Die Abhängigkeit vom Gitter

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 22.10.2007

Martin Woitalla

In dieser Ausarbeitung wird die Abhängigkeit der WEIERSTRASSschen $\wp$-Funktion und der EISENSTEIN-Reihen vom Gitter Ω behandelt. Wir werden sehen, dass man sich dabei auf Gitter der Form $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ zurückziehen kann. Sei zunächst aber $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$ ein beliebiges Gitter in $\mathbb{C}$.

§1 Homogenität und Basiswechsel

Die sogenannten EISENSTEIN-Reihen sind definiert durch

$$G_k = \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \omega^{-k} \quad \text{für alle} \quad k \geq 3.$$

Analog zu [K]2.3(3)[1] definieren wir

$$e_k := \wp(\omega_k/2) \quad \text{für} \quad k = 1,2,3 \quad , \quad \text{wobei} \quad \omega_3 := \omega_1 + \omega_2.$$

Durch

$$g_2(\Omega) := 60G_4(\Omega) \quad \text{und} \quad g_3(\Omega) := 140G_6(\Omega)$$

werden die WEIERSTRASS-Invarianten des Gitters Ω erklärt. (Im Folgenden werden wir anstatt $g_2(\Omega)$ auch kurz g_2 schreiben, wenn klar ist, um welches Gitter es sich handelt; analog wird auch für andere von Ω abhängige Größen verfahren.) Man nennt

$$\Delta(\Omega) := g_2^3(\Omega) - 27g_3^2(\Omega)$$

die Diskriminante und

$$j(\Omega) := (12g_2(\Omega))^3/\Delta(\Omega)$$

die absolute Invariante des Gitters Ω. Es gilt

$$\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_2 - e_3)^2(e_3 - e_1)^2 \neq 0.$$

Mit Ω ist auch $\lambda\Omega$ ein Gitter in $\mathbb{C}$ für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$. Damit erhält man sofort

$$\begin{aligned} \wp_{\lambda\Omega}(\lambda z) &= \lambda^{-2} \cdot \wp_\Omega(z), \quad G_k(\lambda\Omega) = \lambda^{-k} \cdot G_k(\Omega), \quad \text{für alle} \quad k \geq 3, \\ g_2(\lambda\Omega) &= \lambda^{-4} \cdot g_2(\Omega), \quad g_3(\lambda\Omega) = \lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega), \\ \Delta(\lambda\Omega) &= \lambda^{-12} \cdot \Delta(\Omega), \quad j(\lambda\Omega) = j(\Omega) \end{aligned} \tag{1}$$

[1][K] M. Koecher, A. Krieg: Elliptische Funktionen und Modulformen, Springer 2007

Dies verifiziert man wie folgt:

Wir verwenden die Reihendarstellung der $\wp$-Funktion und erhalten

$$\begin{aligned}\wp_{\lambda\Omega}(\lambda z) &= (\lambda z)^{-2} + \sum_{0\neq\omega\in\lambda\Omega} ((\lambda z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}) \\ &= \lambda^{-2}\cdot z^{-2} + \sum_{0\neq\omega\in\Omega} ((\lambda z-\lambda\omega)^{-2} - (\lambda\omega)^{-2}) \\ &= \lambda^{-2}\cdot z^{-2} + \lambda^{-2}\sum_{0\neq\omega\in\Omega} ((z-\omega)^{-2} - \omega^{-2}) \\ &= \lambda^{-2}\wp_{\Omega}(z).\end{aligned}$$

Eine ähnliche Rechnung kann man nun zur Überprüfung der Beziehung für die G_k durchführen

$$G_k(\lambda\Omega) = \sum_{0\neq\omega\in\lambda\Omega} \omega^{-k} = \sum_{0\neq\omega\in\Omega} (\lambda\omega)^{-k} = \lambda^{-k}\sum_{0\neq\omega\in\Omega} \omega^{-k} = \lambda^{-k}\cdot G_k(\Omega).$$

Die anderen Identitäten sind Anwendungen der eben gezeigten Aussagen. Man erhält den

(1.1) Satz
Für Gitter Ω und Ω' sind äquivalent:

(i) Es gibt ein $0\neq\lambda\in\mathbb{C}$ mit $\lambda\Omega=\Omega'$.

(ii) $j(\Omega')=j(\Omega)$. $\diamond$

Beweis
(i) $\Rightarrow$ (ii): Die Aussage ist klar mit (1).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Sei zunächst $j(\Omega')=j(\Omega)\neq 0$. Dann gilt

$$j(\Omega) := \frac{12g_2^3}{g_2^3-27g_3^2},$$

woraus weiter $g_2(\Omega)\neq 0, g_2(\Omega')\neq 0$ und $\frac{g_2(\Omega')}{g_2(\Omega)} = \lambda^{-4}$ für ein $0\neq\lambda\in\mathbb{C}$ folgt.
Mit (1) erhält man daraus

$$g_2(\Omega') = \lambda^{-4}\cdot g_2(\Omega) = g_2(\lambda\Omega). \tag{2}$$

Weiter folgert man daraus

$$\frac{12g_2(\Omega)^3}{g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega)^2} = j(\Omega) = j(\Omega') = \frac{12g_2(\Omega')^3}{g_2(\Omega')^3 - 27g_3(\Omega')^2}$$
$$= \frac{\lambda^{-12}12g_2(\Omega)^3}{\lambda^{-12}g_2(\Omega)^3 - 27g_3(\Omega')^2}.$$

Das liefert uns

$$g_2^3(\Omega) - \lambda^{12} \cdot 27g_3^2(\Omega') = g_2^3(\Omega) - 27g_3^2(\Omega).$$

Daraus erhält man weiter

$$g_3(\Omega') = \pm\lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega) \overset{(1)}{=} \pm g_3(\lambda\Omega).$$

Da (2) beim Übergang $\lambda \to i\lambda$ unverändert bleibt, die letzte Gleichung jedoch ihr Vorzeichen ändert, kann man also immer die Form

$$g_2(\Omega') = g_2(\lambda\Omega) \quad \text{und} \quad g_3(\Omega') = g_3(\lambda\Omega)$$

erreichen. Da das Gitter gemäß [K]3.3 Korollar F eindeutig durch die Weierstrass-Invarianten g_2 und g_3 festgelegt wird, erhält man $\Omega' = \lambda\Omega$.

Es bleibt noch der Fall

$$j(\Omega') = j(\Omega) = 0$$

zu betrachten. Dann folgt

$$g_2(\Omega) = 0 \quad \text{und} \quad g_2(\Omega') = 0.$$

Da wegen [K]3.4 Korollar C stets $\Delta \neq 0$ gilt, folgt

$$g_3(\Omega') = \lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega) = g_3(\lambda\Omega) \quad \text{für ein} \quad 0 \neq \lambda \in \mathbb{C},$$

und man erhält auch hier die Behauptung. □

Ist (ω_1, ω_2) eine Basis von Ω, so schreibt man auch

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) := \wp_\Omega(z) \quad \text{und} \quad G_k(\omega_1, \omega_2) := G_k(\Omega) \quad \text{für alle} \quad k \geq 3.$$

Sind zwei Basen (ω_1, ω_2) und (ω_1', ω_2') von Ω gegeben, so gilt, da $\wp$ und G_k unabhängig von der Basiswahl sind, stets

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) = \wp(z; \omega_1', \omega_2') \quad \text{und} \quad G_k(\omega_1, \omega_2) = G_k(\omega_1', \omega_2') \quad \text{für alle} \quad k \geq 3.$$

Das Basis-Lemma liefert darüber hinaus die Beziehung

$$\begin{pmatrix}\omega_1'\\ \omega_2'\end{pmatrix} = U \begin{pmatrix}\omega_1\\ \omega_2\end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad U = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{Z}),$$

also

$$\omega_1' = a\omega_1 + b\omega_2, \quad \omega_2' = c\omega_1 + d\omega_2 \quad \text{und} \quad a,b,c,d \in \mathbb{Z}, \quad ad - bc = \pm 1.$$

Da $(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2)$ eine Basis von $\lambda\Omega$ bildet, lässt sich (1) für $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ und $k \geq 3$ auch in der Form

$$\wp(\lambda z; \lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-2} \cdot \wp(z; \omega_1, \omega_2), \quad G_k(\lambda\omega_1, \lambda\omega_2) = \lambda^{-k} \cdot G_k(\omega_1, \omega_2)$$

schreiben. Als Basis von Ω sind ω_1, ω_2 über $\mathbb{R}$ linear unabhängig und deshalb gilt $\tau := \frac{\omega_1}{\omega_2} \notin \mathbb{R}$. Da mit (ω_1, ω_2) auch $(-\omega_1, \omega_2)$ eine Basis von Ω ist, darf man ohne Einschränkung $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ annehmen. Betrachtet man die Polarkoordinatendarstellung von ω_i, also

$$\omega_1 = r \cdot e^{i\varphi}, \quad \omega_2 = r' \cdot e^{i\varphi'} \quad \text{mit} \quad r, r' \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad \varphi, \varphi' \in [0, 2\pi),$$

und setzt diese in τ ein, so erhält man

$$\tau \;=\; \frac{r \cdot e^{i\varphi}}{r' \cdot e^{i\varphi'}} = \frac{r}{r'} \cdot e^{i(\varphi - \varphi')} = \frac{r}{r'} \cdot \left[\cos(\varphi - \varphi') + i \cdot \sin(\varphi - \varphi')\right]$$

und damit $\mathrm{Im}\,\tau > 0$ genau dann, wenn $\sin(\varphi - \varphi') > 0$ gilt, was genau dann eintritt, wenn das Dreieck $(0, \omega_2, \omega_1)$ positiv orientiert ist, wie man sich leicht überlegt.

Setzt man nun

$$\lambda := \omega_2^{-1},$$

so erhält man

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-2} \cdot \wp(z/\omega_2; \tau, 1) \quad \text{und} \quad G_k(\omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-k} \cdot G_k(\tau, 1) \tag{3}$$

für alle $k \geq 3$. Zur Untersuchung von elliptischen Funktionen darf man daher ohne wesentliche Einschränkung $\omega_2 = 1$, also

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \tau \in \mathbb{H}$$

annehmen. Dabei ist die *obere Halbebene* $\mathbb{H}$ definiert durch

$$\mathbb{H} := \{\tau \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,\tau > 0\}.$$

Wegen

$$\tau' := \frac{\omega_1'}{\omega_2'} = \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} = \frac{\omega_2^{-1}}{\omega_2^{-1}} \cdot \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

und

$$\operatorname{Im} \tau' = \operatorname{Im} \frac{(a\tau + b)(c\overline{\tau} + d)}{(c\tau + d)(c\overline{\tau} + d)} = \operatorname{Im} \frac{ac\tau\overline{\tau} + bd + ad\tau + bc\overline{\tau}}{|c\tau + d|^2} = \frac{ad - bc}{|c\tau + d|^2} \cdot \operatorname{Im} \tau$$

darf man dann aber beim Übergang von der Basis $(\tau, 1)$ von Ω zur Basis $(\tau', 1)$ von Ω'' nur noch Matrizen aus der speziellen linearen Gruppe über $\mathbb{Z}$, also

$$\mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) := \{U \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{Z}); \quad \det U = 1\},$$

zulassen, so dass auch $\tau' \in \mathbb{H}$ gilt. Setzt man ω_1', ω_2' in (3) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \wp(z; \omega_1', \omega_2') &= \wp(z, a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2) \\ &\overset{(3)}{=} (c\omega_1 + d\omega_2)^{-2} \cdot \wp\left(\frac{z}{c\omega_1 + d\omega_2}, \frac{a\omega_1 + b\omega_2}{c\omega_1 + d\omega_2}, 1\right) \\ &= \omega_2^{-2} \cdot (c\tau + d)^{-2} \cdot \wp\left(\frac{z/\omega_2}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, 1\right). \end{aligned}$$

Weiter gilt natürlich

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) = \omega_2^{-2} \cdot \wp(z/\omega_2; \tau, 1).$$

Die Unabhängigkeit der Weierstraßschen $\wp$-Funktion von der Wahl der Basis und die Bijektivität von $z \to z/\omega_2$ implizieren schliesslich

$$\wp(z; \omega_1, \omega_2) = \wp(z; \omega_1', \omega_2')$$

und damit

$$\wp\left(\frac{z}{c\tau + d}, \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, 1\right) = (c\tau + d)^2 \cdot \wp(z; \tau, 1).$$

Wir betrachten noch das Tupel $(c\tau + d) \cdot (\tau', 1) = (a\tau + b, c\tau + d)$ und schreiben

$$\begin{aligned} \tau &= (ad - bc)\tau + bd - bd = d \cdot (a\tau + b) - b \cdot (c\tau + d), \\ 1 &= ad - bc = a \cdot (c\tau + d) - c \cdot (a\tau + b) \end{aligned}$$

und sehen so, dass $(\tau', 1)$ eine Basis von $\frac{1}{c\tau + d}\Omega$ bildet. Völlig analog zur ersten Identität zeigt man dann noch

$$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}, 1\right) = (c\tau + d)^k \cdot G_k(\tau, 1) \quad \text{für alle} \quad k \geq 4. \tag{4}$$

§2 Die Fourier-Entwicklung der Eisenstein-Reihen

Aus den obigen Überlegungen geht hervor, dass man ohne wesentliche Einschränkungen ein Gitter der Form

$$\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z} \quad \text{mit} \quad \operatorname{Im}\tau > 0, \quad \text{also} \quad \tau \in \mathbb{H}$$

betrachten darf. Das gibt Anlass zu folgender Notation:

$$G_k(\tau) := G_k(\tau, 1) = \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} (m\tau + n)^{-k}$$

für alle geraden $k \geq 4$.

Ein wesentliches Hilfsmittel zur Reihendarstellung beinhaltet folgende Verallgemeinerung der *Sinus-Partialbruchentwicklung*:

(2.1) Proposition
Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und alle ganzen $k \geq 2$ gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (\tau + n)^{-k} = \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r\tau}. \qquad \diamond$$

Beweis
Nach dem *Satz von der Partialbruchentwicklung des Cotangens*[2] gilt

$$\pi \cot(\pi z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2} \quad \text{für alle} \quad z \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{Z},$$

wobei diese Reihe auf $\mathbb{C}\backslash\mathbb{Z}$ lokal gleichmäßig konvergiert. Nach dem Satz von Weierstrass darf man also unter der Summe differenzieren. Differentiation der linken Seite ergibt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau}[\pi\cot(\pi\tau)] = \frac{d}{d\tau}\left[\pi\tan(\pi\tau)^{-1}\right] &= -\pi\tan(\pi\tau)^{-2}\cos(\pi\tau)^{-2}\cdot\pi \\ &= -\left(\frac{\pi}{\sin(\pi\tau)}\right)^2. \end{aligned}$$

[2] vergleiche Skript zur Analaysis IV (XXI)(4.2), A. Krieg; Aachen 2007

Auf der rechten Seite erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau}\left[\frac{1}{\tau}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau}{\tau^2-n^2}\right] &= -\frac{1}{\tau^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2-2n^2-2\cdot 2\tau\cdot\tau}{(\tau^2-n^2)^2}\\
&= -\frac{1}{\tau^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\tau^2+2n^2}{(\tau^2-n^2)^2}\\
&\overset{\text{Part.br.zerlg.}}{=} -\frac{1}{\tau^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{(\tau+n)^2}+\frac{-1}{(\tau-n)^2}\right)\\
&= -\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-2},
\end{aligned}$$

so dass man zusammenfassend

$$\left(\frac{\pi}{\sin(\pi\tau)}\right)^2=\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-2}\quad\text{für alle}\quad\tau\in\mathbb{C}\quad\text{mit}\quad\tau\notin\mathbb{Z}$$

erhält. Ist nun $\tau\in\mathbb{H}$, so hat man wegen

$$\left|e^{2\pi i\tau}\right|=\underbrace{\left|e^{2\pi i\mathrm{Re}\,\tau}\right|}_{=1}\left|e^{-2\pi\mathrm{Im}\,\tau}\right|<1$$

auch

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\pi}{\sin(\pi\tau)}\right)^2 &= \left(\frac{2\pi i}{e^{\pi i\tau}-e^{-\pi i\tau}}\right)^2=e^{2\pi i\tau}\frac{(-2\pi i)^2}{(1-e^{2\pi i\tau})^2}\\
&\overset{\text{Abl. geom. Reihe}}{=} (-2\pi i)^2\cdot\sum_{r=1}^{\infty}re^{2\pi ir\tau}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung für $k=2$ bewiesen. Da beide Seiten lokal gleichmäßig in τ konvergieren, folgt der allgemeine Fall, indem man wiederholt nach τ differenziert

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in\mathbb{Z}}(-k)(\tau+n)^{-k-1}=\frac{d}{d\tau}\left[\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-k}\right] &= \frac{d}{d\tau}\left[\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{r=1}^{\infty}r^{k-1}e^{2\pi ir\tau}\right]\\
&= 2\pi i\cdot\frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!}\cdot\sum_{r=1}^{\infty}r\cdot r^{k-1}e^{2\pi ir\tau}.
\end{aligned}$$

Division durch $(-k)$ liefert dann

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}}(\tau+n)^{-k-1}=\frac{(-2\pi i)^{k+1}}{(k)!}\cdot\sum_{r=1}^{\infty}r^ke^{2\pi ir\tau},$$

was zu zeigen war. □

Die linke Seite ist offenbar periodisch in τ mit der Periode 1, die rechte Seite gibt diesen Sachverhalt in Form einer FOURIER-Reihe wieder.

(2.2) Bemerkung
Die Aussage der Proposition bleibt mit $\Gamma(k)$ statt $(k-1)!$ für beliebiges reelles $k > 1$ richtig, und wird dann manchmal nach R. LIPSCHITZ benannt[3]. $\diamond$

(2.3) Satz
Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und alle geraden $k \geq 4$ gilt

$$G_k(\tau) = 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_{k-1}(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}$$

mit

$$\zeta(s) := \sum_{m=1}^{\infty} m^{-s} \quad \text{für alle} \quad s > 1 \quad \text{und} \quad \sigma_s(m) := \sum_{d\in\mathbb{N}, d|m} d^s \quad \text{für alle} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Obige FOURIER-Reihe konvergiert für $\varepsilon > 0$ in jedem Bereich $\{\tau \in \mathbb{H}; \quad \operatorname{Im} \tau \geq \varepsilon\}$ absolut gleichmäßig. Die G_k sind auf $\mathbb{H}$ holomorph und erfüllen

$$G_k\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^k \cdot G_k(\tau) \quad \text{für alle} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}).$$

$\diamond$

Da die FOURIER-Entwicklung einer holomorphen Funktion eindeutig ist[4], wird nunmehr klar, dass die G_k für $k \geq 4$ gerade nicht identisch verschwinden. Insbesondere hat man für die Abhängigkeit der G_k vom Gitter den Zusammenhang mit einer Funktion in *einer* Variablen. Wegen (3) lassen sich alle im Gitter $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ gewonnenen Aussagen über elliptische Funktionen auf beliebige Gitter übertragen.

Beweis
Wegen der absoluten Konvergenz der EISENSTEIN-Reihen, die in [K]1.9(2) gezeigt

[3] J. Reine Angewandte Mathematik, **105**, 127-156 (1889)
[4] vergleiche Skript zur Analaysis IV (XX)(4.3), A. Krieg; Aachen 2007

wurde, kann man die Reihe für $\Omega = \mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ umordnen und erhält

$$\begin{aligned}
G_k(\tau) &= \sum_{0\neq\omega\in\Omega} \omega^{-k} \\
&= \sum_{(0,0)\neq(m,n)\in\mathbb{Z}} (m\tau+n)^{-k} \\
&= \sum_{n\neq 0, m=0} (m\tau+n)^{-k} + \sum_{n\in\mathbb{Z}, m\neq 0} (m\tau+n)^{-k} \\
&= \sum_{n\neq 0} n^{-k} + \sum_{n\in\mathbb{Z}, m\neq 0} (m\tau+n)^{-k} \\
&= 2\zeta(k) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau+n)^{-k} + \sum_{m=-\infty}^{-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau+n)^{-k} \\
&\overset{k \text{ gerade}}{=} 2\zeta(k) + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau+n)^{-k} + \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau-n)^{-k} \\
&= 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau+n)^{-k}
\end{aligned}$$

Da $m\tau \in \mathbb{H}$ für $m > 0$ gilt, lässt sich (2.1) anwenden, so dass wir

$$\begin{aligned}
G_k(\tau) &= 2\zeta(k) + 2\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n\in\mathbb{Z}} (m\tau+n)^{-k} \\
&= 2\zeta(k) + 2\sum_{s=1}^{\infty} \frac{(-2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{r=1}^{\infty} r^{k-1} e^{2\pi i r s\tau} \\
&\overset{rs=m}{=} 2\zeta(k) + 2\frac{(2\pi i)^k}{(k-1)!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{d\in\mathbb{N}, d|m} d^{k-1} \cdot e^{2\pi i m\tau}
\end{aligned}$$

erhalten. Dabei wurde im letzten Schritt

$$\{r \in \mathbb{N}; \quad \exists \quad s \in \mathbb{N} : \quad rs = m\} = \{r \in \mathbb{N}; \quad r|m\} = \{s \in \mathbb{N}; \quad s|m\}$$

für $m \in \mathbb{N}$ verwendet. Noch zu behandeln bleibt die lokal gleichmäßige Konvergenz obiger Reihe. Dazu definieren wir

$$f_m := \sum_{d\in\mathbb{N}, d|m} d^{k-1} \cdot e^{2\pi i m\tau}.$$

Sei $\varepsilon > 0$ und Im $\tau \geq \varepsilon$. Nun hat man

$$\begin{aligned}
|f_m| &= \left|\sum_{d\in\mathbb{N},d|m} d^{k-1}\right| \cdot \left|e^{2\pi i m\tau}\right| \\
&= \left|\sum_{d\in\mathbb{N},d|m} d^{k-1}\right| \cdot \left|e^{2\pi i m\cdot \mathrm{Re}\,\tau}\right| \cdot \left|e^{-2\pi m\cdot \mathrm{Im}\,\tau}\right| \\
&\leq \sum_{d\in\mathbb{N},d|m} m^{k-1} \cdot \left|e^{-2\pi m\cdot \mathrm{Im}\,\tau}\right| \\
&\leq m^k \cdot e^{-(2\pi\epsilon)m} =: a_m.
\end{aligned}$$

Weiter bekommt man nun

$$\frac{a_{m+1}}{a_m} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^k \cdot e^{-2\pi\varepsilon} \xrightarrow{m\to\infty} e^{-2\pi\varepsilon} < 1,$$

so dass mit dem WEIERSTRASS*schen-Majorantenkriterium für Funktionenfolgen*[5] und dem *Quotientenkriterium für Reihen* die absolut gleichmäßige Konvergenz auf

$$\{\tau \in \mathbb{H}; \mathrm{Im}\,\tau \geq \varepsilon\}$$

folgt. Mit dem Satz von WEIERSTRASS[6] folgt dann auch die Holomorphie von $\tau \mapsto G_k(\tau)$. Das Transformationsverhalten ist eine Umformulierung von (4). □

Mit Hilfe der bekannten Formeln[7]

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}$$

erhält man speziell

$$\begin{aligned}
G_4(\tau) &= 2\zeta(4) + \frac{16\pi^4}{3} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \qquad (5) \\
&= \frac{\pi^4}{45}\left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right)
\end{aligned}$$

[5]vergleiche Skript zur Analaysis II (VIII)(1.10), A. Krieg; Aachen 2006
[6]vergleiche Skript zur Analaysis IV (XVIII)(5.1), A. Krieg; Aachen 2007
[7]vergleiche Skript zur Analaysis IV (XXI)(4.6), A. Krieg; Aachen 2007

und

$$\begin{aligned} G_6(\tau) &= \frac{2\pi^6}{945} - \frac{64\pi^6}{60} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \\ &= \frac{2\pi^6}{945} \left(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \right). \end{aligned}$$

Bereits 1881 hat A. Hurwitz (1859–1919) in seiner Dissertation (Math. Werke I, 1–66) gezeigt, dass die algebraischen Gleichungen, denen die Reihen G_k nach Korollar [K]3.3D genügen, Anlass zu zahlentheoretischen Aussagen geben. Wir notieren den einfachsten Fall als

(2.4) Korollar (Hurwitz-Identität)
Für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sigma_7(m) = \sigma_3(m) + 120 \sum_{r,s \in \mathbb{N}, r+s=m} \sigma_3(r)\sigma_3(s).$$

◇

Beweis
Man hat die Identität $7G_8 = 3G_4^2$ gemäß [K] 3.3(4). Dann verwenden wir (5) und

$$G_8(\tau) = 2\zeta(8) + 2\frac{(2\pi)^8}{7!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_7(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}.$$

Nun multipliziert man die Summen aus und erhält

$$\begin{aligned} &14\zeta(8) + 14\frac{(2\pi)^8}{7!} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_7(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} = 7G_8(\tau) = 3G_4^2(\tau) \\ &= 3\left(2\zeta(4) + \frac{16\pi^4}{3} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \right)^2 \\ &= 12\zeta^2(4) + 4\zeta(4)16\pi^4 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} + \frac{16^2\pi^8}{3} \sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} \sigma_3(r)\sigma_3(s) \cdot e^{2\pi i (r+s)\tau} \\ &= 12\zeta^2(4) + 3\frac{\pi^8}{45^2} \left(480 \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} + 240^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{r+s=m} \sigma_3(r)\sigma_3(s) \cdot e^{2\pi i (r+s)\tau} \right). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich ergibt $7\zeta(8) = 6\zeta^2(4)$ und

$$7\frac{2(2\pi)^8}{7!}\sigma_7(m) = 3\frac{\pi^8}{45\cdot 45}\left(480\cdot\sigma_3(m) + 240\cdot 240\sum_{r+s=m}\sigma_3(r)\sigma_3(s)\right).$$

Die Behauptung folgt nun direkt aus der Primfaktorzerlegung der Koeffizienten, denn es gilt

$$\frac{3\cdot 480}{45\cdot 45} = \frac{2^5\cdot 3^2\cdot 5}{3^4\cdot 5^2}, \quad \text{bzw.} \quad 6! = 2^4\cdot 3^2\cdot 5.$$ □

(2.5) Bemerkung
Wer wegen der „Reinheit der Methode“ oder aus anderen Gründen die Werte für $\zeta(4)$ und $\zeta(6)$ nicht als bekannt voraussetzen will, kann diese – und eine lineare Rekursionsformel für die $\zeta(k)$ mit $k \geq 4$ gerade – aus der Identität [K]3.3(4) durch Vergleich der Koeffizienten von $e^{2\pi i\tau}$ gewinnen. ◇

§3 Ein alternativer Beweis der Hurwitz-Identität

Die Hurwitz-Identität ist eine Aussage über natürliche Zahlen und als solche Gegenstand der elementaren Zahlentheorie. Es ist jedoch bis heute kein Beweis bekannt, der innerhalb der elementaren Zahlentheorie geführt werden kann. Inhalt dieses Abschnitts ist ein unveröffentlichter Beweis, der von D. Zagier und N. Skoruppa (1978) stammt und mit formalen (oder konvergenten) Potenzreihen mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$ arbeitet.

Für eine Unbestimmte (oder reelle Variable x mit $|x| < 1$) setzt man

$$F_n := F_n(x) := \frac{x^n}{1-x^n}$$

und bemerkt zunächst das

(3.1) Lemma

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_r(n)x^n = \sum_{m=1}^{\infty} m^r F_m, \quad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}, |x| < 1. \tag{6}$$
◇

Beweis
Wir setzen zunächst die Definition der $\sigma(n)$ ein und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_r(n) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d \in \mathbb{N}, d|n} d^r x^n.$$

Nun geht man wie im Beweis von Satz (2.3) vor und darf die Summe umschreiben in

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d \in \mathbb{N}, d|n} d^r x^n = \sum_{\mu=1}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^r x^{\mu\nu} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^r \Bigg(\underbrace{\sum_{\mu=0}^{\infty} (x^\nu)^\mu}_{P} -1 \Bigg),$$

da P wegen $|x| < 1$ als geometrische Reihe absolut konvergent in x^ν ist, so dass man

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^r \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} (x^\nu)^\mu - 1 \right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^r \left(\frac{1}{1-x^\nu} - 1 \right) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^r \left(\frac{x^\nu}{1-x^\nu} \right)$$

und damit die Behauptung erhält. □

Weiter gilt

$$F_m F_n = F_{m+n}(F_m + F_n + 1). \tag{7}$$

Um diese Identität zu verifizieren setzt man die Definition der F_k auf der rechten

Seite ein. Eine Rechnung liefert uns dann

$$\begin{aligned}
&F_{m+n}(F_m + F_n + 1)\\
&= \frac{x^{m+n}}{1-x^{m+n}} \cdot \left(\frac{x^m}{1-x^m} + \frac{x^n}{1-x^n} + 1 \right)\\
&= \frac{x^{2m+n}}{(1-x^m)(1-x^{m+n})} + \frac{x^{m+2n}}{(1-x^n)(1-x^{m+n})} + \frac{x^{m+n}}{1-x^{m+n}}\\
&= \frac{(x^{2m+n})(1-x^n) + (x^{m+2n})(1-x^m) + (x^{m+n})(1-x^m)(1-x^n)}{(1-x^{m+n})(1-x^m)(1-x^n)}\\
&= \frac{x^{2m+n} - x^{2m+2n} + x^{m+2n} - x^{2m+2n} + x^{m+n} - x^{2m+n} - x^{m+2n} + x^{2m+2n}}{(1-x^{m+n})(1-x^m)(1-x^n)}\\
&= \frac{x^{m+n}(1-x^{m+n})}{(1-x^{m+n})(1-x^m)(1-x^n)}\\
&= \frac{x^m \cdot x^n}{(1-x^m)(1-x^n)} \quad = \quad F_m F_n,
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(3.2) Bemerkung
Die Konstruktion der F_m impliziert absolute Konvergenz für die Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} m \cdot F_m$, denn mit dem *Quotientenkriterium für Reihen* gilt

$$\left| \frac{F_{m+1}}{F_m} \right| = \left| \frac{x^{m+1} \cdot (1-x^m)}{x^m \cdot (1-x^{m+1})} \right| = |x| \cdot \left| \frac{(1-x^m)}{(1-x^{m+1})} \right| \xrightarrow{m\to\infty} |x| < 1.$$ ◇

Mit den Abkürzungen

$$A_k := \sum_{m+n=k} mnF_mF_n, \quad B_k := \sum_{n-m=k} mnF_mF_n, \quad C_k := kF_k \cdot \sum_{m=1}^{\infty} mF_m$$

erhält man das

(3.3) Lemma
Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} A_k &= 2F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m(k-m)F_m + \frac{k^3-k}{6}F_k, &(8)\\ B_k &= 2C_k + F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m(m-k)F_m - \sum_{m=k+1}^{\infty} m(m-k)F_m. &(9) \end{aligned}$$

$\diamond$

Beweis
Wir verwenden (7) und bekommen für A_k

$$\begin{aligned} A_k &= \sum_{m+n=k} mnF_mF_n \overset{(2)}{=} \sum_{m+n=k} mnF_{m+n}(F_m + F_n + 1)\\ &= \sum_{m+n=k} mnF_{m+n} \cdot (F_m + F_n) + \sum_{m+n=k} mn \cdot F_{m+n}\\ &= F_k \sum_{m+n=k} mn \cdot F_m + F_k \sum_{m+n=k} mn \cdot F_n + F_k \sum_{m+n=k} mn\\ &= 2F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m(k-m)F_m + F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m(k-m)\\ &= 2F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m(k-m)F_m + \left[k\frac{(k-1)k}{2} - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}\right] \cdot F_k\\ &= 2F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m(k-m)F_m + \frac{3k^2(k-1) - (k-1)k(2k-1)}{6} \cdot F_k\\ &= 2F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m(k-m)F_m + \frac{3k^3 - 3k^2 - 2k^3 + 3k^2 - k}{6} \cdot F_k\\ &= 2F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m(k-m)F_m + \frac{k^3-k}{6} \cdot F_k, \end{aligned}$$

womit die erste Identität gezeigt ist. Es bleibt noch (9) zu zeigen. Mit (7) hat man zunächst

$$F_mF_{m+k} = F_mF_k - F_{m+k}F_k - F_{m+k}.$$

Einsetzen und Umordnen der Summe liefert

$$
\begin{aligned}
B_k &= \sum_{n-m=k} mnF_mF_n \overset{n=m+k}{=} \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_mF_{m+k} \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)(F_mF_k - F_{m+k}F_k - F_{m+k}) \\
&= F_k \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)(F_m - F_{m+k}) - \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k} \\
&= \underbrace{2kF_k \sum_{m=1}^{\infty} mF_m}_{2C_k} + F_k \sum_{m=1}^{\infty} m^2(F_m - F_{m+k}) - mkF_{m+k} - \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k} \\
&\quad - kF_k \sum_{m=1}^{\infty} mF_m \\
&= 2C_k + F_k \sum_{m=1}^{\infty} m^2(F_m - F_{m+k}) - mkF_{m+k} - mkF_m - \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k} \\
&= 2C_k + F_k \sum_{m=1}^{\infty} m(m-k)F_m - m(m+k)F_{m+k} - \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k} \\
&= 2C_k + F_k \sum_{m=1}^{k-1} m(m-k)F_m + F_k \sum_{m=k+1}^{\infty} m(m-k)F_m - F_k \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k} \\
&\quad - \sum_{m=1}^{\infty} m(m+k)F_{m+k} \\
&= 2C_k + F_k \sum_{m=1}^{k-1} m(m-k)F_m + \left(F_k \sum_{m=k+1}^{\infty} m(m-k)F_m - F_k \sum_{m=k+1}^{\infty} (m-k)mF_m \right) \\
&\quad - \sum_{m=k+1}^{\infty} (m-k)mF_m.
\end{aligned}
$$

□

Mit den Beziehungen (8) und (9) gilt

$$\begin{aligned} A_k + 2B_k - 4C_k &= 2F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m(k-m)F_m + \frac{k^3-k}{6}F_k + 2\cdot 2C_k \\ &\quad +2F_k \cdot \sum_{m=1}^{k-1} m \underbrace{(m-k)}_{-(k-m)} F_m - 2\sum_{m=k+1}^{\infty} m(m-k)F_m - 4C_k \\ &= \frac{k^3-k}{6}F_k - 2\sum_{m=k+1}^{\infty} m(m-k)F_m, \end{aligned}$$

so dass wir insgesamt die Identität

$$A_k + 2B_k - 4C_k = \frac{k^3-k}{6}F_k - 2\sum_{m=k+1}^{\infty} m(m-k)F_m \tag{10}$$

erhalten. Damit folgert man nun

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n\right)^2 &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} m^3n^3F_mF_n = \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{mn}{12}(12m^2n^2)F_mF_n \\ &= \sum_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \frac{mn}{12}\left((m+n)^4 + (m-n)^4 - 2m^4 - 2n^4\right)F_mF_n \\ &= \frac{1}{12}\sum_{m,n\in\mathbb{N}} mn(m+n)^4F_mF_n + \frac{1}{12}\sum_{m,n\in\mathbb{N}} mn(m-n)^4F_mF_n \\ &\quad -\frac{2}{12}\sum_{m,n\in\mathbb{N}} mn(m^4+n^4)F_mF_n \\ &= \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{m+n=k} mn(m+n)^4F_mF_n}_{=k^4\cdot A_k} + \frac{1}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{m-n=k} mn(m-n)^4F_mF_n}_{=k^4\cdot B_k} \\ &\quad +\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{n-m=k} mn(m-n)^4F_mF_n}_{=(-k)^4\cdot B_k} - \frac{4}{12}\sum_{k=1}^{\infty}\underbrace{\sum_{n\in\mathbb{N}} nkk^4F_nF_k}_{=k^4\cdot C_k}, \end{aligned}$$

wobei man bei der letzten Gleichung

$$\{m,n\in\mathbb{N}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{m+n=k\} = \bigcup_{k=1}^{\infty}\{m-n=k\} \cup \bigcup_{k=1}^{\infty}\{n-m=k\}$$

und

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \{(k,n); \quad n \in \mathbb{N}\}$$

sowie

$$\sum_{m,n \in \mathbb{N}} mn(m^4 + n^4) F_m F_n = \sum_{m,n \in \mathbb{N}} mnm^4 F_m F_n + \sum_{m,n \in \mathbb{N}} mnn^4 F_m F_n$$

verwendet hat. Jetzt benutzt man (10) und erhält

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{12}(A_k + 2B_k - 4C_k) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k^4}{12} \frac{k^3-k}{6} F_k - \frac{2k^4}{12} \cdot \sum_{m=k+1}^{\infty} m(m-k) F_m \right) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{12} \frac{k^3-k}{6} F_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^4}{12} \cdot \sum_{m=k+1}^{\infty} m(m-k) F_m \\
= \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{12} \frac{k^3-k}{6} F_k - \lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{r} \lim_{s\to\infty} \sum_{m=k+1}^{s} \frac{m}{6} F_m k^4 (m-k) \\
\overset{\text{absolute Konvergenz}}{=} \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{12} \frac{k^3-k}{6} F_k - \lim_{r\to\infty} \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{r} \sum_{m=k+1}^{s} \frac{m}{6} F_m k^4 (m-k) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{12} \frac{k^3-k}{6} F_k - \lim_{s\to\infty} \lim_{r\to\infty} \sum_{m=1}^{s} \sum_{k=1}^{\min(r,m-1)} \frac{m}{6} F_m k^4 (m-k) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{12} \frac{k^3-k}{6} F_k - \lim_{s\to\infty} \sum_{m=1}^{s} \lim_{r\to\infty} \sum_{k=1}^{\min(r,m-1)} \frac{m}{6} F_m k^4 (m-k) \\
= \quad & \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{12} \frac{k^3-k}{6} F_k - \lim_{s\to\infty} \sum_{m=1}^{s} \underbrace{\sum_{k=1}^{m-1} \frac{m}{6} F_m k^4 (m-k),}_{(*)}
\end{aligned}$$

man bekommt also insgesamt

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n \right)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{12} \frac{k^3-k}{6} F_k - \lim_{s\to\infty} \sum_{m=1}^{s} \sum_{k=1}^{m-1} \frac{m}{6} F_m k^4 (m-k). \tag{11}$$

Wenn man noch die Summenformel für die vierten und fünften Potenzen verwendet, nämlich

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} k^4 &= \frac{6n^5 - 15n^4 + 10n^3 - n}{30}, \\
\sum_{k=1}^{n-1} k^5 &= \frac{2n^6 - 6n^5 + 5n^4 - n^2}{12},
\end{aligned}
$$

so erhält man

$$
\begin{aligned}
(*) &= \frac{m}{6} F_m \cdot \left(m \cdot \frac{6m^5 - 15m^4 + 10m^3 - m}{30} - \frac{2m^6 - 6m^5 + 5m^4 - m^2}{12} \right) \\
&= \frac{m}{6} F_m \cdot \frac{12m^6 - 30m^5 + 20m^4 - 2m^2 - 10m^6 + 30m^5 - 25m^4 + 5m^2}{60} \\
&= \frac{m}{6} F_m \frac{2m^6 - 5m^4 + 3m^2}{60}.
\end{aligned}
$$

Einsetzen in (11) liefert

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n \right)^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^4}{12} \frac{k^3 - k}{6} F_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k^7 - 5k^5 + 3k^3}{360} F_k \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{5k^7 - 5k^5 - 3k^3 + 5k^5 - 2k^7}{360} F_k \qquad (12) \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^7 - k^3}{120}.
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe von (6) kann man (12) umformen in

$$
\begin{aligned}
\sum_{m=1}^{\infty} 120 \sum_{r+s=m} \sigma_3(r)\sigma_3(s) x^m &= 120 \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^3 F_n \right)^2 \overset{(7)}{=} \sum_{k=1}^{\infty} k^7 - k^3 \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_7(m) x^m - \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) x^m.
\end{aligned}
$$

Damit ist die Hurwitz-Identität gezeigt.

§4 Die Diskriminante

Wie in [K]3.3(2) beziehungsweise 3.4(7) führt man

$$g_2(\tau) := 60G_4(\tau), \quad g_3(\tau) := 140G_6(\tau) \quad \text{und} \quad \Delta(\tau) := g_2^3(\tau) - 27g_3^2(\tau) \tag{13}$$

ein. Mit den Resultaten aus (2.3) erhalten wir

$$g_2(\tau) = \frac{(2\pi)^4}{12}\left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right), \tag{14}$$

$$g_3(\tau) = \frac{(2\pi)^6}{216}\left(1 - 504 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}\right). \tag{15}$$

(4.1) Satz
Die Diskriminante $\Delta(\tau)$ besitzt eine FOURIER-Entwicklung der Form

$$\Delta(\tau) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m\tau} \quad \text{für alle} \quad \tau \in \mathbb{H}, \tag{16}$$

mit Koeffizienten $\tau(m) \in \mathbb{Z}$ und $\tau(1) = 1$. Die Diskriminante $\Delta : \mathbb{H} \to \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion mit $\Delta(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12}\Delta(\tau) \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}). \tag{17}$$

Die Bezeichnung der Koeffizienten in (16) mit $\tau(m)$ ist eine Tradition, die beiden τ's sollten hier kein Anlass zur Konfusion sein. ◇

Beweis
Mit den Abkürzungen

$$A := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}, \quad B := \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_5(m) \cdot e^{2\pi i m\tau}$$

hat man nach (14) und (15)

$$\begin{aligned}
\Delta(\tau) &= \left(\frac{(2\pi)^4}{12}(1 + 240 \cdot A)\right)^3 - 27\left(\frac{(2\pi)^6}{216}(1 - 504 \cdot B)\right)^2 \\
&= \frac{(2\pi)^{12}}{1728}\left((1 + 240A)^3 - (1 - 504B)^2\right) \\
&= \frac{(2\pi)^{12}}{1728}(1^3 - 1^2 + 3 \cdot 240\sigma_3(1) \cdot e^{2\pi i\tau} + 2 \cdot 504\sigma_5(1) \cdot e^{2\pi i\tau} + \cdots) \\
&= \frac{(2\pi)^{12}}{1728}[(720 + 1008) \cdot e^{2\pi i\tau} + \cdots],
\end{aligned}$$

und rechts steht eine Potenzreihe in $q = e^{2\pi i\tau}$. Zum Nachweis, dass hier die Koeffizienten in $\mathbb{Z}$ liegen, hat man zunächst $d^3 \equiv_{12} d^5$ für $d \in \mathbb{Z}$, was man durch Nachrechnen im Restklassenring ${}^{\mathbb{Z}}/_{12\mathbb{Z}}$ bestätigt. Wegen

$$\sigma_k(m) := \sum_{d\in\mathbb{N}, d|m} d^k$$

folgt daraus $\sigma_3(m) \equiv_{12} \sigma_5(m)$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Bezieht man die Kongruenz also auf die Koeffizienten, so gilt $A \equiv_{12} B$. Jetzt rechnet man modulo $1728 = 12^3$ und bekommt

$$\begin{aligned}
& (1+240A)^3 - (1-504B)^2 \\
\equiv_{12^3}\; & 1 + 3\cdot 240A + 3\cdot(240A)^2 + (240A)^3 - 1 + 2\cdot 504B - (504B)^2 \\
\equiv_{12^3}\; & 12^2\cdot 5A + 12^2\cdot 7B + 12^3\cdot 100A^2 + 12^3\cdot 8000A^3 - 12^3\cdot 147B^2 \\
\equiv_{12^3}\; & 12^2 \underbrace{(5A+7B)}_{(5\cdot 12q+5\cdot r)+(7\cdot 12q'+7\cdot r)} \\
\equiv_{12^3}\; & 0.
\end{aligned}$$

Der Nenner kürzt sich also in allen Koeffizienten heraus. Mit g_2 und g_3 (vergleiche Satz (2.3)) ist auch Δ holomorph. Man erhält $\Delta(\tau) \neq 0$ aus [K]3.4 Korollar C. Die Beziehung (17) folgt direkt aus (4) und (13). □

In folgender Tabelle sind einige Werte der $\tau(m)$ aufgelistet.

m	$\tau(m)$	Primfaktorzerlegung								
1	1		1							
2	-24	$-$	2^3	3						
3	252		2^2	3^2		7				
4	-1472	$-$	2^6						23	
5	4830		2	3	5	7			23	
6	-6048	$-$	2^5	3^3		7				
7	-16744	$-$	2^3			7		13	23	
8	84480		2^9	3	5		11			
9	-113643	$-$		3^4					23	61
10	-115920	$-$	2^4	3^2	5	7			23	