Schriftliche Ausarbeitung
im Rahmen des Seminars zur Fourieranalysis

„Der Satz von FEJÉR und die CESÀRO-Summation“

vorgelegt von

SEBASTIAN MESS

dem Lehrstuhl A für Mathematik
der RWTH AACHEN

Betreuer:

PROF. DR. H. FÜHR
DIPL.-GYML. L. NÖTHEN

Aachen, den 16. Oktober 2007

Inhaltsverzeichnis

Der Satz von FEJÉR und die CESÀRO-Summation

Vortrag im Rahmen des Seminars zur Fourieranalysis, 30.10.2007

Sebastian Meß

Ziel dieses Vortrags ist die Darstellung des Satzes von FEJÉR, nach LEOPOLD FEJÉR (1880-1959), der eine der bedeutsamsten Aussagen über die Konvergenz von Fourierreihen enthält, sowie der CESÀRO-Summation, nach ERNESTO CESÀRO (1859-1906).

§ 1 Die CESÀRO-Summation

Bevor wir die CESÀRO-Summation definieren, wollen wir zunächst einen anderen Begriff einführen in der

(1.1) Definition.
Sei $(s_n)_{n\geq 0}$ eine Folge, $s_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

das CESÀRO-*Mittel* zu den Folgegliedern $s_j,\ 1 \leq j \leq n$. ◇

Wie angekündigt, kommen wir nun zur

(1.2) Definition.
Sei $(a_k)_{k\geq 0}$ eine Folge, $a_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$, $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ eine Reihe und $s_n = a_0 + ... + a_n$, $n \in \mathbb{N}_0$, die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$. Man nennt die Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ CESÀRO-*summierbar gegen s*, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} s_j = \lim_{n\to\infty} \frac{s_0 + ... + s_n}{n+1} = s.$$

◇

Kurzum gesagt, bedeutet Definition (1.2) also, dass unter den genannten Voraussetzungen der Grenzwert des arithmetischen Mittels der ersten $(n+1)$-Partialsummen der Reihe $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ s ist.

Mit diesen beiden Definitionen wollen wir das folgende überraschende Lemma betrachten.

(1.3) Lemma.
Sei $(s_n)_{n\geq 0}$ eine Folge, $s_n \in \mathbb{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

(i) *Gilt $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, so gilt auch $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = s$.*

(ii) *Es gibt eine Folge $(s_n)_{n\geq 0}$, so dass $(s_n)_{n\geq 0}$ divergiert und $(\sigma_n)_{n\geq 0}$ konvergiert.* $\diamond$

Beweis.

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Nach der Definition der Konvergenz von Folgen existiert wegen $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$ ein $N(\varepsilon)$, so dass $|s_n - s| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$.
Wir setzen $A := \sum_{j=0}^{N(\varepsilon)} |s_j - s|$ und wählen $M(\varepsilon) \geq N(\varepsilon)$, so dass $M(\varepsilon) \geq \frac{2A}{\varepsilon}$. Dann gilt für alle $n \geq M(\varepsilon)$

$$\left|\frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{n} s_j\right) - s\right| \underset{(*)}{=} \frac{1}{n+1}\left|\sum_{j=0}^{n}(s_j - s)\right| \underset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\left|s_j - s\right|$$

$$\underset{\substack{\text{Aufteilung}\\ \text{der Summe}}}{=} \frac{1}{n+1}\left(\sum_{j=0}^{N(\varepsilon)}\left|s_j - s\right| + \sum_{j=N(\varepsilon)+1}^{n}\left|s_j - s\right|\right) = \frac{1}{n+1}\left(A + \sum_{j=N(\varepsilon)+1}^{n}\left|s_j - s\right|\right)$$

$$\underset{(**)}{\leq} \frac{1}{n+1}\left(A + (n - N(\varepsilon))\frac{\varepsilon}{2}\right) \underset{(***)}{\leq} \frac{1}{n+1}\left((n+1)\frac{\varepsilon}{2} + (n+1)\frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon.$$

Zu $(*)$:
Offenbar gilt hier $\left|\frac{1}{n+1}(s_0 + ... + s_n) - s\right| = \frac{1}{n+1}\left|(s_0 + ... + s_n) - (n+1)s\right|$, weshalb die Umformung bei $(*)$ korrekt ist.

Zu $(**)$:
An der unteren Grenze der Summe $\sum_{j=N(\varepsilon)+1}^{n}\left|s_j - s\right|$ sieht man sofort, dass $j \geq N(\varepsilon)$ und damit $|s_j - s| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ gilt. Da die Summe aus $n - N(\varepsilon)$ Summanden besteht, tritt dieser Wert als Faktor in der Abschätzung bei $(*)$ auf.

Zu $(* * *)$:
Aus $M(\varepsilon) \geq \frac{2A}{\varepsilon}$ folgt sofort $A \leq \frac{M(\varepsilon)\varepsilon}{2}$. Wegen $M(\varepsilon) \leq n$ folgt auch $M(\varepsilon) \leq n+1$, so dass man

$$\frac{1}{n+1}\left(A + (n - N(\varepsilon))\frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{1}{n+1}\left((n+1)\frac{\varepsilon}{2} + (n - N(\varepsilon))\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

erhält. Da in jedem Fall $N(\varepsilon) \geq -1$ gilt, kann die rechte Seite der oben aufgeführten Ungleichung abgeschätzt werden zu

$$\tfrac{1}{n+1}\Big((n+1)\tfrac{\varepsilon}{2}+(n-N(\varepsilon))\tfrac{\varepsilon}{2}\Big) \leq \tfrac{1}{n+1}\Big((n+1)\tfrac{\varepsilon}{2}+(n+1)\tfrac{\varepsilon}{2}\Big)=\varepsilon,$$

woraus die Behauptung folgt.

(ii) Sei $(s_n)_{n\geq 0} = ((-1)^n)_{n\geq 0}$. Wegen $\liminf\limits_{n\to\infty}(-1)^n = -1 \neq 1 = \limsup\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ folgt die Divergenz der Folge. Aber $\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_j$ konvergiert, denn

$$\left|\tfrac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} s_j\right| \underset{\substack{\frac{1}{n+1}>0\\ \forall n\in\mathbb{N}_0}}{=} \tfrac{1}{n+1}\left|\sum_{j=0}^{n} s_j\right| = \tfrac{1}{n+1}\underbrace{\left(\frac{\cos(n\pi)}{2}+\frac{1}{2}\right)}_{|\cdot|\leq 1} \leq \tfrac{1}{n+1}$$

und $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$. □

§ 2 Die Darstellung des Satzes von Fejér

In diesem Paragraphen soll der Satz von Fejér formuliert werden, der – wie in der Einleitung bereits erwähnt wurde – eine zentrale Aussage in der Fourieranalysis darstellt. Doch bevor wir zur Formulierung dieses Satzes kommen, wollen wir uns kurz einige wichtige Defintionen in Erinnerung rufen.

(2.1) Definition.
Wir wollen stets auf dem „Kreis" $\mathbb{T} := \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{r+2\pi\mathbb{Z};\ r\in\mathbb{R}\} = \{\{r+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\};\ r\in\mathbb{R}\} = \{\{r+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\};\ 0\leq r\leq 2\pi\}$ arbeiten. $\mathbb{T}$ heißt auch *Faktorengruppe von* $\mathbb{R}$ *modulo* $2\pi\mathbb{Z}$. ◇

Aus dieser Definiton geht sofort hervor, dass aus $\theta\in\mathbb{T}$ stets $\theta+2\pi=\theta$ folgt. Somit ist jede Funktion mit $\mathbb{T}$ als Definitonsbereich 2π-periodisch.

Eine weitere Definition, die wir später brauchen werden, ist die

(2.2) Definition.
Sei $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ oder $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann definiert man die Fourier-*Koeffizienten* von f durch

$$\hat{f}(r) = \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} f(t)\exp(-irt)dt = \tfrac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} f(t)\exp(-irt)dt. \qquad \diamond$$

Ebenso sollten wir betrachten, wie die n-te Partialsumme einer Fourier-Reihe definiert war.

(2.3) Definition.
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ oder $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist die *n-te Partialsumme* von der zu f gehörigen Fourier-Reihe an der Stelle $t \in \mathbb{T}$ definiert durch

$$S_n(f,t) = \sum_{r=-n}^{n} \hat{f}(r) \exp(irt). \qquad \diamond$$

Damit können wir die Bemerkung (2.4) formulieren.

(2.4) Bemerkung.
Offenbar gilt mit Definition (1.2) und Definition (2.3)

$$\sigma_n(f,t) = \tfrac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j(f,t) = \tfrac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} \sum_{r=-j}^{j} \hat{f}(r) \exp(irt) \underset{(*)}{=} \sum_{r=-n}^{n} \tfrac{n+1-|r|}{n+1} \hat{f}(r) \exp(irt).$$

Zu $(*)$:

Wird die Doppelsumme

$$\sum_{j=0}^{n} \sum_{r=-j}^{j} \hat{f}(r) \exp(irt)$$

betrachtet, so wird schnell ersichtlich, dass der Summand für $r = 0$ bei gegebenem n mit dem Faktor $(n+1)$ auftritt, die Summanden für $r = -1$ sowie $r = 1$ jeweils mit dem Faktor $(n+1-1) = n$, die Summanden für $r = -2$ sowie $r = 2$ jeweils mit dem Faktor $(n+1-2) = (n-1)$, ..., die Summanden für $r = n$ sowie für $r = -n$ jeweils mit dem Faktor $(n+1-n) = 1$.

Wegen dieser Symmetrieeigenschaft kann die oben stehende Doppelsumme vereinfacht werden zu

$$\sum_{r=-n}^{n} \tfrac{n+1-|r|}{n+1} \hat{f}(r) \exp(irt). \qquad \diamond$$

Nach dieser Bemerkung gelingt es uns, den Satz von Fejér zu formulieren. Der erste Teil dieses Satzes besagt, dass die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Fourierreihe einer Riemann-integrierbaren, 2π-periodischen Funktion f an der Stelle t gegen den Funktionswert von f an der Stelle t konvergieren, vorausgesetzt, f ist stetig in t.
Der zweite Teil besagt, dass die arithmetischen Mittel der Partialsummen der Fourierreihe einer stetigen, 2π-periodischen Funktion f an der Stelle t **gleichmäßig** gegen den Funktionswert von f an der Stelle t konvergieren.

Mathematisch lässt sich der Satz von Fejér folgendermaßen formulieren.

(2.5) Satz.
(i) *Ist die Funktion $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ Riemann-integrierbar und f stetig in $t \in \mathbb{T}$, dann gilt*

$$\boxed{\sigma_n(f,t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j(f,t) = \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \hat{f}(r) \exp(irt) \to f(t) \text{ für } n \to \infty.}$$

(ii) *Ist die Funktion $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetig, dann gilt*

$$\boxed{\sigma_n(f,\ ) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^{n} S_j(f,\ ) = \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \hat{f}(r) \exp(irt) \underset{\text{glm}}{\to} f \text{ für } n \to \infty.} \qquad \diamond$$

Im nächsten Paragraphen wollen wir einige Vorbereitungen für den Beweis zum Satz von Fejér vornehmen.

§ 3 Beweisvorbereitungen

Begonnen werden soll dabei mit der folgenden Bemerkung.

(3.1) Bemerkung.
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ RIEMANN-integrierbar. Dann gilt offenbar mit Bemerkung (2.4) und Definition (2.2)

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,t) &= \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \hat{f}(r)\exp(irt) \\
&= \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \frac{1}{2\pi} \left(\int_{\mathbb{T}} f(x)\exp(-irx)dx \right) \exp(irt) \\
&\underset{\substack{\text{Vertauschungssatz} \\ \text{(Analysis II)}}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \exp(ir(t-x))dx \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) K_n(t-x)dx,
\end{aligned}$$

wobei der so genannte FEJÉR-*Kern* definiert wird durch

$$\boxed{K_n(s) := \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \exp(irs).}$$ ⋄

Im Folgenden soll die Struktur von K_n etwas eingehender untersucht werden. Dazu formulieren wir zunächst das

(3.2) Lemma.
Wir behaupten, dass für den FEJÉR-*Kern*

$$K_n(s) = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} \right)^2 \quad \textit{für } s \neq 0 \textit{ und}$$

$$K_n(s) = n+1 \quad \textit{für } s = 0 \textit{ gilt.}$$ ⋄

Beweis.
Wegen

$$K_n(s) := \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \exp(irs) = \frac{1}{n+1} \sum_{r=-n}^{n} (n+1-|r|) \exp(irs)$$

genügt es zu zeigen, dass

$$\sum_{r=-n}^{n} (n+1-|r|) \exp(irs) = \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{\sin(\frac{s}{2})} \right)^2 \quad \text{für } s \neq 0.$$

$\boxed{\text{1. Fall:}}$ Sei $s \neq 0$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{r=-n}^{n} (n+1-|r|) \exp(irs) &\underset{(*)}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} \exp\left(i\left(k - \frac{n}{2}\right) s\right) \right)^2 \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\exp\left(-\frac{ins}{2}\right)}_{\text{Konstante}} \exp(iks) \right)^2 \\
&= \left(\exp\left(-\frac{ins}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} \exp(iks) \right)^2 \\
&= \left(\exp\left(-\frac{ins}{2}\right) \sum_{k=0}^{n} (\exp(is))^k \right)^2 \\
&\underset{\substack{\text{Geometrische Summenformel} \\ s \neq 0 \Rightarrow \exp(is) \neq 1}}{=} \left(\exp\left(-\frac{ins}{2}\right) \frac{1 - \exp(i(n+1)s)}{1 - \exp(is)} \right)^2 \\
&\underset{\substack{\text{Erweitern mit} \exp\left(-\frac{is}{2}\right) \\ \text{und Ausmultiplizieren}}}{=} \left(\frac{\exp\left(-\frac{i(n+1)s}{2}\right) - \exp\left(\frac{i(n+1)s}{2}\right)}{\exp\left(-\frac{is}{2}\right) - \exp\left(\frac{is}{2}\right)} \right)^2 \\
&\underset{\sin(z) := \frac{1}{2i}(\exp(iz) - \exp(-iz))}{=} \left(\frac{\sin\left(\frac{(n+2)s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)} \right)^2.
\end{aligned}$$

Zu $(*)$:
Diesen Schritt kann man beweisen, indem man das Cauchy-Produkt betrachtet. Offenbar gilt

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{k=0}^{n} \exp\left(i\left(k-\frac{n}{2}\right)s\right)\right)^2 &= \left(\sum_{k=0}^{n} \exp\left(i\left(k-\frac{n}{2}\right)s\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \exp\left(i\left(k-\frac{n}{2}\right)s\right)\right) \\
&\underset{1\,=\,a_k,\ 1\,=\,b_k}{=} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \exp\left(i\left(k-\frac{n}{2}\right)s\right)\right)\left(\sum_{k=0}^{n} b_k \exp\left(i\left(k-\frac{n}{2}\right)s\right)\right) \\
&\underset{\text{(Analysis I)}}{=} \sum_{k=0}^{2n} \left(\underbrace{\sum_{l=\max(0,k-n)}^{\min(k,n)} a_l b_{k-l}}_{=:\,c_k}\right) \exp(is(k-n))
\end{aligned}
$$

Wird $r := (k-n) (\Leftrightarrow k = n+r)$ gesetzt, kann man c_k zu $n+1-|r|$ bestimmen, wenn man vorher die Fälle $k = n,\ k < n$ und $k > n$ diskutiert. Daraus folgt dann die Behauptung.

$\boxed{\text{2.Fall:}}$ Sei $s = 0$.

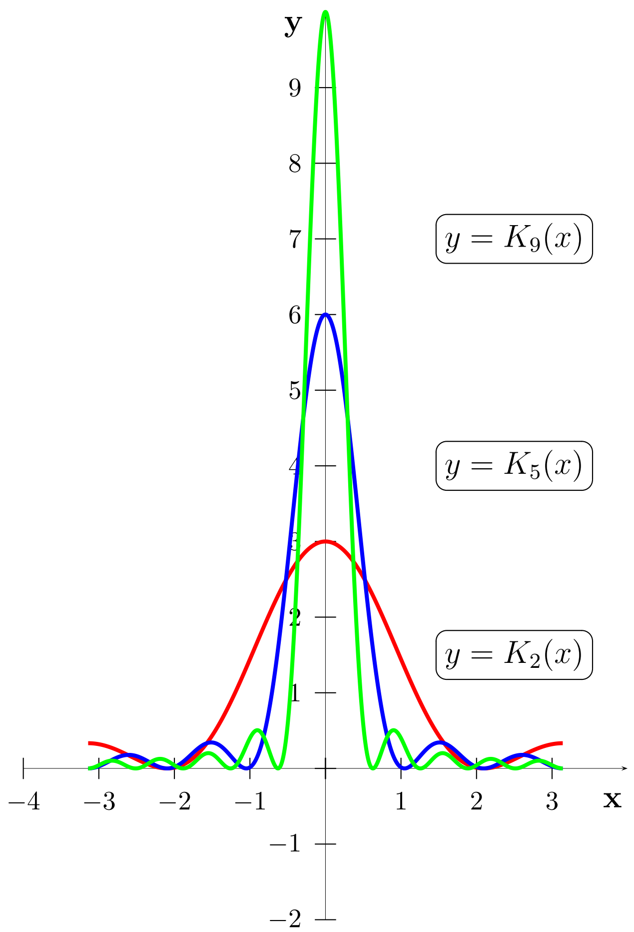
Dann gilt

$$
\begin{aligned}
K_n(0) &= \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \underbrace{\exp(0)}_{=\,1} \\
&= -\frac{1}{n+1} \sum_{r=-n}^{n} (|r| - (n+1)) \\
&= -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{r=-n}^{n} |r| - \sum_{r=-n}^{n} (n+1) \right) \\
&= -\frac{1}{n+1} \left(\sum_{r=-n}^{n} |r| - (2n+1)(n+1) \right) \\
&= \left(-\frac{1}{n+1} \sum_{r=-n}^{n} |r| \right) + (2n+1) \\
&= \left(-\frac{2}{n+1} \sum_{r=1}^{n} r \right) + (2n+1) \\
&= \left(-\frac{2}{n+1} \frac{n(n+1)}{2} \right) + (2n+1) \\
&= n+1.
\end{aligned}
$$

Somit ist es uns gelungen, das Lemma (3.2) zu verifizieren. □

Um Informationen darüber zu erhalten, wie sich der Fejér-Kern bei wachsendem n verhält, betrachten wir die folgende Illustration im Beispiel (3.3).

(3.3) Beispiel.
Die rote Kurve repräsentiert den Fejér-Kern für $n = 2$, die blaue Kurve repräsentiert den Fejér-Kern für $n = 5$ und die grüne Kurve beschreibt den Fejér-Kern für $n = 9$.



$$K_n(x) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}\right)^2, \quad x \neq 0. \qquad K_n(x) = n+1, \quad x = 0.$$

◇

Leicht zu sehen ist, dass alle Kurven oberhalb der x-Achse verlaufen. Außerdem scheinen sich die Kurven der x-Achse anzuschmiegen, d. h. die x-Achse scheint Asymptote zu sein. Die wesentlichen Eigenschaften des Fejér-Kerns seien zusammengefasst im

(3.4) Lemma.

(i) $K_n(s) \geq 0$ *für alle* $s \in \mathbb{T}$.

(ii) $K_n(s) \underset{\text{glm}}{\longrightarrow} 0$ *außerhalb des Intervalls* $[-\delta, \delta]$ *für alle* $\delta > 0$.

(iii) $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} K_n(s) ds = 1.$ ◇

Beweis.

(i) Klar, da in $K_n(s) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}\right)^2$ ein Quadrat auftaucht.

(ii) Aus der Analysis II wissen wir, dass eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $D \subset \mathbb{R}$ genau dann gleichmäßig gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ konvergiert, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$, wobei mit $\|\cdot\|$ die Supremumsnorm gemeint ist. Diesen Ansatz wollen wir bei (ii) anwenden. Es ist

$$|K_n(s) - 0| \underset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{n+1}\left(\frac{\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}\right)^2 \underset{\left|\sin\left(\frac{(n+1)s}{2}\right)\right| \leq 1 \ \forall s \in \mathbb{T}}{\leq} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{s}{2}\right)}\right)^2 \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right)^2.$$

$$\Rightarrow \|K_n(s)\| \leq \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right)^2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \|K_n(s)\| = 0, \text{ da } \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{\sin\left(\frac{\delta}{2}\right)}\right)^2 = 0$$

für alle $\delta \leq |s| \leq \pi$.

(iii) Um (iii) zu verifizieren, werden wir auf die ursprüngliche Definition von $K_n(s)$ zurückgreifen. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) ds &\underset{(3.1)}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \mathrm{e}^{irs} ds \\ &\underset{\text{Vertauschungssatz}}{=} \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^{irs} ds \end{aligned}$$

Wir wollen zunächst betrachten, wie sich dieser Ausdruck für $r = 0$ verhält. Wird $r = 0$ in den Teil hinter dem Summenzeichen eingesetzt, so ergibt sich

$$\boxed{\frac{n+1-|0|}{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} ds = \frac{1}{2\pi} s\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1.}$$

Für alle anderen $r \in \{-n, -n+1, ..., -1, 1, ..., n-1, n\}$ ergibt sich der Wert 0, da für $r \neq 0$

$$\boxed{\sum_{\substack{r=-n\\r\neq 0}}^{n} \tfrac{n+1-|r|}{n+1} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{irs} ds = \sum_{\substack{r=-n\\r\neq 0}}^{n} \tfrac{n+1-|r|}{n+1} \tfrac{1}{r\pi} \underbrace{\frac{1}{2i}\left(e^{ir\pi} - e^{-ir\pi}\right)}_{=\sin(r\pi)}}$$

gilt und $\sin(r\pi) = 0$ für $r \in \{-n, -n+1, ..., -1, 1, ..., n-1, n\}$. □

Bevor wir mit der Entwicklung des Beweises zum Satz von Fejér fortfahren, sei noch kurz auf die folgende Bemerkung verwiesen.

(3.5) Bemerkung.
In Bemerkung (3.1) wurde hergeleitet, dass

$$\sigma_n(f,t) = \tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(x) K_n(t-x) dx.$$

Mit der Substitution $y := t - x$ ($\Rightarrow dx = -dy$) erhält man

$$\boxed{\sigma_n(f,t)} = \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) K_n(t-x) dx = -\tfrac{1}{2\pi} \int_{y(-\pi)}^{y(\pi)} f(t-y) K_n(y) dy = -\tfrac{1}{2\pi} \int_{t+\pi}^{t-\pi} f(t-y) K_n(y) dy$$

$$= \tfrac{1}{2\pi} \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(t-y) K_n(y) dy = \boxed{\tfrac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} f(t-y) K_n(y) dy.} \qquad \diamond$$

Nach dieser Bemerkung sind wir erstmals in der Lage, nachzuvollziehen, warum der Satz von Fejér wahr ist. Wir wollen ein beliebig kleines, aber festes $\delta > 0$ betrachten und hinreichend große n. Dann gilt offenbar

$$\sigma_n(f,t) \underset{(3.5)}{=} \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) f(t-s) ds \approx \tfrac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} K_n(s) f(t-s) ds, \qquad (*)$$

da der Integralwert außerhalb des Intervalls $[-\delta, \delta]$ wegen Lemma (3.4) (ii) vernachlässigt werden kann, d. h. die Fläche unter den Fejér-Kernen ist in einer Umgebung um 0 am größten (siehe auch Beispiel (3.3)).

Weil f stetig in $t \in \mathbb{T}$ und $\delta > 0$ beliebig klein (fest) gewählt ist, ist f nahezu konstant auf dem Intervall $[t-\delta, t+\delta]$. Daraus folgt sofort $\underbrace{f(t-s) \approx f(t)}_{(**)}$ für $s \in [-\delta, \delta]$.

Unter Berücksichtigung der gerade gewonnenen Ergebnisse können wir folgern, dass

$$\sigma_n(f,t) \underset{(*),\,(**)}{\approx} \tfrac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s) f(t) ds = f(t)\left(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\delta}^{\delta} K_n(s) ds\right) \underset{(***)}{\approx} f(t)\left(\tfrac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(s) ds\right).$$

Zu $(***)$:

Diese Schätzung ist möglich, da K_n auf dem Intervall $[-\delta, \delta]$ die größten Funktionswerte annimmt (siehe Beispiel (3.3)).

Wenden wir in einem letzten Schritt das Lemma (3.4) (iii) an, so erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$\boxed{\sigma_n(f,t) \approx f(t),}$$

wodurch – ohne eine exakten Beweis zu geben – sofort klar ist, dass der Satz von FEJÉR wahr ist. Im nächsten Schritt gilt es, einen mathematisch exakten Beweis für den eingangs formulierten Satz (2.5) (i) zu notieren.

§ 4 Der Beweis zum Satz von FEJÉR

Zur Erinnerung sei Satz (2.5) (i) kurz wiederholt.

Erinnerung.

Ist die Funktion $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ RIEMANN-integrierbar und f stetig in $t \in \mathbb{T}$, dann gilt

$$\boxed{\sigma_n(f,t) = \tfrac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_j(f,t) = \sum_{r=-n}^{n} \tfrac{n+1-|r|}{n+1}\hat{f}(r)\exp(irt) \to f(t) \text{ für } n \to \infty.}$$

Beweis.
Aus der RIEMANN-Integrierbarkeit von f folgt die Beschränktheit von f (vgl. Analysis II), d. h. es gilt

$$\boxed{\text{(a)}\ \ |f(s)| \leq M \quad \text{für ein } M \in \mathbb{R} \text{ und für alle } s \in \mathbb{T}.}$$

Nach Voraussetzung ist f stetig in $t \in \mathbb{T}$. Nach der Definition der Stetigkeit muss also für alle $\varepsilon > 0$ (mindestens) ein $\delta(t, \varepsilon) > 0$ existieren mit

$$\boxed{\text{(b)}\ \ |f(s) - f(t)| \leq \tfrac{\varepsilon}{2} \quad \text{für alle } t \in \mathbb{T} \text{ mit } |t - s| < \delta.}$$

Des Weiteren gilt, dass

$$\boxed{\text{(c)}\ \ \int\limits_{s\in[-\delta,\delta]} |K_n(s)| ds \underset{(3.4)\ (i)}{=} \int\limits_{s\in[-\delta,\delta]} K_n(s) ds \leq \int\limits_{\mathbb{T}} K_n(s) ds.}$$

Sobald $\delta(t, \varepsilon)$ fest gewählt wird, folgt aus Lemma (3.4) (ii), dass ein $N(t, \varepsilon)$ existiert, so dass

$$\boxed{\text{(d)}\ \ |K_n(s)| \leq \tfrac{\varepsilon}{4M} \quad \text{für alle } s \notin [-\delta, \delta] \text{ und } n \geq N(t, \varepsilon).}$$

Mit diesen vier Aussagen sowie Lemma (3.4) wird uns der exakte Beweis zum Satz von Fejér gelingen:

$$
\begin{aligned}
|\sigma_n(f,t)-f(t)| &\underset{(3.5)}{=} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)K_n(s)ds - f(t)\cdot 1\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)K_n(s)ds - f(t)\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(s)ds}_{=1 \text{ nach (3.4) (iii)}}\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} f(t-s)K_n(s)ds - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(s)f(t)ds\right| \\
&= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} (f(t-s)-f(t))K_n(s)ds\right| \\
&\underset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} \left|\frac{1}{2\pi}\int_{s\in[-\delta,\delta]} (f(t-s)-f(t))K_n(s)ds\right| + \left|\frac{1}{2\pi}\int_{s\notin[-\delta,\delta]} (f(t-s)-f(t))K_n(s)ds\right| \\
&\underset{\triangle-\text{Ungl.}}{\leq} \frac{1}{2\pi}\int_{s\in[-\delta,\delta]} \underbrace{|(f(t-s)-f(t))|}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}\ \forall |s|<\delta}|K_n(s)|ds + \frac{1}{2\pi}\int_{s\notin[-\delta,\delta]} (\underbrace{|f(t-s)|}_{\leq M} + \underbrace{|f(t)|}_{\leq M})|K_n(s)|ds \\
&\underset{\substack{\triangle\text{-Ungl.}\\ \text{(a), (b)}}}{\leq} \frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{s\in[-\delta,\delta]} |K_n(s)|ds + \frac{2M}{2\pi}\int_{s\notin[-\delta,\delta]} |K_n(s)|ds \\
&\underset{\text{(c), (d)}}{\leq} \underbrace{\frac{\varepsilon}{2}\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} K_n(s)ds}_{=1 \text{ nach (3.4) (iii)}} + \frac{2M}{2\pi}\int_{s\notin[-\delta,\delta]} \frac{\varepsilon}{4M}ds = \frac{\varepsilon}{2} + \underbrace{\frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{s\notin[-\delta,\delta]} ds}_{\leq \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} ds = \frac{\varepsilon}{2}} \\
&\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

für alle $n \geq N(t,\varepsilon) \Rightarrow$ Behauptung. □

Wir wollen uns nun dem Beweis zum zweiten Teil des Satzes von Fejér zuwenden. Doch vorher wollen wir uns auch diesen Teil wieder kurz in Erinnerung rufen.

Erinnerung.

Ist die Funktion $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetig, dann gilt

$$\boxed{\sigma_n(f,\ ) = \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n} S_j(f,\ ) = \sum_{r=-n}^{n} \frac{n+1-|r|}{n+1}\hat{f}(r)\exp(irt) \underset{\text{glm}}{\to} f \text{ für } n \to \infty.}$$

Beweis.
Da $\mathbb{T}$ ein Kompaktum ist und wir aus der Analysis I wissen, dass jede stetige Funktion auf einem Kompaktum gleichmäßig stetig ist, funktioniert der Beweis zum zweiten Teil des Satzes völlig analog zum ersten Teil des Satzes, wenn man $\delta(t,\varepsilon)$ durch $\delta(\varepsilon)$ sowie $N(t,\varepsilon)$ durch $N(\varepsilon)$ ersetzt. □

Zum Abschluss dieser Ausarbeitung sollen noch zwei wesentliche Folgerungen aus dem Satz von Fejér thematisiert werden.

§ 5 Folgerungen

Eine sehr schnell zu beweisenden Aussage stellt das folgende Korollar dar.

(5.1) Korollar.
Seien $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen mit $\hat{f}(r) = \hat{g}(r)$, d. h. die Fourier*-Koeffizienten von f und g stimmen überein für alle $r \in \mathbb{Z}$. Dann gilt*

$$f = g, \text{ d. h. } f(t) = g(t)\ \forall t \in \mathbb{T}. \qquad \diamond$$

Beweis.
Mit Bemerkung (2.4) und Satz (2.5) (i) erhalten wir

$$0 = \sigma_n(f,t) - \sigma_n(g,t) \underset{n\to\infty}{\to} f(t) - g(t) \Rightarrow f(t) = g(t)\ \forall t \in \mathbb{T} \Rightarrow f = g. \qquad \square$$

Kurz gesagt, bedeutet dieses Korollar also, dass eine stetige Funktion eindeutig durch ihre Fourier-Koeffizienten bestimmt ist.

Eine weitere Folgerung lässt sich dem zweiten Teil des Satzes von Fejér entnehmen. Diese Folgerung wollen wir zusammenfassen im

(5.2) Korollar.
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\varepsilon > 0$. Dann existiert (mindestens) eine trigonometrische Polynomfunktion P mit $\sup_{t \in \mathbb{T}} |P(t) - f(t)| \leq \varepsilon$. ◇

Beweis.
Wir wollen uns in Erinnerung rufen, dass eine trigonometrische Polynomfunktion immer von der Form

$$Q(t) = \sum_{r=-n}^{n} a_r \exp(irt), \quad t \in \mathbb{T},$$

ist. Wird $\sigma_n(f, \ )$ betrachtet, so lässt sich feststellen, dass wegen

$$\sigma_n(f, \ ) = \sum_{r=-n}^{n} \underbrace{\frac{n+1-|r|}{n+1} \hat{f}(r)}_{=:a_r} \exp(irt)$$

auch $\sigma_n(f, \ )$ eine trigonometrische Polynomfunktion ist. Mit Satz (2.5) (ii) folgt

$$\sigma_n(f, \ ) \underset{\text{glm}}{\to} f$$

und damit die Behauptung. □

§ 6 Quellen

1. Körner, T.: Fourier Analysis, Cambridge 1990.
2. Körner, T.: Exercises For Fourier Analysis, Cambridge 1993.
3. Krieg, A.: Analysis I, Aachen 2005.
4. Krieg, A.: Analysis II, Aachen 2006.