

Schriftliche Ausarbeitung  
im Rahmen des Seminars zur Fourieranalysis

zum Thema

# Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

vorgelegt von  
*Simone Steinmetzer*

Betreuer:  
Prof. Dr. H. Führ  
Dipl.-Gyml. L. Nöthen

Lehrstuhl A für Mathematik  
RWTH-Aachen

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Die De La Vallée Poussin-Summe</b>	<b>3</b>
1.1	Erinnerung . . . . .	3
1.2	Die De La Vallée Poussin-Summe . . . . .	4
1.3	Konvergenzeigenschaften . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Das Gibbs-Wilbraham-Phänomen</b>	<b>13</b>
2.1	Exkurs: Das Michelson-Interferometer . . . . .	13
2.2	Das Gibbs-Wilbraham-Phänomen . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Quellen</b>	<b>24</b>
<b>4</b>	<b>Anhang A</b>	<b>25</b>

---

# Punktweise Konvergenz von Fourierreihen

Vortrag zum Seminar zur Fourieranalysis, 08.01.2008

Simone Steinmetzer

---

Das Ziel dieses Vortrages ist die Betrachtung der punktweisen Konvergenz von Fourierreihen, sowohl für stetige, als auch für nicht stetige Funktionen.

Wir wollen Konvergenzkriterien für Fourierreihen entwickeln, die zu einer größeren Klasse von Funktionen gehören, als die bisher betrachteten.

Zu diesem Zweck werden wir zunächst eine neue Summe einführen, mit deren Hilfe wir ein neues Konvergenzkriterium für die Fouriersummen stetiger Funktionen erarbeiten können.

Anschließend werden wir uns mit dem Konvergenzverhalten an den Sprungstellen nicht stetiger Funktionen befassen. Dazu werden wir die Sägezahnfunktion betrachten.

## §1 Die De La Vallée Poussin-Summe

In diesem Kapitel werden Kriterien für die Konvergenz von Fourierreihen erarbeitet. Wir beginnen damit eine neue Summe einzuführen, die zwischen der Fouriersumme  $S_n(f, t)$  und der Fejérsumme  $\sigma_n(f, t)$  angesiedelt werden kann.

Diese Summe wurde erstmals von einem belgischen Mathematiker namens Charles-Jean Gustave Nicolas de La Vallée Poussin (1866-1962) eingeführt.

— Erinnerung —

Wir wollen zunächst noch einmal an die Definitionen der Fouriersumme  $S_n(f, t)$  und der Fejérsumme  $\sigma_n(f, t)$ , die aus den vorherigen Vorträgen bereits bekannt sind, erinnern.

### (1.1) Bemerkung

Im Folgenden sei der Torus  $\mathbb{T}$  stets identifiziert mit der „Kreislinie“

$$\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} = \{r + 2\pi k; k \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < 2\pi\}.$$

◇

### (1.2) Bemerkung

a) Es sei  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  Riemann-integrierbar. Dann ist die Fouriersumme

$$S_n(f, t) = \sum_{r=-n}^n \hat{f}(r) \exp(irt)$$

mit den Fourierkoeffizienten

$$\hat{f}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \exp(-irt) dt$$

die n-te Partialsumme der Fourierreihe von  $f$  an der Stelle  $t \in \mathbb{T}$ .

b) Die Fejérsumme  $\sigma_n(f, t)$  ist definiert durch das Cesàro-Mittel:

$$\sigma_n := \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n s_j,$$

wobei die  $s_j$ ,  $1 \leq j \leq n$  die Folgenglieder einer Folge  $(s_n)_{n \geq 0}$  mit  $s_n \in \mathbb{C}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  sind.

Mit dem Fejér-Kern

$$K_n(t) = \sum_{r=-n}^n \frac{n+1-|r|}{n+1} \exp(irt)$$

und Teil a) ergibt sich die Fejérsumme als Mittelwert der Partialsummen  $S_j(f, t)$ ,  $j = 0 \dots n$ :

$$\sigma_n(f, t) = \frac{1}{n+1} \sum_{j=0}^n S_j(f, t) = \sum_{r=-n}^n \frac{n+1-|r|}{n+1} \hat{f}(r) \exp(irt). \quad \diamond$$

— Die De La Vallée Poussin-Summe —

Die vorangegangene Bemerkung führt auf folgende neue

**(1.3) Definition (De La Vallée Poussin-Summe)**

Wir definieren die Summe nach de La Vallée Poussin durch

$$\sigma_{n,m}(f, t) := \frac{1}{m-n} \cdot ((m+1)\sigma_m(f, t) - (n+1)\sigma_n(f, t)),$$

wobei  $m > n \geq 0$  gilt und  $f$  Riemann-integrierbar ist. ◇

**(1.4) Bemerkung**

Durch Einsetzen der Fejérsummen  $\sigma_m(f, t)$  und  $\sigma_n(f, t)$  erhält man:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{n,m}(f, t) &= \frac{1}{m-n} \left( (m+1)\sigma_m(f, t) - (n+1)\sigma_n(f, t) \right) \\
 \stackrel{(1.2)b)}{=} & \frac{1}{m-n} \left( (m+1) \sum_{r=-m}^m \frac{m+1-|r|}{m+1} \hat{f}(r) \exp(irt) \right. \\
 & \left. - (n+1) \sum_{r=-n}^n \frac{n+1-|r|}{n+1} \hat{f}(r) \exp(irt) \right) \\
 &= \frac{1}{m-n} \left( \sum_{r=-m}^m (m+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) - \sum_{r=-n}^n (n+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) \right) \\
 &= \frac{1}{m-n} \left( \sum_{r=-m}^{-n-1} (m+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) + \sum_{r=-n}^n (m+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) \right. \\
 & \left. + \sum_{r=n+1}^m (m+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) + \sum_{r=-n}^n -(n+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) \right) \\
 &= \frac{1}{m-n} \left( \sum_{r=-m}^{-n-1} (m+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) + \sum_{r=n+1}^m (m+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) \right. \\
 & \left. + \sum_{r=-n}^n (m+1-|r|-n-1+|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) \right) \\
 &= \frac{1}{m-n} \left( \sum_{r=-m}^{-n-1} (m+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) + \sum_{r=n+1}^m (m+1-|r|) \hat{f}(r) \exp(irt) \right. \\
 & \left. + \sum_{r=-n}^n (m-n) \hat{f}(r) \exp(irt) \right) \\
 \stackrel{(1.2)a)}{=} & \sum_{r=-m}^{-n-1} \frac{m+1-|r|}{m-n} \hat{f}(r) \exp(irt) + S_n(f, t) + \sum_{r=n+1}^m \frac{m+1-|r|}{m-n} \hat{f}(r) \exp(irt).
 \end{aligned}$$

◇

Die Definition der De La Vallée Poussin-Summe lässt sich anhand des folgenden Bildes verdeutlichen:

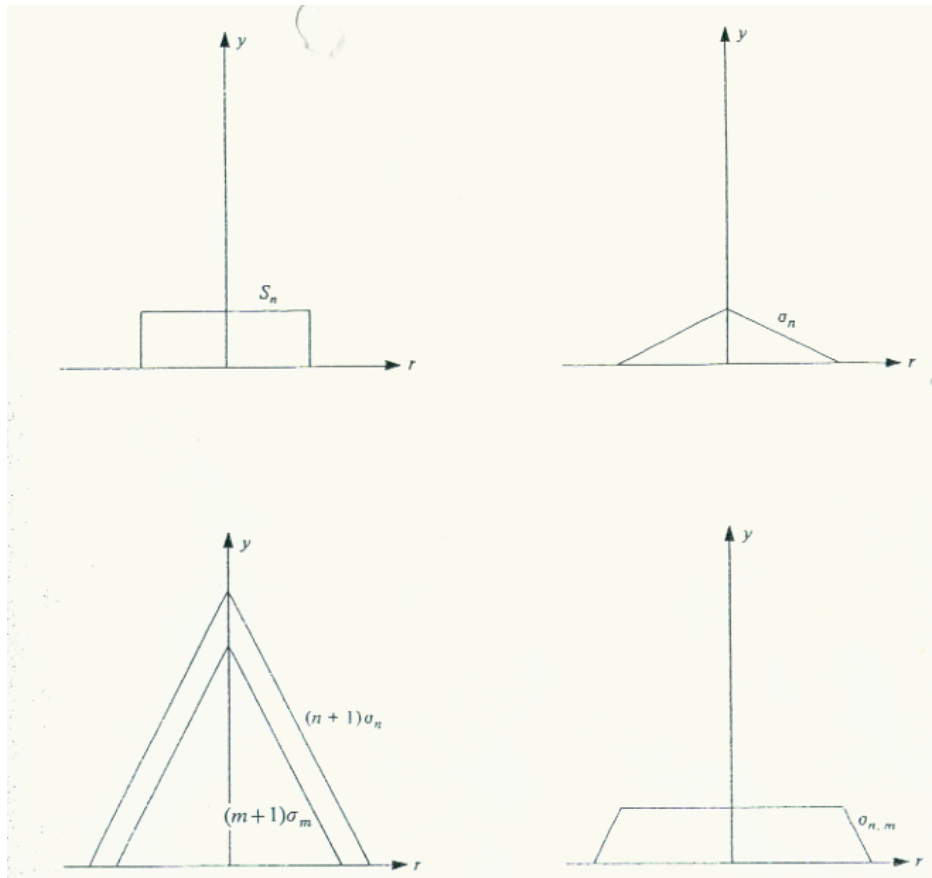


Abbildung 1: Die De La Vallée Poussin-Summe.

— Konvergenzeigenschaften —

Die De La Vallée Poussin-Summe nutzt die guten Konvergenzeigenschaften der Fejérsomme:

**(1.5) Lemma (Konvergenzeigenschaften der De La Vallée Poussin-Summe)**

a) Sei  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  Riemann-integrierbar und stetig in  $t$ , dann gilt für jede feste ganze Zahl  $k$  :

$$\sigma_{kn,(k+1)n}(f, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t).$$

b) Ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{T}$ , so gilt

$$\sigma_{kn,(k+1)n}(f, \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \quad \text{gleichmäßig.} \quad \diamond$$

Wir erinnern uns an den Satz von Fejér, der für den Beweis von Nutzen ist:

**(1.6) Satz (Fejér)**

a) Sei  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  Riemann-integrierbar und stetig in  $t$ , dann folgt für die Fejérsumme:

$$\sigma_n(f, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t).$$

b) Ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{T}$ , so gilt

$$\sigma_n(f, \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \quad \text{gleichmäßig.}$$

([1], Part I.2, Theorem (2.3)). ◇

Nun zum

**Beweis (von Lemma 1.5)**

a)

$$\begin{aligned} \sigma_{kn, (k+1)n}(f, t) &\stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{(k+1)n - kn} \left[ ((k+1)n + 1)\sigma_{(k+1)n}(f, t) - (kn + 1)\sigma_{kn}(f, t) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[ (kn + n + 1)\sigma_{(k+1)n}(f, t) - (kn + 1)\sigma_{kn}(f, t) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[ \underbrace{\left( k + 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\searrow 0} \right)}_{*} \underbrace{\sigma_{(k+1)n}(f, t)}_{(1.6)a \searrow f(t)} - \underbrace{\left( k + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\searrow 0} \right)}_{*} \underbrace{\sigma_{kn}(f, t)}_{(1.6)a \searrow f(t)} \right] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (k+1)f(t) - kf(t) = f(t). \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sigma_{kn, (k+1)n}(f, \cdot) &\stackrel{(1.3)}{=} \frac{1}{(k+1)n - kn} \left[ ((k+1)n + 1)\sigma_{(k+1)n}(f, \cdot) - (kn + 1)\sigma_{kn}(f, \cdot) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[ (kn + n + 1)\sigma_{(k+1)n}(f, \cdot) - (kn + 1)\sigma_{kn}(f, \cdot) \right] \\ &= \frac{1}{n} \left[ \underbrace{\left( k + 1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\searrow 0} \right)}_{*} \underbrace{\sigma_{(k+1)n}(f, \cdot)}_{(1.6)b \text{ glm} \searrow f} - \underbrace{\left( k + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\searrow 0} \right)}_{*} \underbrace{\sigma_{kn}(f, \cdot)}_{(1.6)b \text{ glm} \searrow f} \right] \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} (k+1)f - kf = f, \quad \text{gleichmäßig.} \end{aligned}$$

Zu \*:

An diesen Stellen ist es von Bedeutung, dass die Funktion  $f$  nach Voraussetzung Riemann-integrierbar und damit beschränkt (Teil a)) bzw. gleichmäßig beschränkt (Teil b)) ist. Deshalb kann, anschaulich gesprochen, ein Grenzwert von „ $0 \cdot \infty$ “ nicht auftreten und es gilt  $\frac{1}{n}\sigma_{(k+1)n}(f, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot f(t)$  bzw.  $\frac{1}{n}\sigma_{kn}(f, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \cdot f(t)$ , für Teil a) und Entsprechendes analog für Teil b).  $\square$

Zur Vorbereitung des neuen Konvergenzkriteriums benötigen wir ein weiteres Lemma, doch vorweg eine kurze

**(1.7) Bemerkung**

Die Aussage  $\hat{f}(r) = O(|r|^{-1})$  bedeutet:

Es existiert eine Konstante  $A$ , so dass  $|\hat{f}(r)| \leq A|r|^{-1}$  für  $r \neq 0$ .  $\diamond$

**(1.8) Lemma**

Sei  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  Riemann-integrierbar und  $\hat{f}(r) = O(|r|^{-1})$ , also  $|\hat{f}(r)| \leq A|r|^{-1}$  für  $r \neq 0$ , dann gilt:

$$|\sigma_{kn, (k+1)n}(f, t) - S_m(f, t)| \leq 2Ak^{-1}$$

für alle  $t \in \mathbb{T}$  und  $kn \leq m < (k+1)n$  ( $k, m, n$  positive ganze Zahlen,  $A$  eine Konstante).  $\diamond$

Dies bedeutet:

Ist  $|\hat{f}(r)|$  für  $kn \leq |r| < (k+1)n$  nicht zu groß, so unterscheidet sich die De La Vallée Poussin-Summe  $\sigma_{kn, (k+1)n}(f, t)$  nicht sehr von der Fouriersumme  $S_m(f, t)$ , falls  $kn \leq m < (k+1)n$ . Die Korrektheit dieser Aussage ist jedoch abhängig von der Größe von  $k$ .



**Beweis**

$$\begin{aligned}
 & |\sigma_{kn,(k+1)n}(f, t) - S_m(f, t)| \\
 \stackrel{(1.4)}{=} & \left| \sum_{r=-(k+1)n}^{-kn-1} \frac{(k+1)n+1-|r|}{(k+1)n-kn} \hat{f}(r) \exp(irt) + \sum_{r=kn+1}^{(k+1)n} \frac{(k+1)n+1-|r|}{(k+1)n-kn} \hat{f}(r) \exp(irt) \right. \\
 & \left. + S_{kn}(f, t) - S_m(f, t) \right| \\
 \stackrel{(1.2)a)}{=} & \left| \sum_{r=-(k+1)n}^{-kn-1} \frac{kn+n+1-|r|}{n} \hat{f}(r) \exp(irt) + \sum_{r=kn+1}^{(k+1)n} \frac{kn+n+1-|r|}{n} \hat{f}(r) \exp(irt) \right. \\
 & \left. + \sum_{r=-kn}^{kn} \hat{f}(r) \exp(irt) - \sum_{r=-m}^m \hat{f}(r) \exp(irt) \right| \\
 \stackrel{kn \leq m}{=} & \left| \sum_{r=-(k+1)n}^{-kn-1} \underbrace{\frac{kn+n+1-|r|}{n}}_{\in(0,1] \text{ für alle } r} \hat{f}(r) \exp(irt) + \sum_{r=kn+1}^{(k+1)n} \underbrace{\frac{kn+n+1-|r|}{n}}_{\in(0,1] \text{ für alle } r} \hat{f}(r) \exp(irt) \right. \\
 & \left. - \underbrace{\sum_{r=-m}^{-(kn+1)} \hat{f}(r) \exp(irt)}_{m < \sum_{r=-(k+1)n}^{-(kn+1)} \hat{f}(r) \exp(irt)} - \underbrace{\sum_{r=kn+1}^m \hat{f}(r) \exp(irt)}_{m < \sum_{r=kn+1}^{(k+1)n} \hat{f}(r) \exp(irt)} \right| \\
 \leq & \left| \sum_{r=-(k+1)n}^{-kn-1} 1 \cdot \hat{f}(r) \exp(irt) + \sum_{r=kn+1}^{(k+1)n} 1 \cdot \hat{f}(r) \exp(irt) \right| \\
 \stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} & \sum_{r=-(k+1)n}^{-kn-1} |\hat{f}(r) \exp(irt)| + \sum_{r=kn+1}^{(k+1)n} |\hat{f}(r) \exp(irt)| \\
 = & \sum_{kn < |r| \leq (k+1)n} |\hat{f}(r)| \quad (\text{da } |\exp(irt)| = 1) \\
 \leq & 2 \sum_{r=kn+1}^{(k+1)n} Ar^{-1} \quad (\text{n. Vor., da } |\hat{f}(r)| \leq A|r|^{-1}) \\
 \leq & 2 \underbrace{[(k+1)n - (kn+1) + 1]}_{=n} A \frac{1}{kn+1} \quad (\text{da } \frac{1}{r} \text{ für die untere Grenze am Größten wird}) \\
 \leq & 2An \frac{1}{kn} \quad (\text{jeder Summand gegen untere Grenze abgeschätzt und } \frac{1}{kn+1} \leq \frac{1}{kn}) \\
 = & 2Ak^{-1}.
 \end{aligned}$$

Aus Lemma (1.5) und Lemma (1.8) erhalten wir nun unser neues Konvergenzkriterium für die Fouriersumme:

**(1.9) Satz (Konvergenzkriterium)**

Sei  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  Riemann-integrierbar und  $\hat{f}(r) = O(\frac{1}{|r|})$  für  $r \rightarrow \infty$ , dann gilt:

a) Ist  $f$  stetig in  $t$ , so folgt

$$S_n(f, t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(t).$$

b) Ist  $f$  stetig auf  $\mathbb{T}$ , so folgt

$$S_n(f, \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \quad \text{gleichmäßig.} \quad \diamond$$

**Beweis**

a) Wir wollen Lemma (1.5a) und Lemma (1.8) verwenden.

Dazu wählen wir zu einem gegebenen  $\epsilon > 0$  eine (ganze) Zahl  $k$ , so dass  $k \geq 1 + 4A\epsilon^{-1}$  erfüllt ist und

$$4A\epsilon^{-1} + 1 \leq k \Rightarrow 4A\epsilon^{-1} < k \Leftrightarrow 4Ak^{-1} < \epsilon \Leftrightarrow 2Ak^{-1} < \frac{\epsilon}{2}$$

gilt.

Nach Lemma (1.5a) können wir nun ein  $n_0 \geq k$  finden, so dass

$$|\sigma_{kn, (k+1)n}(f, t) - f(t)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dies ist gerade die Definition der punktweisen Konvergenz (vgl. [4], Kapitel VIII, §1, Definition (1.1)).

Um Lemma (1.8) verwenden zu können nehmen wir  $m \geq kn_0$  an, so dass

$$(k+1)n > m \geq kn \quad \text{für ein } n \geq n_0$$

gilt. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} |S_m(f, t) - f(t)| &= |S_m(f, t) + \sigma_{kn, (k+1)n}(f, t) - \sigma_{kn, (k+1)n}(f, t) - f(t)| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \underbrace{|\sigma_{kn, (k+1)n}(f, t) - f(t)|}_{\stackrel{(1.5a)}{< \frac{\epsilon}{2}}} + \underbrace{|S_m(f, t) - \sigma_{kn, (k+1)n}(f, t)|}_{\stackrel{(1.8)}{\leq 2Ak^{-1}}} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \underbrace{2Ak^{-1}}_{< \frac{\epsilon}{2}} \quad (\text{nach Konstruktion}) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Somit folgt  $S_m(f, t) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(t)$ , also die punktweise Konvergenz.

b) Da  $f$  stetig auf ganz  $\mathbb{T}$  ist, gilt der obige Beweis für alle  $t \in \mathbb{T}$ , das heißt  $t$  ist unabhängig von  $\epsilon$  und der Beweis kann analog zu a) geführt werden:

Wir verwenden Lemma (1.5)b) und Lemma (1.8).

Dazu wählen wir wieder zu einem gegebenen  $\epsilon > 0$  eine (ganze) Zahl  $k$ , so dass  $k \geq 1 + 4A\epsilon^{-1}$  erfüllt ist.

Nach Lemma (1.5)b) können wir nun ein  $n_0 \geq k$  finden, so dass

$$|\sigma_{kn,(k+1)n}(f, \cdot) - f| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Dies ist gerade die Definition der gleichmäßigen Konvergenz (vgl. [4], Kapitel VIII, §1, Definition (1.1)).

Um Lemma (1.8) verwenden zu können nehmen wir  $m \geq kn_0$  an, so dass

$$(k+1)n > m \geq kn \quad \text{für ein } n \geq n_0$$

gilt. Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} |S_m(f, \cdot) - f| &= |S_m(f, \cdot) + \sigma_{kn,(k+1)n}(f, \cdot) - \sigma_{kn,(k+1)n}(f, \cdot) - f| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ugl.}}{\leq} \underbrace{|\sigma_{kn,(k+1)n}(f, \cdot) - f|}_{\stackrel{(1.5)b)}{< \frac{\epsilon}{2}}} + \underbrace{|S_m(f, \cdot) - \sigma_{kn,(k+1)n}(f, \cdot)|}_{\stackrel{(1.8)}{\leq 2Ak^{-1}}} \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \underbrace{2Ak^{-1}}_{< \frac{\epsilon}{2}} \quad (\text{nach Konstruktion}) \\ &< \epsilon. \end{aligned}$$

Somit folgt  $S_m(f, \cdot) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f$ , also die gleichmäßige Konvergenz. □

Nun haben wir ein Konvergenzkriterium erarbeitet, das als Voraussetzung für die Konvergenz der Fouriersumme neben der Stetigkeit nur die Riemann-integrierbarkeit von  $f$  und die Beschränktheit der Fourierkoeffizienten benötigt. Die Absolutreihe der Fourierkoeffizienten muss nicht konvergieren (vgl.[6], Satz (2.1) oder [1], Part I.9, Theorem (9.1)).

Mit Hilfe unseres neuen Konvergenzkriteriums, Satz (1.9), können wir nun einen weiteren, verbesserten Beweis für folgenden Satz geben:

**(1.10) Satz**

Sei  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig auf ganz  $\mathbb{T}$  und  $f$  habe an allen, bis auf endlich vielen Stellen eine stetige, beschränkte Ableitung.

Dann folgt:

$$S_n(f, \cdot) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f, \quad \text{gleichmäßig}$$

(vgl. [1], Part I.9, Theorem (9.6) oder auch [6], Satz (2.6)). ◇

Für den Beweis dieses Satzes benötigen wir folgendes

**(1.11) Lemma**

Sei  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$   $(n - 1)$ -mal stetig differenzierbar und sei  $f^{(n-1)}$  differenzierbar mit einer stetigen Ableitung an allen, bis auf endlich vielen Stellen  $x_1, x_2 \dots x_n$ . Dann gilt:

Falls  $|f^n(t)| \leq M$  für alle  $t \neq x_1, x_2 \dots x_n$ , so folgt für alle  $r \neq 0$ :

$$|\hat{f}(r)| \leq M|r|^{-n}$$

(vgl. [1], Part I.9, Lemma (9.5) oder auch [6], Lemma (2.5)). ◇

Nun zum

**Beweis (von Satz 1.10)**

Da  $f$  an allen, bis auf endlich vielen Stellen eine stetige, beschränkte Ableitung hat, sind die Voraussetzungen von Lemma (1.11) schon erfüllt.

Aus  $|\hat{f}(r)| \leq M|r|^{-n}$  mit einer Konstanten  $M$  und  $n = 1$  folgert man

$\hat{f}(r) = O(|r|^{-1})$  (nach Bemerkung (1.7)).

Also folgt die Behauptung sofort aus Satz (1.9). □

Im nächsten Kapitel ist weiterhin folgender Satz von Nutzen:

**(1.12) Satz (Punktweise Konvergenz der Fouriersumme)**

Sei  $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  stetig und habe an allen, bis auf endlich vielen Stellen eine stetige, beschränkte Ableitung.

Dann existiert  $\lim_{t \rightarrow x-} f(t)$  und  $\lim_{t \rightarrow x+} f(t)$  für alle  $x \in \mathbb{T}$  und

$$S_m(f, x) \rightarrow \frac{(\lim_{t \rightarrow x+} f(t) + \lim_{t \rightarrow x-} f(t))}{2}.$$

Ist  $f$  stetig in  $x$ , so erhalten wir:

$$S_m(f, x) \xrightarrow{m \rightarrow \infty} f(x). \quad \diamond$$

## §2 Das Gibbs-Wilbraham-Phänomen

In diesem Kapitel wird das Gibbs-Wilbraham-Phänomen behandelt.

— Exkurs: Das Michelson-Interferometer —

Albert Abraham Michelson (1852-1931) entwickelte um 1883 das Michelson-Interferometer, welches eine Weiterentwicklung von Maschinen war, die aus Fourierreihen periodische Funktionen und umgekehrt aus periodischen Funktionen Fourierreihen programmieren konnten.

Michelson testete sein Interferometer, indem er die ersten 80 Fourierkoeffizienten der Sägezahnfunktion  $h$  ( $h(x) = x$  [ $x \neq \pi$ ],  $h(\pi) = 0$ ) eingab (vgl. Definition (2.2) und Abbildung 6). Zu seiner Überraschung konstruierte die Maschine keine exakte Sägezahnfunktion. Statt dessen waren nahe jeder Unstetigkeitsstelle der Funktion  $S_n(h, \cdot)$  sogenannte Überschwinger zu sehen, wie sie in Abbildung 2 und Abbildung 3 dargestellt sind.

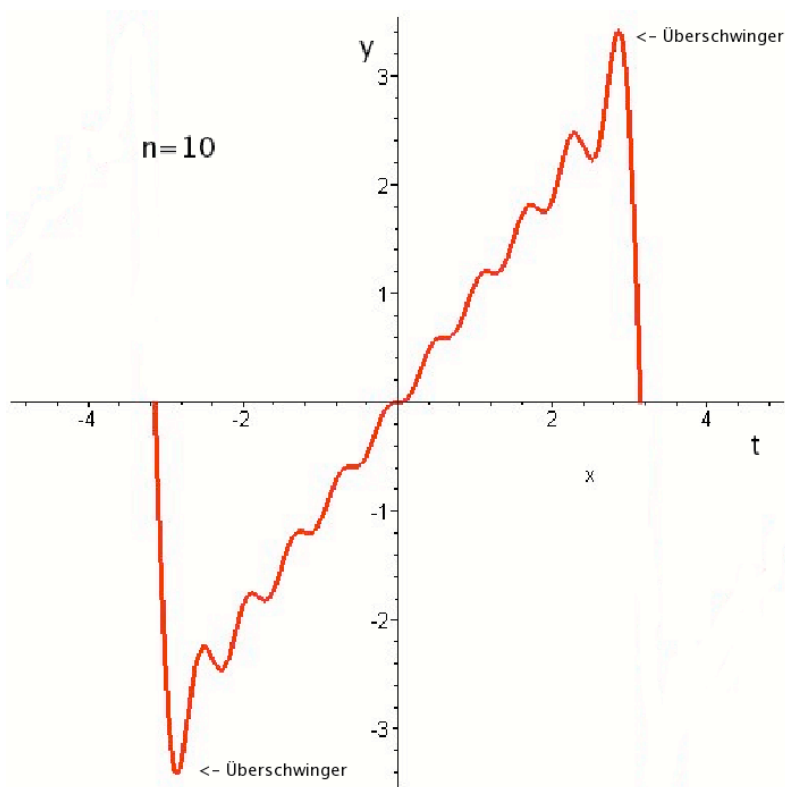


Abbildung 2: Partielle Fouriersumme  $y = S_n(h, t)$  der Sägezahnfunktion.

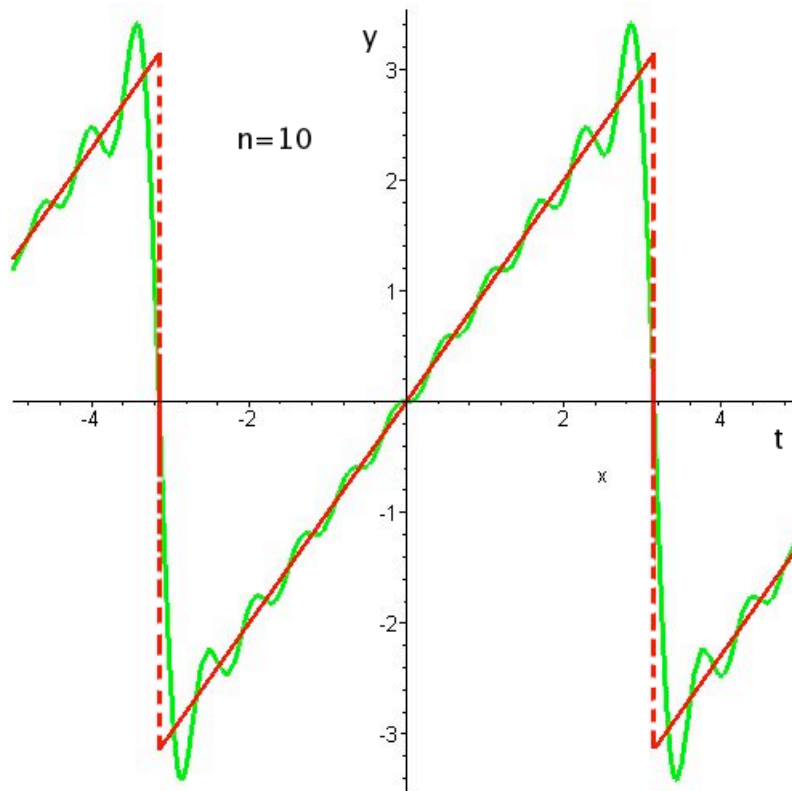


Abbildung 3: Partielle Fouriersumme  $y = S_n(h, t)$  der Sägezahnfunktion und (exakte) Sägezahnfunktion.

Der Ausschluss mechanischer Defekte und Berechnung von Hand bestätigten dieses Phänomen (vgl. Abbildung 4).

Eine Vergrößerung der Variable  $n$  bewirkte eine Bewegung der Überschwinger zu den Unstetigkeitsstellen hin, ihre (absolute) Höhe (17 oder 18 % über dem korrekten Absolutwert) blieb jedoch erhalten.

Wie können wir diese Beobachtungen nun mit Satz (1.12) vereinbaren?

Diese Frage beantwortet uns das Gibbs-Phänomen, benannt nach dem amerikanischen Physiker Josiah Willard Gibbs und dem englischen Mathematiker Wilbraham. Als Gibbs-Phänomen oder „Ringing“ wird das für Fourierreihen typische Verhalten in der Umgebung von Sprungstellen bezeichnet (vgl. [5]).

Entwickelt man eine Fourierreihe aus einer un stetigen Funktion, so ergeben sich an den Unstetigkeitsstellen sogenannte Über- (und Unterschwinger), deren Höhe sich auch dann nicht verringert, wenn man versucht die Funktion noch besser zu approximieren, d.h. die Variable  $n$  zu erhöhen (vgl. Anhang A).

Der Grund dafür ist, dass die Fouriersumme  $S_n$  an den Unstetigkeitsstellen nicht

mehr gleichmäßig, sondern nur noch punktweise konvergiert (vgl. Satz (1.12)). Gibbs machte deshalb darauf aufmerksam, dass der Grenzwertbegriff Missverständnisse bergen konnte.

Seiner Meinung nach lag die Schwierigkeit darin, den „Grenzwert der Graphen“ und den „Graph des Grenzwertes“ einer partiellen Fouriersumme zu unterscheiden (vgl. Beispiel (2.1) und Abbildung 5).

Gibbs stellte also fest, dass anschaulich gesprochen die punktweise Konvergenz, z.B. von  $S_n(h, t) \rightarrow h(t)$ , nicht bedeutet, dass der Graph der Funktion  $S_n$  dem Graphen des Grenzwertes  $h$  ähnlicher wird für wachsendes  $n$ , obwohl die Überschwinger sich dann den Unstetigkeitsstellen nähern, also die Approximation der gegebenen Funktion verbessert wird.

(Im Gegensatz dazu bedeutet gleichmäßige Konvergenz sehr wohl, dass z.B. für  $g_n \rightarrow g$  der Graph von  $g_n$  dem Graphen von  $g$  immer ähnlicher wird für wachsendes  $n$ .)

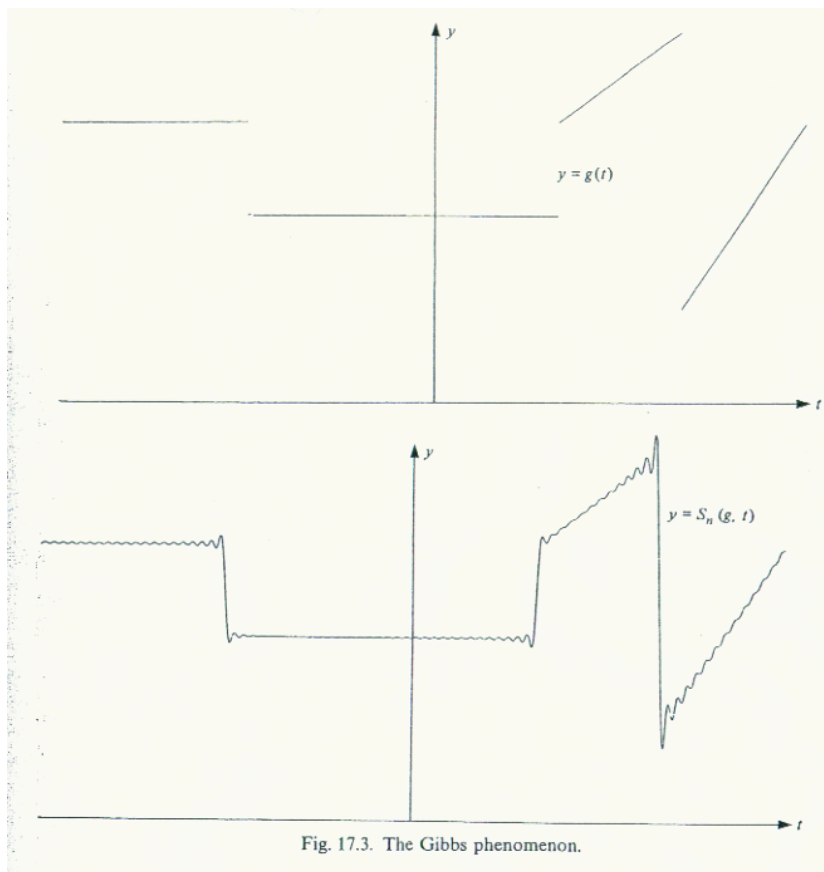


Fig. 17.3. The Gibbs phenomenon.

Abbildung 4: Das Gibbs-Wilbraham-Phänomen für eine beliebige, stückweise definierte bzw. stückweise stetige Funktion.

Dazu ein

**(2.1) Beispiel (The witch's hats')**

Es sei die Funktion  $f_n$  definiert durch

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2(1 - n|x - n^{-1}|) & \text{für } 0 \leq x \leq 2n^{-1}, n \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

◇

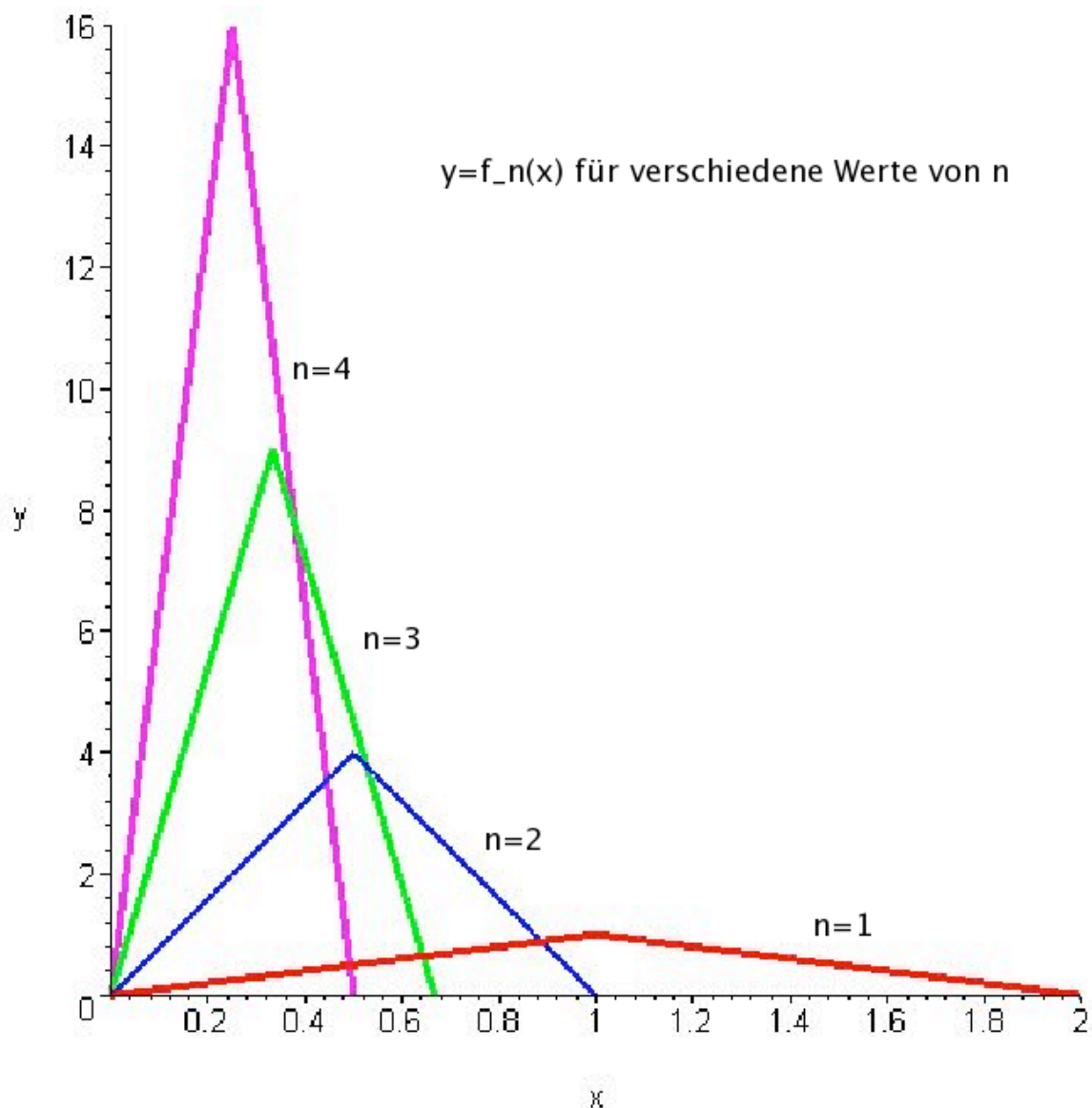


Abbildung 5: The witch's hats' (Hexenhüte).



Dann konvergiert  $f_n$  punktweise gegen 0 („Grenzwert der Graphen“), aber der Graph von  $f_n$  ist nicht die Gerade 0 („Graph des Grenzwertes“), wie Abbildung 5 zeigt.

— Das Gibbs-Wilbraham-Phänomen —

Im Folgenden werden wir uns darauf beschränken, die Existenz des Gibbs-Wilbraham-Phänomens zu demonstrieren.

Wir wollen zunächst die im letzten Abschnitt bereits erwähnte Sägezahnfunktion einführen.

**(2.2) Definition (Die Sägezahnfunktion)**

Die Sägezahnfunktion wird definiert durch  $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  mit

$$h(x) := x \quad \text{für} \quad -\pi < x < \pi,$$

$$h(\pi) := 0.$$

◇

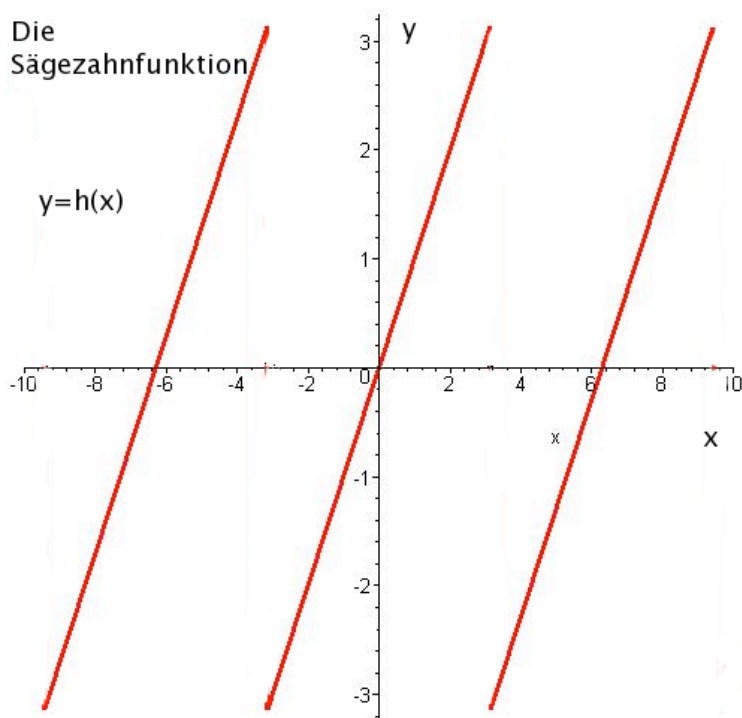


Abbildung 6: Die Sägezahnfunktion (exakt).

**(2.3) Satz**

Sei  $h$  die Sägezahnfunktion aus Definition (2.2), dann gilt:

$$S_n(h, \pi - \frac{\pi}{n}) \rightarrow A\pi \quad \text{und}$$

$$S_n(h, -\pi + \frac{\pi}{n}) \rightarrow -A\pi \quad \text{für } n \rightarrow \infty, \quad \text{wobei}$$

$$A = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin(x)}{x} dx > 1, 17.$$

◇

**Beweis**

Bereits im ersten Vortrag haben wir gesehen, dass

$$S_n(h, x) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{2}{r} \sin(rx) \quad (\text{für alle } x) \quad \text{gilt}$$

(vgl. [2], Ch.2, Table 1, S.26 ).

Damit erhält man:

$$S_n(h, \pi - \frac{\pi}{n}) = \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{2}{r} \sin(r(\pi - \frac{\pi}{n}))$$

$$= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{2}{r} \sin(r\pi - r\frac{\pi}{n})$$

$$= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{2}{r} (-1)^{r+1} \sin(r\frac{\pi}{n}) \tag{1}$$

$$= \sum_{r=1}^n \overbrace{(-1)^{2r+2}}^{=1} \frac{2}{r} \sin(r\frac{\pi}{n})$$

$$= \sum_{r=1}^n \frac{2}{r} \sin(r\frac{\pi}{n})$$

$$= 2 \sum_{r=1}^n \frac{\pi}{n} \left( \frac{n}{r\pi} \sin(\frac{r\pi}{n}) \right) \tag{2}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = \pi \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx}_{=A} = A\pi. \tag{3}$$

Analog folgert man:

$$\begin{aligned}
 S_n(h, -\pi + \frac{\pi}{n}) &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{2}{r} \sin(r(-\pi + \frac{\pi}{n})) \\
 &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{2}{r} \sin(r\frac{\pi}{n} - r\pi) \\
 &= \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{2}{r} (-\sin(r\pi - r\frac{\pi}{n})) \tag{4}
 \end{aligned}$$

$$= - \sum_{r=1}^n (-1)^{r+1} \frac{2}{r} (-1)^{r+1} \sin(r\frac{\pi}{n}) \tag{5}$$

$$= - \sum_{r=1}^n \overbrace{(-1)^{2r+2}}^{=1} \frac{2}{r} \sin(r\frac{\pi}{n})$$

$$= - \sum_{r=1}^n \frac{2}{r} \sin(r\frac{\pi}{n})$$

$$= -2 \sum_{r=1}^n \frac{\pi}{n} \left( \frac{n}{r\pi} \sin\left(\frac{r\pi}{n}\right) \right) \tag{6}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} -2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx = -\pi \underbrace{\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx}_{=A} = -A\pi. \tag{7}$$

Zu (4):

Da der Sinus eine ungerade Funktion ist, gilt:  $\sin(-x) = -\sin(x)$  für alle  $x \in \mathbb{R}$ .

Zu (1) und (5):

Nach den Additionstheoremen für  $\sin$  gilt:

$$\begin{aligned}
 \sin(r\pi - r\frac{\pi}{n}) &= \underbrace{\sin(r\pi)}_{=0} \cos(r\frac{\pi}{n}) - \underbrace{\cos(r\pi)}_{=(-1)^r} \sin(r\frac{\pi}{n}) \\
 &= (-1)^{r+1} \sin(r\frac{\pi}{n}).
 \end{aligned}$$

Zu (2) und (6):

Erweiterung für die Anwendung Riemannscher Treppenfunktionen.

Zu (3) und (7):

Die Konvergenz erhält man aus der Approximation des Integrals durch Treppenfunktionen zusammen mit den Eigenschaften, dass  $\frac{\sin x}{x}$  wohldefiniert, beschränkt und stetig auf  $[0, \pi]$  ist, denn man kann  $\frac{\sin x}{x}$  in  $x = 0$  stetig durch 1 ergänzen.

Dazu wähle als Approximation für das  $r$ -te Intervall die:

- untere Treppenfunktion:  $\phi = \left(\frac{n}{r\pi}\right) \sin\left((r-1)\frac{\pi}{n}\right)$

- obere Treppenfunktion:  $\psi = \left(\frac{n}{r\pi}\right) \sin\left(r\frac{\pi}{n}\right)$

auf den Intervallen  $\left[(r-1)\frac{\pi}{n}, r\frac{\pi}{n}\right]$ ,  $r = 1, \dots, n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .

Da  $f(x) := \frac{\sin x}{x}$  auf  $[0, \pi]$  stetig und damit Riemann-integrierbar ist, folgt mit der Definition des Riemannintegrals ([4], Kapitel VII, §1, Definition (1.10)):

$$\int_{a^*}^b f(x)dx = \int_a^{b^*} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

Nach ([4], Kapitel VII, §1, Definition (1.4) und Definition (1.7)) erhält man:

$$\int_{a^*}^b f(x)dx = \inf\left\{\int_a^b \psi(x)dx; f(x) \leq \psi(x), \psi \text{ Treppenfunktion}\right\} \leq \sum_{r=1}^n \frac{\pi}{n} \left(\frac{n}{r\pi}\right) \sin\left(r\frac{\pi}{n}\right)$$

$$\int_a^{b^*} f(x)dx = \sup\left\{\int_a^b \phi(x)dx; \phi(x) \leq f(x), \phi \text{ Treppenfunktion}\right\} \geq \sum_{r=1}^n \frac{\pi}{n} \left(\frac{n}{r\pi}\right) \sin\left((r-1)\frac{\pi}{n}\right)$$

und somit die Gleichheit der beiden Treppenfunktionen.

Also folgt

$$2 \sum_{r=1}^n \frac{\pi}{n} \left(\frac{n}{r\pi} \sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)\right) \longrightarrow 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{und}$$

$$-2 \sum_{r=1}^n \frac{\pi}{n} \left(\frac{n}{r\pi} \sin\left(\frac{r\pi}{n}\right)\right) \longrightarrow -2 \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx \quad \text{für } n \rightarrow \infty.$$

Somit bleibt noch zu zeigen, dass

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 1, 17.$$

Es gilt nach Analysis I:

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{(2r+1)}}{(2r+1)!}}{x} = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r+1)!} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx &= \int_0^{\pi} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r}}{(2r+1)!} dx \stackrel{*}{=} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r x^{2r+1}}{(2r+1)(2r+1)!} \Bigg|_0^{\pi} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \pi^{2r+1}}{(2r+1)(2r+1)!} - 0 \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \pi^{2r+1}}{(2r+1)(2r+1)!} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r \pi^{2r+1}}{(2r+1)^2 (2r)!} \end{aligned}$$

Zu \*:

Summation und Integration dürfen nach [4], Kapitel VIII, §2, Korollar (2.7) vertauscht werden, denn es gilt:

Als Potenzreihe besitzt  $\frac{\sin x}{x}$  den Konvergenzradius  $R = \infty > 0$ , denn nach [3], Kapitel IV, §4, Korollar (4.9) divergiert die Folge  $(\sqrt[r]{r!})_{r \geq 1}$  bestimmt gegen unendlich und damit auch die Folge  $(\sqrt[r]{(2r+1)!})_{r \geq 1} \geq (\sqrt[r]{r!})_{r \geq 1}$ .

Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard ([3], Kapitel IV, §4, Korollar (4.8)), angewandt auf  $a_r := \frac{(-1)^r}{(2r+1)!}$ , erhält man daraus den Konvergenzradius  $R = \infty$ .

Somit konvergiert die Potenzreihe  $\sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{x^{2r}}{(2r+1)!}$  absolut gleichmäßig auf  $[0 - r, 0 + r]$  für jedes  $0 \leq r < R$  nach [4], Kapitel VIII, §1, Satz (1.11).

Also dürfen Summation und Integration vertauscht werden.

Es ergibt sich folgende Idee:

Man nimmt das oben berechnete Integral  $\int_0^\pi \frac{\sin x}{x}$  und zieht betragsmäßig die ersten  $n$  Summanden ab. Dann setzt man den ersten Summanden ein und erhält einen Wert, der größer ist als die verbleibende Summe. Nun kann gegen diesen Wert abgeschätzt werden. Durch Einsetzen verschiedener Werte in die Abschätzung erhält man das gesuchte Ergebnis.

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin x}{x} dx - 2 \sum_{r=0}^n \frac{\pi^{2r} (-1)^r}{(2r+1)^2 (2r)!} \right| \\
 &= \left| \frac{2}{\pi} \sum_{r=0}^\infty \frac{\pi^{2r} (-1)^r}{(2r+1)^2 (2r)!} - 2 \sum_{r=0}^n \frac{\pi^{2r} (-1)^r}{(2r+1)^2 (2r)!} \right| \\
 &= 2 \left| \sum_{r=0}^n \frac{\pi^{2r} (-1)^r}{(2r+1)^2 (2r)!} + \sum_{r=n+1}^\infty \frac{\pi^{2r} (-1)^r}{(2r+1)^2 (2r)!} - \sum_{r=0}^n \frac{\pi^{2r} (-1)^r}{(2r+1)^2 (2r)!} \right| \\
 &= 2 \left| \sum_{r=n+1}^\infty \frac{\pi^{2r} (-1)^r}{(2r+1)^2 (2r)!} \right| \\
 &\stackrel{!}{\leq} \frac{2\pi^{2n+2}}{(2n+3)^2 (2n+2)!} \quad \text{nach Einsetzen des ersten Summanden.}
 \end{aligned}$$

Nun ist noch folgendes zu zeigen:

Behauptung:

$$\begin{aligned}
 \frac{\pi^{2r}}{(2r+1)^2 (2r)!} \geq \frac{\pi^{2r+2}}{(2r+3)^2 (2r+2)!} &\Leftrightarrow \pi^{2r+2} \cdot (2r+1)^2 (2r)! \leq \pi^{2r} \cdot (2r+3)^2 (2r+2)! \\
 &\Leftrightarrow \pi^2 \cdot (2r+1)^2 (2r)! \leq (2r+3)^2 (2r+2)! \\
 &\Leftrightarrow \pi^2 \cdot (2r+1)^2 (2r)! \leq (2r+3)^2 (2r+2)(2r+1)(2r)! \\
 &\Leftrightarrow \pi^2 \cdot (2r+1) \leq (2r+3)^2 (2r+2)
 \end{aligned}$$

Da  $\pi < 4$  ist und  $2r+1 < 2r+2$  für alle  $r \in \mathbb{N}$  gilt, ist die Gleichung offensichtlich erfüllt und die Behauptung richtig.

Damit ist gezeigt, dass die absoluten Werte der Reihenglieder monoton fallend sind, denn betragsmäßig ist für jedes Reihenglied sein Folglied kleiner.

Weiterhin alterniert die Folge der Reihenglieder.

Insgesamt bedeutet dies, dass betragsmäßig die Summe der folgenden Reihenglieder kleiner oder gleich dem ersten Reihenglied ist.

Die zu zeigende Ungleichung folgt also durch Einsetzen von  $r = n + 1$ .

Durch die Wahl von  $n = 4$  in obiger Formel und Berechnung mit einem Taschenrechner erhält man nun die gesuchte Ungleichung  $\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx > 1,17$ .  $\square$

Somit fanden Wilbraham und Gibbs heraus, dass die Fourierreihe der Sägezahnfunktion nicht, wie man vermuten könnte, gegen  $-\pi$  bzw.  $\pi$ , sondern gegen  $-A\pi$  bzw.  $A\pi$  konvergiert.

Die Zahl  $G := 1,1789\dots$  wird auch als Gibbs-Konstante bezeichnet. Sie gibt die Höhe des Überschingers in einer Richtung an. Aus ihr lässt sich der prozentuale Fehler von rund 18 % in der Sprunghöhe berechnen (vgl [5]).

### §3 Quellen

- [1] Körner, T. W.: Fourier Analysis, Cambridge 1990
- [2] Folland, Gerald B., Fourier Analysis And Its Applications
- [3] Krieg, A.: Analysis I, Aachen 2003
- [4] Krieg, A.: Analysis II, Aachen 2004
- [5] [http://de.wikipedia.org/wiki/Gibbssches\\_Phänomen](http://de.wikipedia.org/wiki/Gibbssches_Phänomen)
- [6] Reimes, Tobias: Vortrag „Konvergenz von Fourier-Reihen“, Seminar zur Fourier-analysis, 13.11.2007



## §4 Anhang A

Es werden die Graphen der partiellen Fouriersumme  $y = S_n(h, t)$  der Sägezahnfunktion, für verschiedene Werte von  $n$ , im Vergleich zueinander dargestellt.

Wird die Variable  $n$  erhöht, so bewegen sich die Überschwinger zu den Unstetigkeitsstellen hin, ihre Höhe bleibt jedoch erhalten.

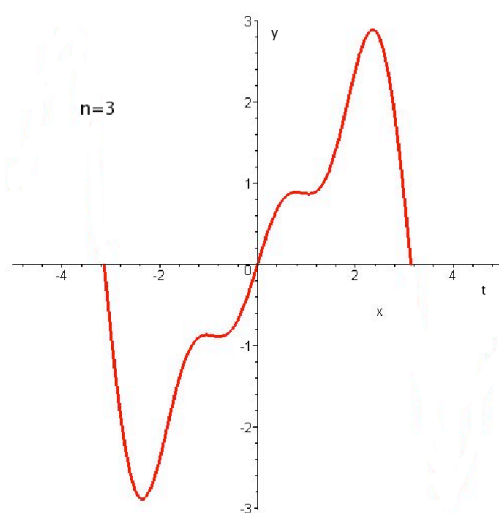


Abbildung 7:  $n=3$

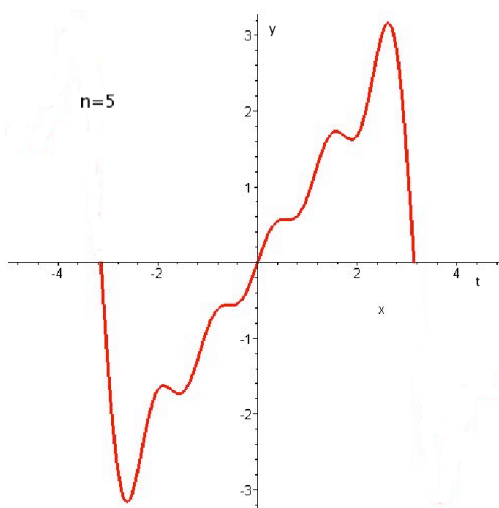


Abbildung 8:  $n=5$

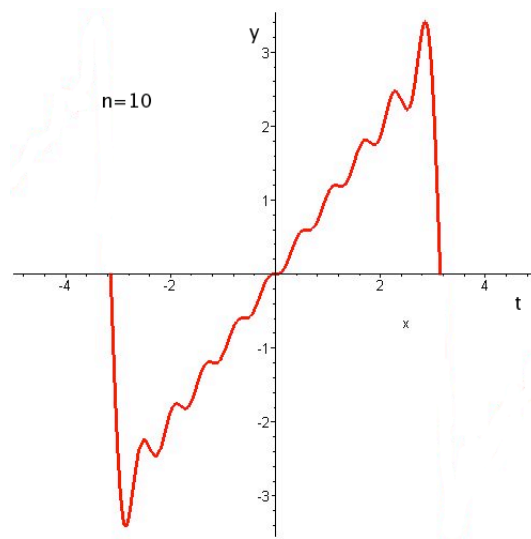


Abbildung 9:  $n=10$

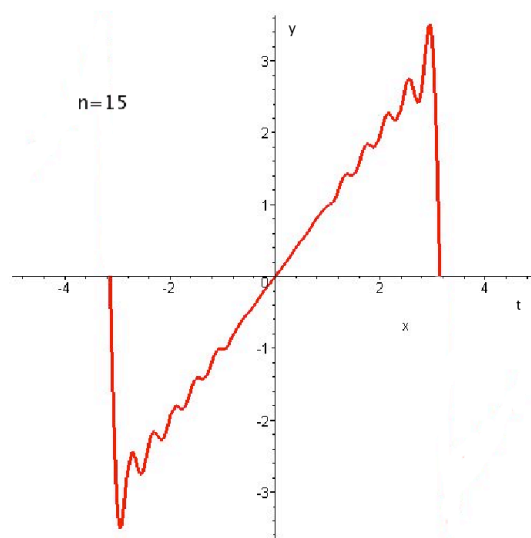


Abbildung 10:  $n=15$