Konvergenz von Fourier-Reihen

Ausarbeitung zum Seminar zur Fourieranalysis, 13.11.2007

Tobias Reimes

Diese Ausarbeitung beschäftigt sich mit der Konvergenz von Fourier-Reihen. Hierzu werden im ersten Abschnitt einige Vorbemerkungen behandelt. Im zweiten Abschnitt werden ein einfaches Kriterium für die Konvergenz und die Ableitungen von Fourier-Reihen bearbeitet. Im letzten Abschnitt wird zum Abschluss noch auf Abschätzungen von Fourier-Reihen eingegangen.

§1 Vorbemerkungen

Im Verlaufe der Ausarbeitung werden teilweise Bezeichnungen, Definitionen und Sätze benutzt, die schon im Laufe des Seminares eingeführt wurden, oder aus der Analysis stammen. Die wichtigsten, die hier verwendet werden, sind hier kurz zusammengefasst.

(1.1) Bezeichnungen
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine *RIEMANN*-integrierbare Funktion und $\hat{f}(r) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(t) \exp(-irt) dt$.

Dann ist

$$S_n(f,t) = \sum_{r=-n}^{n} \hat{f} \exp(irt) \qquad \diamond$$

die n-te Partialsumme von der zu f gehörigen *FOURIER*-Reihe an der Stelle $t \in \mathbb{T}$.

(1.2) Satz
Seien $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen und $\hat{f}(r) = \hat{g}(r)$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

$$\Rightarrow f = g, \text{ d.h. } f(t) = g(t) \text{ für alle } t \in \mathbb{T}.$$

Beweis
siehe [Kör], Kapitel 2, Satz 2.4, Seite 9. □

(1.3) Definition
Man nennt die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf $D \subseteq \mathbb{C}$ **gleichmäßig konvergent** gegen die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon \text{ für alle } n \geq N \text{ und alle } x \in D.$$

Hierfür schreibt man kurz $f_n \overset{glm}{\to} f$.
In diesem Fall heißt f die Grenzfunktion von $(f_n)_{n\geq 1}$.

Wichtig ist, dass, im Gegensatz zur punktweisen Konvergenz, das N nicht von x abhängt. $\diamond$

(1.4) Satz (Cauchy-Kriterium für Reihen)
Eine Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_o \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\left| \sum_{k=n}^{m} a_k \right| < \epsilon \text{ für alle } m \geq n \geq n_0.$$

Beweis
siehe [Kri05], Kap. IV, Satz(1.8), Seite 68 □

(1.5) Satz (WEIERSTRASSsches Majorantenkriterium)
Gegeben sei eine Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ auf D. Wenn es eine Folge $(M_k)_{k\geq 1}$ reeller Zahlen gibt, so dass

$$|f_k(x)| \leq M_k \text{ für alle } x \in D, k \in \mathbb{N} \text{ und } \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \epsilon,$$

dann konvergiert die Funktionenreihe $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ gleichmäßig und absolut gleichmäßig auf D.

Beweis
siehe [Kri06], Kap. VIII, Satz(1.10), Seite 184 □

(1.6) Satz
Ist F periodisch mit Periode P, dann ist $\int_a^{a+P} F(t)dt$ unabhängig von a, also

$$\int_a^{a+P} F(t)dt = \int_0^{a+P} F(t)dt - \int_0^{a} F(t)dt. \qquad \diamond$$

§2 Konvergenz-Kriterien von Fourier-Reihen

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit Kriterien für die Konvergenz von Fourier-Reihen. Hierzu werden zuerst absolut summierbare Fourier-Reihen und anschließend Eigenschaften der Ableitung behandelt.
Um die wichtigen Sätze (2.1) und (2.4) beweisen zu können, sind zudem noch weitere Sätze notwendig.

Eine der beiden wichtigen Aussagen befindet sich im folgenden Satz:

(2.1) Satz
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetig. Wenn $\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(r)\right|$ konvergiert, konvergiert $S_n(f,t) \to f(t)$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}$ für $n \to \infty$. $\diamond$

Dies bedeutet, dass eine Fourier-Reihe auf $\mathbb{T}$ gleichmäßig gegen f konvergiert, wenn die absolute Summation der Fourier-Koeffizienten konvergiert.
Der Beweis hierfür wird aus dem nächsten Satz gefolgert.

(2.2) Satz
Angenommen $\sum\limits_{r=-n}^{n} |a_r|$ konvergiert für $n \to \infty$. Dann konvergiert $\sum\limits_{r=-n}^{n} a_r \exp(irt)$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}$ für $n \to \infty$ gegen ein $g(t)$, wobei $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetig und $\hat{g}(r) = a_r$ für alle $r \in \mathbb{Z}$.

Beweis
Da $\sum_{r=-n}^{n} |a_r|$ konvergiert, folgt nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen(Satz 1.4), dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$\sum_{r=-m}^{-n} |a_r| + \sum_{r=n}^{m} |a_r| = \sum_{n \le |r| \le m} |a_r| < \epsilon \text{ für alle } m \ge n \ge n_0(\epsilon) \text{ gilt.}$$

Hieraus folgt, dass

$$\left| \sum_{n \le |r| \le m} a_r \exp(irt) \right| \overset{\Delta-Ungl.}{\le} \sum_{n \le |r| \le m} |a_r \exp(irt)| \overset{|\exp irt| \le 1}{\le} \sum_{n \le |r| \le m} |a_r| < \epsilon$$

für alle $t \in \mathbb{T}$ und $m \geq n \geq n_0(\epsilon)$ gilt.
Nach dem *WEIERSTRASS*schen Majorantenkriterium (Satz 1.5) (mit $f_k(x) = a_k \exp(ikt) + a_{-k} \exp(-ikt)$ und $M_k = |a_k| + |a_{-k}|$) und der Definition für gleichmäßige Konvergenz (Definition 1.3) konvergiert $\sum\limits_{r=-n}^{n} a_r \exp(irt)$ nun gleichmäßig auf $\mathbb{T}$ für $n \to \infty$ gegen eine Funktion $g(t)$.
Nach einem Korollar aus der Analysis II[Kri06](Kapitel 8, Korollar 3.4(a), Seite 192) folgt aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz, dass die gefundene Grenzfunktion $g(t)$ ebenfalls stetig ist.

Jetzt ist noch zu zeigen, dass $\hat{g}(r) = a_r$ für alle $r \in \mathbb{Z}$ gilt. Um dies zu zeigen benötigen wir die folgenden Bemerkungen:

(i) Da $\sum\limits_{r=-n}^{n} a_r \exp(irt) \xrightarrow{glm} g(t)$ konvergiert, folgt, dass auch $(\sum\limits_{r=-n}^{n} a_r \exp(irt)) \exp(-ikt) \xrightarrow{glm} g(t) \exp(-ikt)$ mit $|\exp(-ikt)| \in [-1;1]$ gleichmäßig konvergiert, für $n \to \infty$.

(ii) $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \exp(i(r-k)t)dt = \begin{cases} 1, & r=k \\ 0, & r \neq k \end{cases}$

$\underline{r = k:}$ $\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \exp(i(r-k)t)dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \exp 0 dt = \frac{1}{2\pi} x \Big|_{\mathbb{T}} = \frac{1}{2\pi} 2\pi = 1$

$\underline{r \neq k:}$ Setze $s = r - k \neq 0$.

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \exp(i(r-k)t)dt = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \exp(ist)dt = \frac{1}{2\pi} (\exp(ist) \frac{1}{is}) \Big|_{\mathbb{T}}$$
$$= \tfrac{1}{2\pi is} (\cos(s\pi) + \underbrace{i \sin(s\pi)}_{=0} - \cos(-s\pi) - \underbrace{i \sin(-s\pi)}_{=0})$$
$$= \tfrac{1}{2\pi is} (\underbrace{\cos(s\pi) - \cos(-s\pi)}_{=0,\ da\ cos\ ungerade}) = 0$$

Sei nun

$$a_k \stackrel{(ii)}{=} \sum_{r=-n}^{n} a_r \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \exp(i(r-k)t)dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} \underbrace{(\sum_{r=-n}^{n} a_r \exp irt)}_{\longrightarrow g(t)} \exp(-ikt)dt \xrightarrow{(i)} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{T}} g(t) \exp(-ikt)dt = \hat{g}(k),\ n \to \infty\ .$$

$\Rightarrow \hat{g}(k) = a_k$, für alle $k \in \mathbb{Z}$. $\square$

Durch diesen Satz lässt sich der Satz (2.1) nun beweisen.

Beweis Satz (2.1):

Da $\sum_{r=-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(r)\right|$ konvergiert, folgt nach (2.2), dass

$$S_n(f,t) = \sum_{r=-n}^{n} \hat{f}(r) \exp(irt)$$

gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $g(t)$ mit $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ und $\hat{g}(r) = \hat{f}(r)$ für alle $r \in \mathbb{Z}$ konvergiert. Nach (1.2) impliziert diese Aussage allerdings, dass $f = g$ sein muss.

$$\Rightarrow S_n(f,t) \xrightarrow{glm} f(t).$$

Wir erhalten durch Satz (2.1) ein recht einfaches Kriterium, welches garantiert, dass eine Fourier-Reihe einer Funktion gegen diese gleichmäßig konvergiert.

Als nächstes werden die Ableitungen von Fourier-Reihen betrachtet:

(2.3) Satz

Seien $(f_n)_{n\geq 1} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbare Funktionen und $(f_n')_{n\geq 1}$ ihre Ableitungen. Angenommen f_n konvergiert gleichmäßig gegen f und f_n' gleichmäßig gegen g auf $\mathbb{T}$ für $n \to \infty$.

Dann ist f stetig differenzierbar und g die Ableitung von f.

Beweis

Dieser Satz wurde bereits in der Analysis II(vgl. [Kri06], Kapitel VIII) bewiesen. Die Differenzierbarkeit folgt dort aus Satz (2.9), S.189 und die Stetigkeit aus Korollar (3.4), S.192. $\square$

(2.4) Satz
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion. Wenn $\sum\limits_{r=-\infty}^{\infty} |r| \left|\hat{f}(r)\right|$ konvergiert, folgt, dass f differenzierbar ist und $\sum\limits_{r=-n}^{n} ir\hat{f}(r)\exp(irt)$ gleichmäßig gegen $f'(t)$ konvergiert für $n \to \infty$.

Beweis
Sei $f_n = S_n(f, \ )$. Da für $\left|\hat{f}(r)\right| \leq |r| \left|\hat{f}(r)\right|$ $[r \neq 0]$ folgt, dass $\sum\limits_{r=-n}^{n} \left|\hat{f}(r)\right|$konvergiert, woraus wiederum folgt, dass $f_n \xrightarrow{glm} f$ gleichmäßig konvergiert.
Auf der anderen Seite ist $f_n'(t) = \sum\limits_{r=-n}^{n} ir\hat{f}(r)\exp(irt)$. Nach Satz (2.2) konvergiert $f_n \xrightarrow{glm} g$ gleichmäßig. Nach Satz (2.3) ist dieses g genau die Ableitung von f. □

Eine weitere wichtige Eigenschaft wird im folgenden Lemma beschrieben:

(2.5) Lemma
Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine $(n-1)$-mal stetig differenzierbare Funktion und f^{n-1} differenzierbar mit stetiger Ableitung außer an einer endlichen Anzahl an Punkten $x_1, x_2, ..., x_n$.
Für $\left|f^{(n)}(t)\right| \leq M, \forall t \neq x_1, x_2, ..., x_n$ folgt, dass $\left|\hat{f}(r)\right| \leq M|r|^{-n}, \forall r \neq 0$.

Beweis
Mit partieller Integration erhalten wir:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\exp(-irt)dt \\
&\overset{r\neq 0}{=} \frac{1}{2\pi} \underbrace{\left[f(t)\frac{exp(-irt)}{-ir}\right]_{-\pi}^{\pi}}_{=0,\ da\ \exp(-ir\pi)=\exp(ir\pi)} + \frac{1}{2\pi ir}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(t)\exp(-irt)dt \\
&= \frac{1}{2\pi ir}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f'(t)\exp(-irt)dt
\end{aligned}$$

Wird das Integrieren n-mal wiederholt, erhält man

$$\hat{f}(r) = \frac{(ir)^{-n}}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f^{(n)}(t) \exp(-irt) dt, \text{ so dass}$$

$$\left|\hat{f}(r)\right| \leq \left|\frac{(ir)^{-n}}{2\pi}\right| \int\limits_{-\pi}^{\pi} \left|f^{(n)}(t) \exp(-irt)\right| dt \leq \left|\frac{(ir)^{-n}}{2\pi}\right| \int\limits_{-\pi}^{\pi} M dt = \left|\frac{(ir)^{-n}}{2\pi}\right| 2\pi M$$

gilt. □

Für die Stellen $x_1, x_2, ..., x_n$, wo $f^{(n)}$ nicht stetig differenzierbar ist, wird das Integral in mehrere Teilintegrale aufgesplittet, die (nach [Kri06] Kapitel VII, Satz(3.13)(b), Seite 176) existieren. ◇

Aus diesem Lemma kann nun folgender Satz hergeleitet werden.

(2.6) Satz

Sei $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ eine zweifach stetig differenzierbare Funktion. Dann konvergiert $S_n(f, t)$ gleichmäßig gegen f.

Beweis

Nach Lemma (2.5) ist $\left|\hat{f}(r)\right| \leq Mr^{-2}[r \neq 0]$, mit $M = \sup\limits_{t \in \mathbb{T}} \left|f^{(2)}(t)\right| < \infty$. Weil $\sum\limits_{r \neq 0} r^{-2}$ konvergiert, folgt, dass auch $\sum\limits_{r=-n}^{n} \left|\hat{f}(r)\right|$ für $n \to \infty$ konvergiert.

$\overset{Satz (2.1)}{\Rightarrow} S_n(f, t) \xrightarrow{glm} f(t)$.

Dass jede zweifach stetig differenzierbare 2π-periodische Funktion eine gleichmäßig konvergierende Fourier-Reihe besitzt, könnte zu dem Schluss führen, dass die Konvergenz einer Fourier-Reihe leicht festzustellen ist. Es sollte allerdings noch erwähnt werden, dass dies nicht die beste Möglichkeit ist und die hier vorgestellten Sätze auch Probleme mit sich bringen können.

§3 Abschätzung der Konvergenz

In diesem Kapitel wird sich mit der Genauigkeit der Konvergenz von Fourier-Reihen beschäftigt. Es stellt sich also die Frage, wie groß ein n gewählt werden muss, also die wievielte Partialsumme von der zu f gehörigen Fourierreihe eine gute Approximation darstellt. Dies wird zuerst an einem Beispiel gezeigt und anschließend in einem Lemma zusammengefasst.

(3.1) Beispiel
Sei $h : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$, mit $h(x) = \pi/2 - |x|, [0 \leq |x| \leq \pi]$.

Dann ist
(i) $|h(x) - S_n(h,x)| \leq 2\pi^{-1}/(n-1)$
(ii) $h(0) - S_n(h,0) \geq 2\pi^{-1}/(n+2)$

Bevor diese Eigenschaften bewiesen werden, sollte zuerst $\hat{h}(r)$ bestimmt werden:

$$\begin{aligned}
\hat{h}(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\exp(-irt)dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} h(t)\exp(-irt)dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} h(t)\exp(-irt)dt \\
&\overset{Satz\ 1.6}{=} \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} h(t)(\exp(irt) + \exp(-irt))dt \\
&\overset{\cos(t)=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}}{=} \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} h(t)\cos(rt)dt = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi/2 - t)\cos(rt)dt \\
&\overset{r\neq 0}{=} \underbrace{\frac{1}{\pi}\left[(\pi/2 - t)\frac{\sin(rt)}{r}\right]_0^{\pi}}_{=0,\ da\ \ \sin r\pi=0, \forall r\in\mathbb{Z}} + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{\sin(rt)}{r}dt\ (partiell\ integriert) \\
&= \frac{1}{\pi r}\int_{0}^{\pi}\sin(rt)dt = \frac{1}{\pi r^2}\left[-\cos(rt)\right]_0^{\pi} = \begin{cases} 0,\ r\ gerade,\ r\neq 0 \\ 2/(\pi r^2)\ ,\ r\ ungerade \end{cases}
\end{aligned}$$

Zudem gilt:

$$\hat{h}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\exp(0)dt = \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}(\frac{\pi}{2}+t)dt + \int_{0}^{\pi}(\frac{\pi}{2}-t)dt\right) = 0$$

Daher konvergiert $\sum_{r=-n}^{n}\left|\hat{h}(r)\right|$ und nach Satz(2.1) konvergiert dann auch $S_n(h,x) \xrightarrow{glm} h(x)$ gleichmäßig auf $\mathbb{T}$. Die Eigenschaften (i) und (ii) lassen sich nun nachweisen.

Beweis
(i) Da $S_n(h,x) \xrightarrow{glm} h(x)$ für $n \to \infty$, folgt:

$$|h(x) - S_n(h,x)| = \left|\sum_{|r|\geq n+1} \hat{h}(r)\exp(irx)\right| \overset{\Delta-Ungl.}{\leq} \sum_{|r|\geq n+1}\left|\hat{h}(r)\right| = \sum_{\substack{|r|\geq n+1,\\ r\ ungerade}} 2/(\pi r^2).$$

Mit

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{|r|\geq n+1,\\ r\ ungerade}} r^{-2} &= \sum_{\substack{r\geq n+1,\\ r\ ungerade}} 2r^{-2} \leq \sum_{r\geq n} r^{-2} \leq \sum_{r\geq n}(r(r-1))^{-1}\\ &= \sum_{r\geq n}((r-1)^{-1} - r^{-1}) \overset{Teleskop-summe}{=} (n-1)^{-1}\end{aligned}$$

folgt, dass $|h(x) - S_n(h,x)| \leq 2\pi^{-1}/(n-1)$.

(ii) Es gilt, dass $S_n(h,0) = \sum_{\substack{|r|\leq n,\\ r\ ungerade}} 2/(\pi r^2)$, wobei alle Terme positiv sind, da $S_n(h,0) \longrightarrow h(0)$ konvergiert, $h(0) - S_n(h,0) = \sum_{\substack{|r|\geq n+1,\\ r\ ungerade}} 2/(\pi r^2)$.

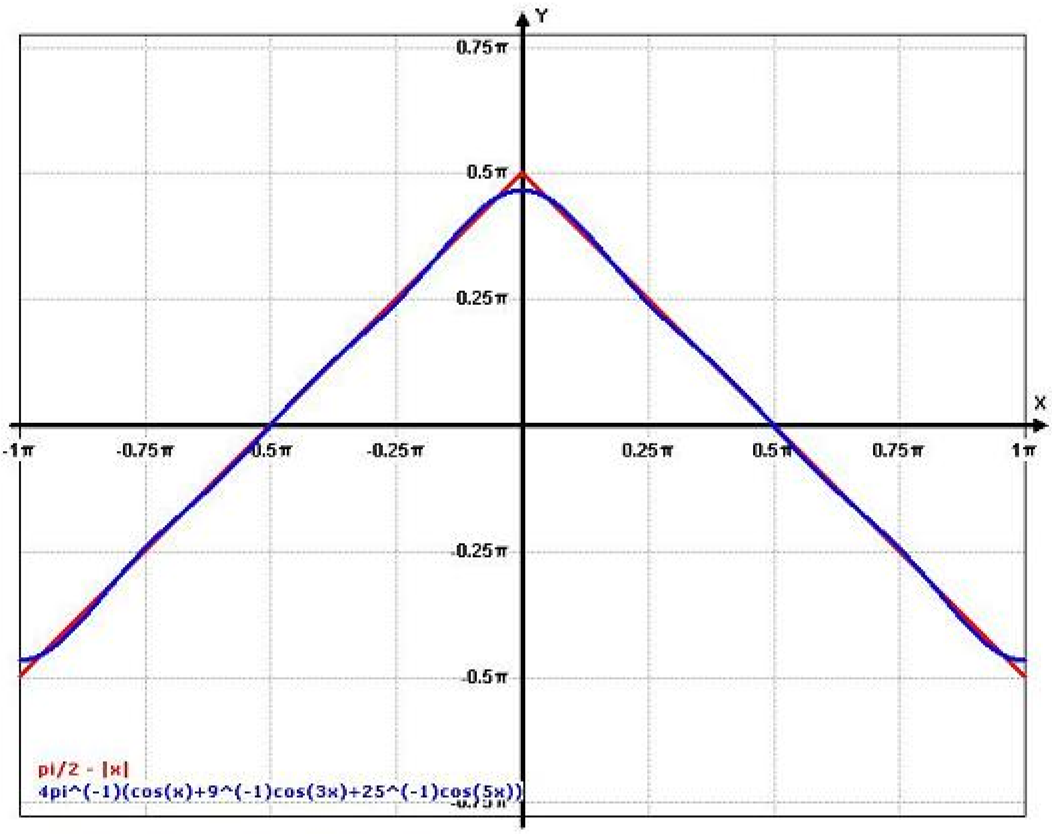
Wegen

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{|r|\geq n+1,\\ r\ ungerade}} r^{-2} &= \sum_{\substack{r\geq n+1,\\ r\ ungerade}} 2r^{-2} \geq \sum_{r\geq n+2} r^{-2} \geq \sum_{r\geq n+2}(r(r+1)))^{-1}\\ &= \sum_{r\geq n+2}(r^{-1} - (r+1)^{-1}) \overset{Teleskop-summe}{=} (n+2)^{-1}\end{aligned}$$

folgt, dass $h(0) - S_n(h,0) \geq 2\pi^{-1}/(n+2)$. □

Für $n = 6$ ergibt sich beispielsweise $|h(x) - S_6(h,x)| \leq 2\pi^{-1}/5 \approx 0,12$ und $h(0) - S_6(h,0) \geq 2\pi^{-1}/8 \approx 0,08$. In diesem Fall erhält man also schon bei der sechsten

Partialsumme eine recht gute Approximation. Eine solch gute Abschätzung erhält man allerdings nicht bei jeder Funktion. Graphisch betrachtet, sieht der Abstand zwischen den Funktionen wie folgt aus:



Allgemeiner formuliert, kann man folgendes Lemma zur Abschätzung aufführen:

(3.2) Lemma
Für eine gegebene, fallende Folge $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$ mit $\delta_n \to 0$ für $n \to \infty$ können wir eine stetige Funktion $g : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ finden mit folgenden Eigenschaften:

(i) $S_n(g,t) \overset{glm}{\to} g(t)$

(ii) $\sup_{t \in \mathbb{T}} |g(t) - S_n(g,t)| \geq \delta_n, \forall n \geq 0.$

Beweis
Setze $a_r = 0$ für alle $r \leq -1$, $a_0 = \delta_0$ und $a_r = \delta_r - \delta_{r-1}$ für $r \geq 1$. Dann gilt:

$$\sum_{r=-n}^{n} |a_r| = \delta_0 + \sum_{r=1}^{n} (\delta_{r-1} - \delta_r) = 2\delta_0 - \delta_n \leq 2\delta_0$$

für alle $n \geq 1$ und $\sum\limits_{r=-n}^{n} |a_r|$ konvergiert für $n \longrightarrow \infty$. Nach Satz (2.2) folgt, dass $\sum\limits_{r=-n}^{n} a_r \exp irt$ gleichmäßig gegen eine stetige Funktion $g(t)$ konvergiert, mit $\hat{g}(r) = a_r$. Somit gilt $S_n(g,t) \xrightarrow{glm} g$, aber auch

$S_n(g,0) - g(0) = -\sum\limits_{r=n+1}^{\infty} a_r = \sum\limits_{r=n+1}^{\infty} (\delta_{r-1} - \delta_r) = \delta_n.$

Literatur

[Fol] FOLLAND, Gerald B.: *Fourier analysis and its applications*

[Kör] KÖRNER, T.W.: *Fourier Analysis*

[Kri05] KRIEG, Aloys: *Analysis I*. RWTH Aachen, 2005

[Kri06] KRIEG, Aloys: *Analysis II*. RWTH Aachen, 2006