Fourier-Reihen: Definitionen und Beispiele

Die Fourieranalysis beschäftigt sich mit dem Problem Funktionen in Kosinus und Sinus zu entwickeln. Diese Darstellungen sind in der Mathematik sowie in der Physik von großer Bedeutung und finden in vielen Bereichen Anwendung. Schon im 18ten Jahrhundert war bekannt, dass sich einige einfache Funktionen in Sinus- und Kosinus-Reihen entwickeln lassen. Fourier behauptete schließlich, dass sich alle Funktionen auf diese Weise darstellen lassen. Mit dieser Behauptung wollen wir uns näher beschäftigen.

Wir betrachten im Folgenden periodische Funktionen:

(1.1) Definition
Die folgenden Definitionen sind äquivalent:

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t), \quad f(t) = f(t + 2\pi), \quad \forall t \in \mathbb{R}$

(b) $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}, \quad t \mapsto f(t),$ mit $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, so dass $t = t + 2\pi$
Hier ist f auf dem Einheitskreis definiert und ordnet jedem Winkel t einen Funktionswert $f(t)$ zu.

Funktionen dieser Art bezeichnen wir als 2π-*periodisch*. ◇

Im Folgenden setzen wir voraus, dass f Riemann-integrierbar ist, auf jedem beschränkten Intervall. Wir wollen nun wissen, welche Funktionen eine Reihendarstellung der Form

$$f(t) = \frac{1}{2}A_0 + \sum_{1}^{\infty}(A_r cos(rt) + B_r sin(rt)) \tag{I}$$

besitzen. Dazu schauen wir uns zunächst einige grundlegende Eigenschaften von Funktionen an, für die eine solche Darstellung existiert. Wir stellen uns zunächst die Frage: „Wenn f eine Reihendarstellung der Form (I) besitzt, wie können dann die Koeffizienten A_r und B_r durch f ausgedrückt werden?“

Wir formen (I) mit den Beziehungen $cos(t) \overset{(i)}{=} \frac{e^{it}+e^{-it}}{2}$, $sin(t) \overset{(ii)}{=} \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$
und $e^{it} \overset{(iii)}{=} cos(t) + i\, sin(t)$ um zu:
$\frac{1}{2}A_0 \;+\; \sum\limits_{1}^{\infty}\Bigg(A_r cos(rt) + B_r sin(rt)\Bigg)$
$\overset{\text{(i), (ii)}}{=} \;\frac{1}{2}A_0\frac{e^{0\,it}+e^{-0\,it}}{2} \;+\; \sum\limits_{1}^{\infty}\Bigg(A_r\frac{e^{irt}+e^{-irt}}{2} + B_r\frac{e^{irt}-e^{-irt}}{i2}\Bigg)$
$= \;\frac{1}{2}A_0\frac{e^{0\,it}+e^{-0\,it}}{2} \;+\; \sum\limits_{1}^{\infty}\Bigg(e^{irt}\frac{1}{2}(A_r - i\,B_r) \;+\; e^{-irt}\frac{1}{2}(A_r + i\,B_r)\Bigg)$
$= \;\sum\limits_{0}^{\infty} C_r e^{irt}$
wobei $B_0 \;:=\; 0, C_r \;=\; \frac{1}{2}(A_r \;-\; i\,B_r), C_{-r} \;=\; \frac{1}{2}(A_r \;+\; i\,B_r)$, r = 0, 1, 2, 3, ...
Offensichtlich ist:

$$C_0 \;=\; \frac{1}{2}(A_0 + i\,B_0) \;=\; \frac{1}{2}(A_0 - i\,B_0) \;=\; \frac{1}{2}A_0, \text{ da } B_0 = 0.$$

Hier erklärt sich auch der Faktor $\frac{1}{2}$ in der Schreibweise (I).
Es soll nun gelten:

$$f(t) = \sum_{-\infty}^{\infty} C_r\, e^{irt}. \tag{II}$$

Dazu Multiplizieren wir beide Seiten von (II) mit e^{-ikt} so erhalten wir, unter der Annahmen, dass die termweise Integration über die Summe erlaubt ist:

$$\int\limits_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = \sum_{-\infty}^{\infty} C_r \int\limits_0^{2\pi} e^{i(r-k)t}dt.$$

Nun gilt für $r \neq k$:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i(r-k)t}dt \;=\; \frac{1}{i(r-k)}e^{i(r-k)t}\Bigg|_0^{2\pi} \;=\; \frac{1\;-\;1}{i(r-k)} \;=\; 0$$

und für $r = k$:

$$\int\limits_0^{2\pi} e^{i(r-k)t}dt \;=\; \int\limits_0^{2\pi} 1\,dt \;=\; 2\pi$$

Wir erhalten also:

$$\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = 2\pi C_k$$

$$\Rightarrow C_r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-irt}dt \tag{III}$$

Für A_r und B_r gilt dann umgekehrt:

$$\begin{aligned} A_r &= C_r + C_{-r} &&= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)cos(rt)dt,\ (r \geq 0); \\ B_r &= i(C_r - C_{-r}) &&= \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t)sin(rt)dt,\ (r \geq 1), \end{aligned} \tag{IV}$$

Wir können also festhalten:
Besitzt f eine Reihendarstellung der Form (I) oder (II), die gleichmäßig konvergiert, sodass eine termweise Integration erlaubt ist, so sind die Koeffizienten C_r bzw. A_r und B_r gegeben durch (III) und (IV).

(1.2) Definition
Sei f 2π-periodisch und integrierbar auf dem Intervall $[0, 2\pi]$. Seien weiter C_r wie in (III) und A_r und B_r wie in (IV), so nennt man

$$\sum_{-\infty}^{\infty} C_r\, e^{irt} \ \text{ oder } \ \frac{1}{2}A_0 + \sum_{1}^{\infty}(A_r cos(rt) + B_r sin(rt))$$

die *Fourier-Reihen* von f. ◇

Die von uns gewählten Integrationsgrenzen sind dabei nicht relevant, wie das folgende Lemma zeigen wird.

(1.3) Lemma
Ist F periodisch mit Periode P, dann ist $\int_a^{a+P} F(t)dt$ unabhängig von a. ◇

Beweis
Sei

$$g(a) := \int_a^{a+P} F(t)dt \overset{AnaIIVII(1.17)}{=} \int_0^{a+P} F(t)dt - \int_0^{a} F(t)dt$$

Nach AnaII VII(2.4): $g'(a) = F(a+P) - F(a) = 0$, also ist g konstant. □

Außerdem gilt für F:

$$\begin{aligned}\int_{-a}^{a} F(t)\,dt &= \int_{0}^{a} F(t)\,dt \;+\; \int_{-a}^{0} F(t)\,dt \\ &= \int_{0}^{a} F(t)\,dt \;+\; \int_{0}^{a} F(-t)\,dt \\ &= \begin{cases} 2\int_0^a F(t)\,dt & \text{, falls } F \text{ gerade} \\ 0 & \text{, falls } F \text{ ungerade}\end{cases}\end{aligned}$$

Da $cos(rt)$ gerade ist und $sin(rt)$ ungerade, führt uns das zum

(1.4) Lemma
Bezeichnungen wie in (IV).

ist f gerade,	A_r	$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)cos(rt)dt$	und	B_r	$= 0$	
ist f ungerade,	A_r	$= 0$	und	B_r	$= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(t)sin(rt)dt$	$\diamond$

Beweis
$sin(-rt) \;=\; -sin(rt)$ und $cos(-rt) \;=\; cos(rt)$.

Sei f gerade, dann ist $f(-t) \;=\; f(t)$.
$\Rightarrow f_1(t) \;:=\; f(t)cos(rt) \;=\; f(-t)cos(-rt) \;=\; f_1(-t)$, ist gerade.
$f_2(t) \;:=\; f(t)sin(rt) \;=\; -f(-t)sin(-rt) \;=\; -f_2(-t)$, ist ungerade.
Damit ist:

$$A_r \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t)\,dt \;\overset{(1.3)}{=}\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)\,dt \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)cos(rt)\,dt$$

und

$$B_r \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(t)\,dt \;\overset{(1.3)}{=}\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(t)\,dt \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; 0$$

Sei f ungerde, dann ist $f(-t) \;=\; -f(t)$.
$\Rightarrow f_1(t) \;:=\; f(t)cos(rt) \;=\; -f(-t)cos(-rt) \;=\; -f_1(-t)$, ist ungerade.
$f_2(t) \;:=\; f(t)sin(rt) \;=\; f(-t)sin(-rt) \;=\; f_2(-t)$, ist gerade.
Damit ist:

$$A_r \;=\; \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_1(t)\,dt \;\overset{(1.3)}{=}\; \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_1(t)\,dt \;\overset{\text{s.o.}}{=}\; 0$$

und

$$B_r = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_2(t)\,dt \overset{(1.3)}{=} \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f_2(t)\,dt \overset{\text{s.o.}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)sin(rt)\,dt$$

Sehen wir uns nun den Koeffizienten C_0 der Fourier-Reihe von f genauer an, so ist nach (IV):

$$C_0 = \frac{1}{2}A_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt,$$

Dies ist genau der mittlere Wert der Funktion f auf dem Intervall $[0, 2\pi]$, also auch auf jedem Intervall der Länge 2π. Dies ist eine sehr nützliche Eigenschaft, die überdies auch einfacher zu merken ist, als die Integrale Formel für C_0.
Wir halten sie daher fest im

(1.5) Lemma
Der Konstante Term in der Fourier Reihe einer 2π-periodischen Funktion f ist der mittlere Wert der Funktion auf einem Intervall der Länge 2π $\diamond$

Wir haben nun einige Eigenschaften von (2π-)periodischen Funktionen erarbeitet und gezeigt, dass, falls es eine trigonometrische Reihendarstellung der Funktion f gibt, die Fourier-Reihe die einzig sinnvolle Lösung darstellt. Dazu behandeln wir nun einige Beispiele:

(1.6) Beispiel
Wir wollen die Fourier-Reihen der folgenden Funktionen berechnen:

(a) $f : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, f(t) = t$
Offensichtlich ist f ungerade, da $f(-t) = -f(t)$ also folge mit (1.4):
$A_r = 0\ \forall\ r \in \mathbb{N}_0$ und

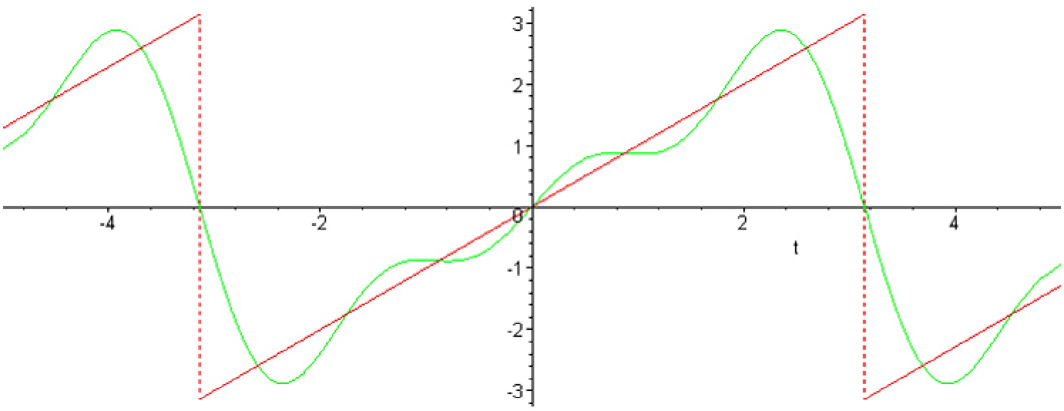
$$B_r = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t\,sin(rt)dt$$

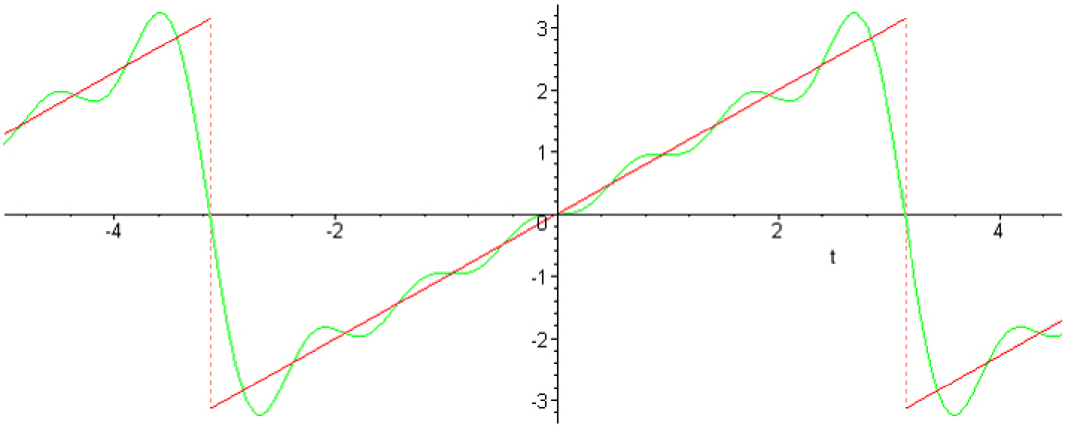
Wir integrieren partiell mit $u' := sin(rt), v := t \Rightarrow u = \frac{-1}{r}cos(rt), v' = 1$

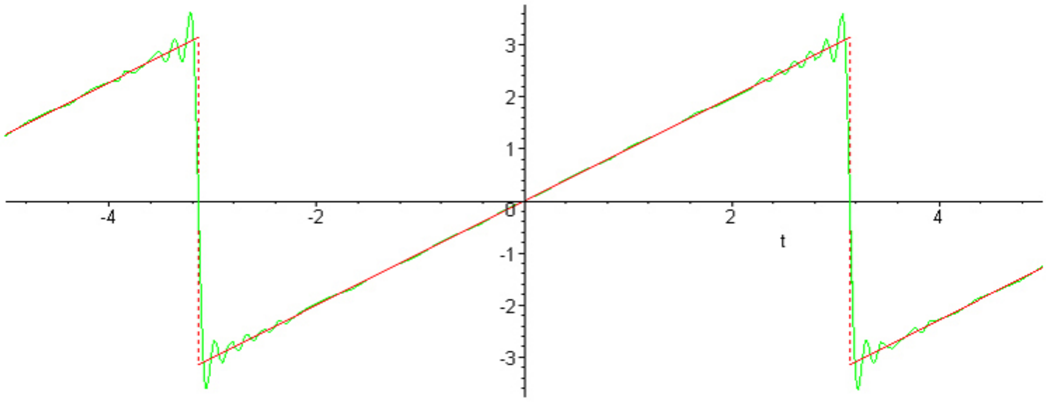
$$
\begin{aligned}
\Rightarrow B_r &= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{t\,cos(rt)}{r}\right]_0^{\pi} + \frac{2}{\pi r}\int_0^{\pi} cos(rt)\,dt \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{sin(rt)}{r^2} - \frac{t\,cos(rt)}{r}\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{2}{\pi}\left[0 - \frac{\pi}{r}cos(r\pi) - 0 + 0\right] \\
&= -2\frac{(-1)^r}{r} \\
&= 2\frac{(-1)^{r+1}}{r}
\end{aligned}
$$

Damit ist die Fourier-Reihe von f:

$$2\sum_1^{\infty}\frac{(-1)^{r+1}}{r}sin(rt)$$







Graph von f mit den Partialsummen bis 3, 6 und 40 Summanden

(b) $g : (-\pi, \pi) \to \mathbb{R}, g(t) = |t|$
Offensichtlich ist g gerade, da $g(-t) = g(t)$ also folgt mit (1.4):
$B_r = 0 \,\forall\, r \in \mathbb{N}$ und

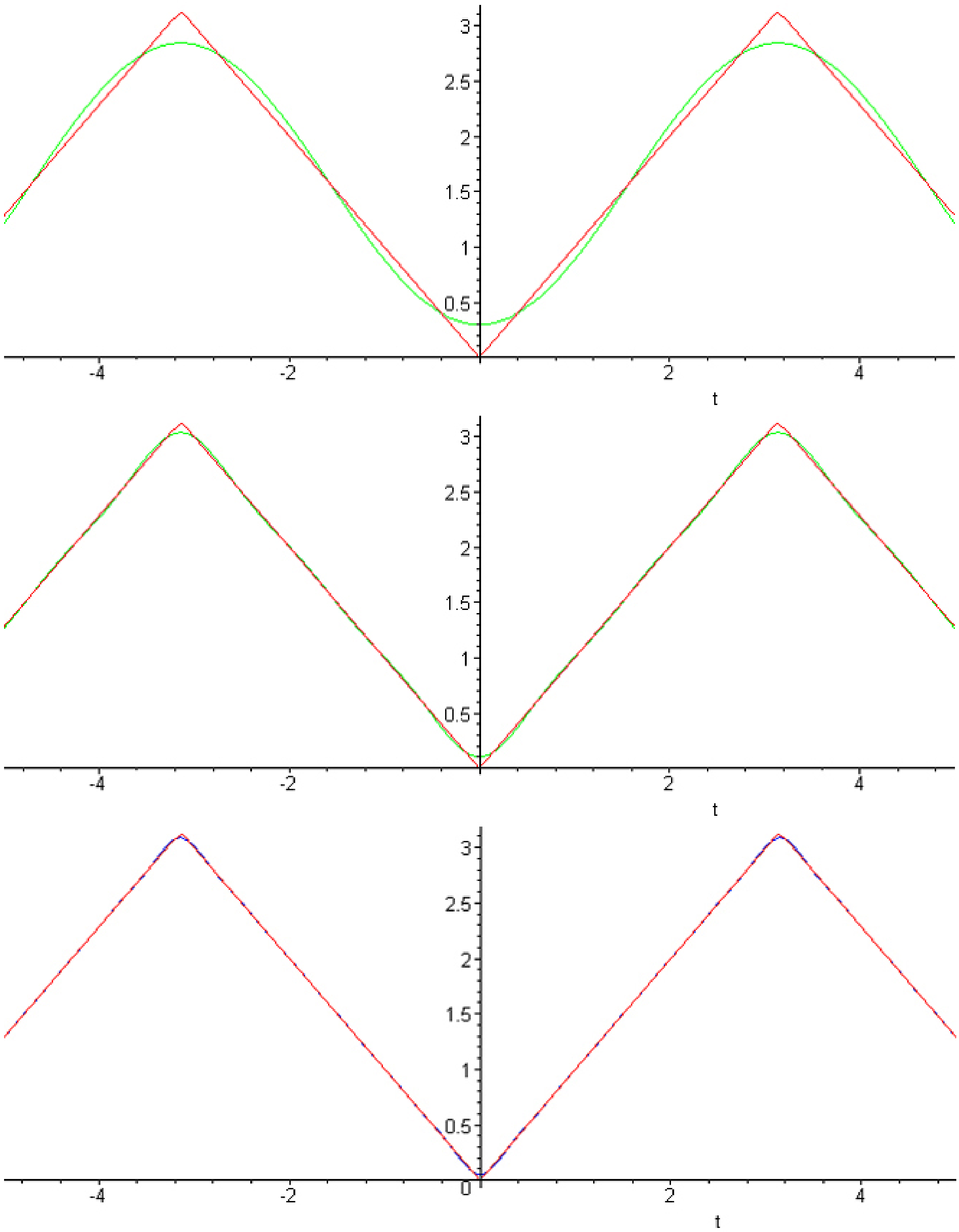
$$A_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi t dt = \frac{1}{\pi}t^2\Big|_0^\pi = \pi$$
$$A_r = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi |t|\, cos(rt)\, dt$$

wir integrieren partiell mit $u := |t| = t, 0 \leq t < \infty, v' := cos(rt) \Rightarrow u' = 1,$ $v = \frac{sin(rt)}{r}$

$$\begin{aligned}\Rightarrow A_r &= \frac{2}{\pi r}\Big[sin(rt)\, t\Big]_0^\pi - \frac{2}{\pi r}\int_0^\pi sin(rt)\, dt\\ &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{cos(rt) + rt\, sin(rt)}{r^2}\right]_0^\pi\\ &= \frac{2((-1)^r - 1)}{\pi r^2}\end{aligned}$$

Also ist die Fourier-Reihe von g:

$$\begin{aligned}&\frac{\pi}{2} - \sum_1^\infty \frac{2((-1)^r - 1)}{\pi r^2} cos(rt)\\ =&\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{r=1,3,5\ldots}\frac{1}{r^2}cos(rt)\\ =&\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{l=1}^\infty \frac{cos\big((2l-1)t\big)}{(2l-1)^2}\end{aligned}$$



Grapf von g mit den Partialsummen bis 1, 3 und 6 Summanden ◇

Offenbar schmiegt sich die Fourier-Reihe von g schon bei kleineren Summen besser an g an als die Reihe von f. Analytisch betrachtet liegt das daran, dass einerseits die Folge der 2. Reihe sehr viel schneller gegen 0 konvergiert, da
$\frac{1}{(2l-1)^2} \ll \frac{1}{n}$ und darum die ersten Terme bei g eine größere Rolle spielen als bei f. Andererseits spielt es eine Rolle, wie glatt eine Funktion ist. Je glatter die Funktion, desto leichter kann sie im Allgemeinen als Linearkombination von Sinus und Kosinus ausgedrückt werden. Dies ist bei der deutlich glatteren Funktion g leichter.
Nicht zu vergessen ist auch, dass die Folge von f alterniert, also Terme sich gegenseitig aufheben, was wiederum die Divergenz der Reihe verhindert.

Da es alles andere als selbstverständlich ist, dass die Fourier-Reihe zu einer Funktion auf dem Definitionsbereich konvergiert, betrachten wir zu diesem Problem:

(1.7) Bessels Ungleichung
Ist f 2π-periodisch, auf $[0, 2\pi]$ Riemann integrierbar und sind die Fourier-Koeffizienten C_r definiert wie in (III) so ist

$$\sum_{-\infty}^{\infty} |C_r|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 \, dt.$$

Beweis
Für eine komplexe Zahl z gilt: $|z|^2 = z\overline{z}$, also ist:

$$\begin{aligned}
&\left| f(t) - \sum_{-N}^{N} C_r \, e^{irt} \right|^2 \\
&= \left(f(t) - \sum_{-N}^{N} C_r \, e^{irt} \right) \overline{\left(f(t) - \sum_{-N}^{N} C_r \, e^{irt} \right)} \\
&= \left(f(t) - \sum_{-N}^{N} C_r \, e^{irt} \right) \left(\overline{f(t)} - \sum_{-N}^{N} \overline{C_r \, e^{irt}} \right) \\
&\overset{(*)}{=} \left(f(t) - \sum_{-N}^{N} C_r \, e^{irt} \right) \left(\overline{f(t)} - \sum_{-N}^{N} \overline{C}_r \, e^{-irt} \right) \\
&= |f(t)|^2 - \sum_{-N}^{N} \left[C_r \overline{f(t)} e^{irt} + \overline{C}_r f(t) \, e^{-irt} \right] + \sum_{m,r=-N}^{N} C_m \overline{C}_r e^{i(m-r)t}.
\end{aligned}$$

Zu (*):

$$\begin{aligned}
\overline{C_r e^{irt}} &= \overline{(A_r \; - \; i\,B_r)(cos(rt) \; + \; i\,sin(rt)))} \\
&= \overline{(A_r cos(rt) \; + \; B_r sin(rt)) \; + \; i(A_r sin(rt) \; - \; B_r cos(rt))} \\
&= (A_r cos(rt) \; + \; B_r sin(rt)) \; + \; i(B_r cos(rt) \; - \; A_r sin(rt)) \\
&= (A_r \; + \; i\,B_r)(cos(rt) \; - \; i\,sin(rt)) \\
&= \overline{C_r}(cos(-rt) \; + \; i\,sin(-rt)) \\
&= \overline{C_r} e^{-irt}
\end{aligned}$$

Nun wissen wir, dass gilt:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{irt}dt \; = \; C_r, \;\text{ und }\; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(m-r)t}dt \; = \begin{cases} 0 & \text{wenn } r \; \neq \; m \\ 1 & \text{wenn } r \; = \; m \end{cases}$$

Daraus folgt dann:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{-N}^{N} C_r e^{irt} \right|^2 dt$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \; - \; \sum_{-N}^{N} \left[C_r\overline{C}_r + \overline{C}_r C_r\right] + \sum_{-N}^{N} C_r\overline{C}_r$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \; - \; \sum_{-N}^{N} |C_r|^2 .$$

Da offensichtlich gilt:

$$0 \; \leq \; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left| f(t) - \sum_{-N}^{N} C_r e^{irt} \right|^2 dt \; = \; \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \; - \; \sum_{-N}^{N} |C_r|^2$$

folgt für $N \; \to \; \infty$ die Behauptung. □

Mit (IV) können wir zeigen, dass auch:

$$\frac{1}{4}|A_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}\left(|A_r|^2 + |B_r|^2\right) = \sum_{-\infty}^{\infty} |C_r|^2 \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt.$$

Wir werden später sehen, dass die Besselsche Ungleichung genau genommen eine Gleichung ist. Zunächst folgern wir daraus aber noch das

(1.8) Korollar
Die Fourier Koeffizienten A_r, B_r und C_r (sowie C_{-r}) konvergieren für $r \to \infty$ gegen 0. ◇

Beweis
$|A_r|^2$, $|B_r|^2$ und $|C_r|^2$ sind nach (1.7) die $r$ten Summanden konvergierender Reihen, also müssen sie für $n \to \infty$ verschwinden. □