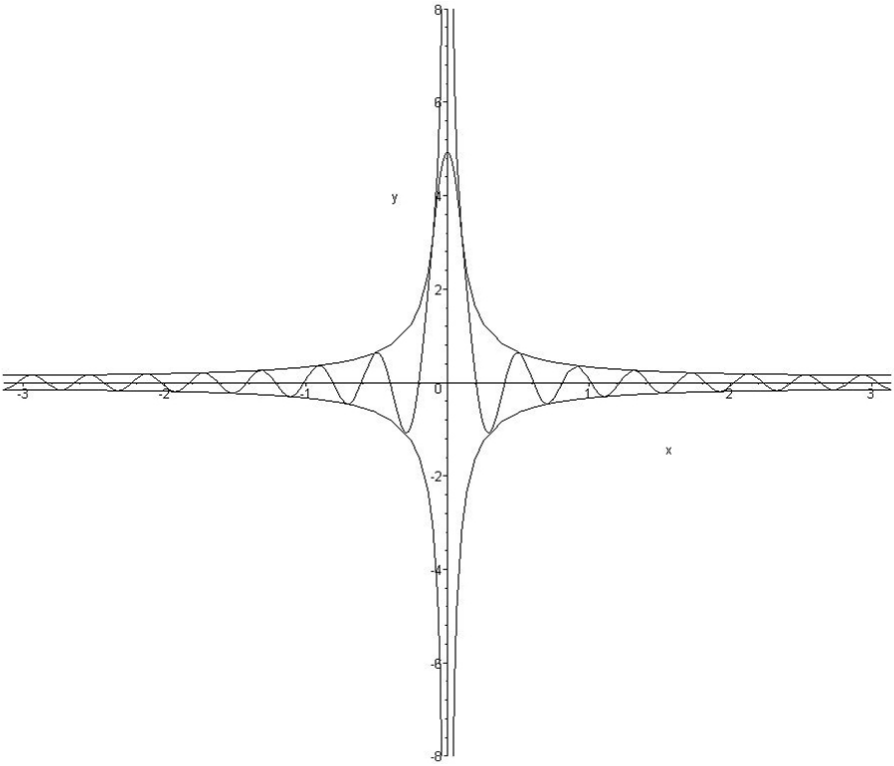
Erweitern von Zähler und Nenner mit $e^{-is/2}$ führt zur einer anschaulichen Darstellung

$$D_N(s) = \frac{1}{2\pi} \frac{\exp\left[i(N+\frac{1}{2})s\right] - \exp\left[-i(N+\frac{1}{2})s\right]}{\exp(i\frac{1}{2}s) - \exp(-i\frac{1}{2}s)} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(N+\frac{1}{2})s}{\sin\frac{1}{2}s} \,. \tag{7}$$

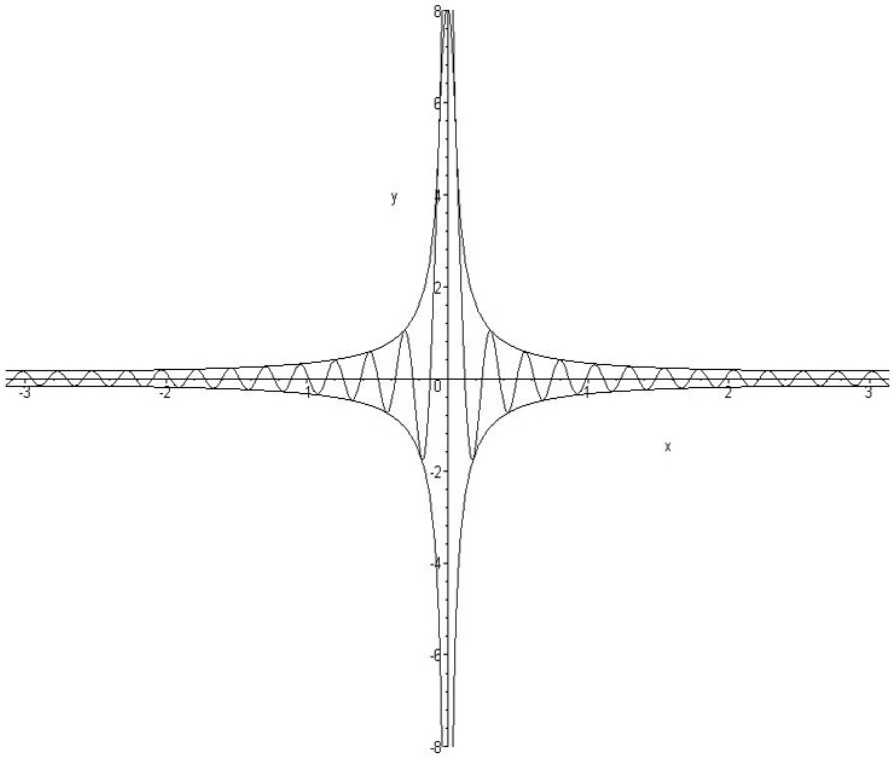
Der Graph des Nten Dirichlet Kerns ist also eine schnell oszillierende Welle $y_1 = \sin((N+\frac{1}{2})s)$. Durch den Faktor $y_2 = \pm\frac{1}{2\pi}\sin^{-1}(\frac{1}{2}s)$ wird die Amplitude der Schwingung eingegrenzt. Die folgende Abbildung zeigt den Dirichlet Kern und seine Einhüllende $\pm\frac{1}{2\pi}\csc\frac{1}{2}s$ für verschiedene N auf dem Intervall $-\pi < s < \pi$.



Dirichlet Kern $D_5(s)$ und Einhüllende $\pm\frac{1}{2\pi}\sin^{-1}(\frac{1}{2}s)$



Dirichlet Kern $D_{15}(s)$ und Einhüllende $\pm\frac{1}{2\pi}\sin^{-1}(\frac{1}{2}s)$



Dirichlet Kern $D_{25}(s)$ und Einhüllende $\pm\frac{1}{2\pi}\sin^{-1}(\frac{1}{2}s)$

Aus diesem Graph lässt sich bereits eine Idee für den Beweis, dass $S_N(f,t) \overset{N\to\infty}{\to} f(t)$ ablesen: In der Integralform (5) von $S_N(f,t)$ wird durch die scharfe Spitze von $D_N(s)$ bei $s = 0$ der Wert von $f(t)$ herausgegriffen. Die schnelle Oszillation von $D_N(s)$ für $s \neq 0$ eliminiert den Rest des Integrals, weil sich der negative und der positive Anteil gegenseitig aufheben.
Bevor wir nun zum eigentlichen Beweis kommen, brauchen wir noch eine Eigenschaft von D_N.

(2.1) Lemma
Für jedes $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\int_{-\pi}^{0} D_N(t)dt = \int_{0}^{\pi} D_N(t)dt = \frac{1}{2} \quad .$$

Beweis
Nach (4) gilt

$$\begin{aligned} D_N(t) &= \tfrac{1}{2\pi} \sum_{r=-N}^{N} e^{irt} \\ &= \tfrac{1}{2\pi} + \tfrac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{N} \tfrac{1}{2}(e^{irt} + e^{-irt}) \\ &= \tfrac{1}{2\pi} + \tfrac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{N} \cos(rt) \quad . \end{aligned}$$

Damit ist also

$$\int_{0}^{\pi} D_N(t)dt = \left[\frac{t}{2\pi} + \frac{1}{\pi} \sum_{r=1}^{N} \frac{\sin(rt)}{r} \right]_0^{\pi} = \frac{1}{2} \quad .$$

Und natürlich ebenso für das Integral von $-\pi$ bis 0. □

Nun kommen wir schließlich zum wesentlichen Konvergenz-Theorem. Es besagt, dass die Fourier-Reihe einer Funktion $f \in PS(\mathbb{R})$ punktweise gegen f konvergiert, wenn wir f an den Unstetigkeitsstellen als Mittelwert des rechtsseitigen und linksseitigen Grenzwertes definieren.

(2.2) Satz (Konvergenz-Theorem)
Ist f eine 2π-periodische Funktion und stückweise glatt auf $\mathbb{R}$ und $S_N(f)$ ist wie in (5 definiert, dann ist

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} S_N(f,t) = \tfrac{1}{2}\left[f(t-)+f(t+)\right]}$$

für jedes t. Insbesondere ist also

$$\boxed{\lim_{N\to\infty} S_N(f,t) = f(t)} \qquad \diamond$$

für jedes t in dem f stetig ist.

Beweis
Aus Lemma 2.1 wissen wir

$$\frac{1}{2}f(t-) = f(t-)\int\limits_{-\pi}^{0} D_N(s)ds \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}f(t+) = f(t+)\int\limits_{0}^{\pi} D_N(s)ds \quad .$$

Einsetzen der obigen Gleichungen und (5) liefert

$$\begin{aligned}
&S_N(f,t) - \frac{1}{2}\left[f(t-)+f(t+)\right] &(8)\\
&= \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t+s)D_N(s)ds - f(t-)\int\limits_{-\pi}^{0} D_n(s)ds - f(t+)\int\limits_{0}^{\pi} D_N(s)ds\\
&= \int\limits_{-\pi}^{0} \left[f(t+s)-f(t-)\right] D_N(s)ds \ + \int\limits_{0}^{\pi} \left[f(t+s)-f(t+)\right] D_N(s)ds \quad .
\end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass dieser Ausdruck für jedes feste t gegen Null konvergiert, falls $N \to \infty$. Dazu setzen wir (6) für $D_N(s)$ ein und erhalten

$$S_N(f,t) - \frac{1}{2}\left[f(t-) - f(t+)\right]$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)(e^{i(N+1)s} - e^{-iNs})ds\ , \tag{9}$$
$\square$

wobei die Funktion $g(s)$ definiert ist als

$$\frac{f(t+s)-f(t-)}{e^{is}-1} \text{ für } -\pi < s < 0, \quad \frac{f(t+s)-f(t+)}{e^{is}-1} \text{ für } 0 < s < \pi\ .$$

Die Funktion g verhätl sich gutartig auf $[a,b]$ und ist genauso glatt wie die Funktion f, außer in der Nähe von $s = 0$ (wo der Nenner $e^{is} - 1$ verschwindet). Wir wenden nun l'Hospital auf $s = 0$ an

$$\lim_{s\to 0+} g(s) = \lim_{s\to 0+} \frac{f(t+s)-f(t+)}{e^{is}-1} \overset{l'Hosp}{=} \lim_{s\to 0+} \frac{f'(t+s)}{ie^{is}} = \frac{f'(t+)}{i}$$

Analog folgt, dass $g(s)$ sich dem endlichen Grenzwert $f'(t-)/i$ nähert, wenn s von links gegen Null läuft. Daher ist g also auf $[-\pi,\pi]$ sückweise stetig. Nach dem Korollar zur Besselschen Ungleichung läuft dann der Fourier Koeffizient

$$\hat{g}(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(s)e^{-irs}ds$$

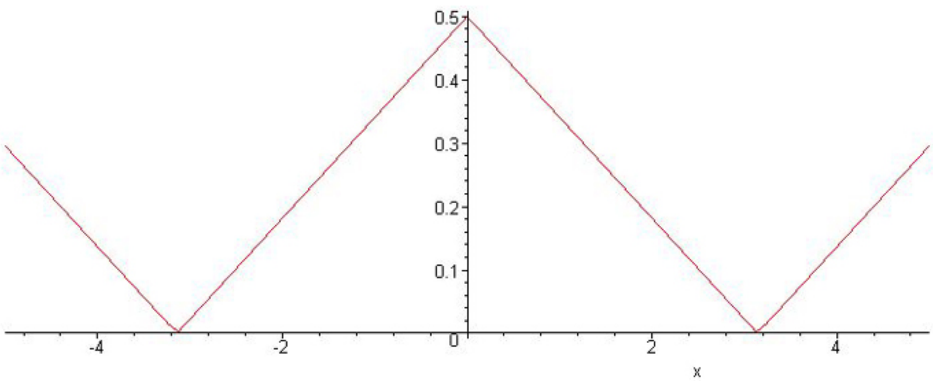
für $r \to \pm\infty$ gegen Null. Da der Ausdruck (9) nichts anderes ist als $\hat{g}(-(N+1)) - \hat{g}(N)$, verschwindet er für $N \to \infty$; damit konvergiert also auch (8) gegen Null für $N \to \infty$ und es folgt die Behauptung.

Betrachten wir nun einige Beispiel aus dem letzten Vortrag.

(2.3) Beispiel
Zunächst hatten wir die Dreiecksschwingung

$$f(t) \;=\; |t| \quad \text{für} \quad -\pi < t \leq \pi$$

betrachtet.



Dreiecksschwingung ◇

Die Fourier-Reihe von f wurde berechnet zu

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos((2r-1)t)}{(2r-1)^2} \quad .$$

Durch Betrachtung der Graphen der Partialsummen dieser Reihe konnten wir vermuten, dass die Fourierreihe von f gegen f konvergiert. Da f überall stetig und stückweise glatt ist, läßt sich das Konvergenz-Theorem anwenden. Somit bestätigt sich also unsere Vermutung

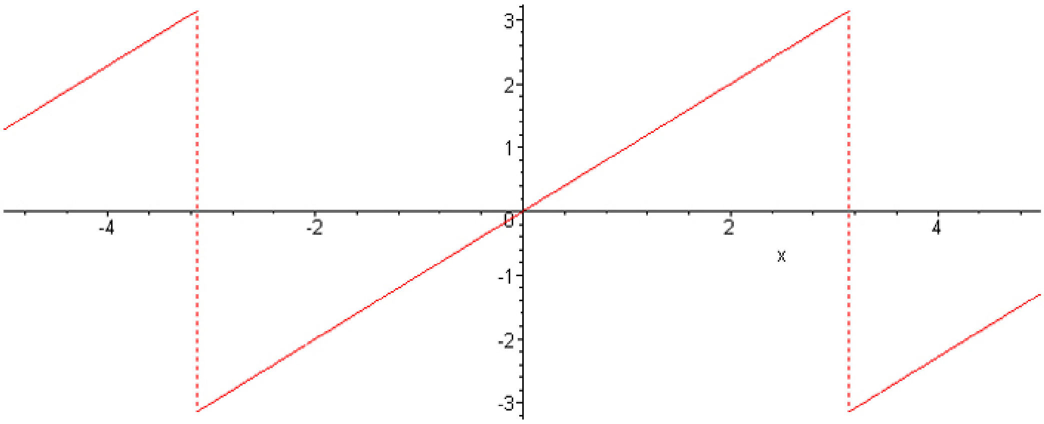
$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\cos((2r-1)t)}{(2r-1)^2} \;=\; |t| \quad \text{für} \quad -\pi < t \leq \pi \quad .$$

Setzt man $t = 0$ ein, so erhalten wir damit den Grenzwert der Reihe

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^2} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + ... = \frac{\pi^2}{8} \quad .$$

(2.4) Beispiel
Weiter war die Sägezahnfunktion g definiert durch

$$g(t) = t \ \text{ für } \ -\pi < t \leq \pi \ \ .$$



Sägezahnfunktion ◇

Und die Fourier-Reihe von g lautet

$$2 \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \sin(rt) \ .$$

g ist stückweise glatt und stetig außer an den Stellen $t = k\pi$ für ungerade k. Die einseitigen Grenzwerte von g an diesen Stellen sind $g(k\pi-) = \pi$ und $g(k\pi+) = -\pi$, also $\frac{1}{2}\left[g(k\pi-) + g(k\pi+)\right] = 0$. Damit konvergiert die Fourier-Reihe also an allen Punkten gegen g außer bei $t = k\pi$ für ungerade k. Dort konvergiert sie gegen Null.

Es ist also

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \sin(rt) = \frac{t}{2} \ \text{ für } \ -\pi < t < \pi \ .$$

Setzt man nun $t = \frac{\pi}{2}$ ein und verwendet, dass $\sin(\frac{k\pi}{2})$ alternierend 1 und -1 ist, falls k ungerade, und 0 ist, falls k gerade, so folgt

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r+1}}{r} \sin(rt) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + ... = \frac{\pi}{4} .$$

(2.5) Beispiel
Beh:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

Beweis
Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = t^2 \ \text{für} \ -\pi < t < \pi$$

und berechnen die zugehörige Fourier-Reihe. Für $n = 0$ erhalten wir für den konstanten Term

$$\begin{aligned} \hat{f}(0) &= \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} t^2 dt \\ &= \tfrac{1}{2\pi} \tfrac{t^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi} \\ &= \tfrac{1}{2\pi} (\tfrac{\pi^3}{3} + \tfrac{\pi^3}{3}) \\ &= \tfrac{\pi^2}{3} . \end{aligned}$$

Die Fourier-Koeffizienten für $n \neq 0$ ergeben sich zu

$$\begin{aligned}
\hat{f}(n) &= \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} t^2 e^{-int}dt \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\left[-\tfrac{e^{-int}t^2}{in}+\tfrac{2te^{-int}}{n^2}+\tfrac{2e^{-int}}{in^3}\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\left[\tfrac{\pi^2 e^{in\pi}-\pi^2 e^{-in\pi}}{in}+\tfrac{2^{in\pi}+2^{-in\pi}}{n^2}+\tfrac{2e^{in\pi}-2e^{-in\pi}}{in^3}\right] \\
&= \tfrac{1}{2\pi}\left[\underbrace{\frac{2\pi^2}{n}\sin(n\pi)}_{=0}+\tfrac{4\pi}{n^2}\cos(n\pi)-\underbrace{\frac{4}{n^3}\sin(n\pi)}_{=0}\right] \\
&= \tfrac{2}{n^2}\cos(n\pi) \\
&= \tfrac{2}{n^2}(-1)^n \quad .
\end{aligned}$$

Damit lautet die Fourier-Reihe von f

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{int} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}\tfrac{2}{n^2}(-1)^n e^{int} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{2}{n^2}\left[(-1)^n e^{int}+(-1)^{-n}e^{-int}\right] \quad + c_0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{2}{n^2}(-1)^n\underbrace{\left[e^{int}+e^{-int}\right]}_{=2\cos(nt)} \quad + c_0 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}\tfrac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nt) \quad + \tfrac{\pi^2}{3}
\end{aligned}$$

Da die Funktion f stetig ist, folgt aus dem Konvergenz-Theorem

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{int}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}(-1)^n\cos(nt) \quad + \frac{\pi^2}{3}=f(t)=t^2 \quad .$$

Einsetzen von $t = \pi$ liefert die Behauptung

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4}{n^2}(-1)^n \cos(n\pi) \ + \tfrac{\pi^2}{3} && = \pi^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4}{n^2}(-1)^{2n} \ + \tfrac{\pi^2}{3} && = \pi^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{4}{n^2} \ + \tfrac{\pi^2}{3} && = \pi^2 \\
\Leftrightarrow \quad & \sum_{n=1}^{\infty} \tfrac{1}{n^2} && = \tfrac{\pi^2}{6} \ .
\end{aligned}$$

□

Aus dem Konvergenz-Theorem lässt sich eine einfache Identiätsaussage für stückweise glatte Funktionen herleiten.

(2.6) Korollar
Sind f und g 2π-periodische und stückweise glatte Funktionen und f und g haben die gleichen Fourier-Koeffizienten, dann gilt $f = g$.

Beweis
f und g sind beide die Summe der gleichen Fourier-Reihe. □