
Das Fagnano-Integral

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 29.10.2007

Kai Sosnizka

— *Einleitung* —

Zu Beginn dieser Ausarbeitung wird zunächst kurz erläutert, wie das FAGNANO-Integral definiert ist und was es für Eigenschaften hat. Im zweiten Abschnitt wird dann anhand des Beispiels einer Lemniskate gezeigt, wofür man das Integral und seine Eigenschaften gebrauchen kann. Danach werden wir uns mit dem Ziel dieses Vortrags – der expliziten Berechnung des FAGNANO-Integrals – beschäftigen, wofür wir zunächst noch einen Satz benötigen, den wir im dritten Paragraphen herleiten werden. Mit dessen Hilfe erhalten wir schließlich im letzten Abschnitt einen Wert für das FAGNANO-Integral.

§1 Elliptische Integrale und Fagnanos Beispiel

— *Elliptische Integrale* —

Im ausgehenden 18. und beginnenden 19. Jahrhundert wurde immer wieder das Problem der Berechnung eines Integrals der Form

$$F(x) := \int_a^x \frac{dt}{\sqrt{p(t)}} \quad (1)$$

behandelt, wobei $p(t)$ ein reelles Polynom 3. oder 4. Grades in t ist, das im gegebenen Intervall nur positive Werte annimmt. Dieses Problem konnte aber nicht ohne Weiteres mit den zu dieser Zeit gängigen Funktionen (rationale, trigonometrische, hyperbolische Funktionen, Gammafunktion, Exponentialfunktion) gelöst werden. Da diese Art von Integralen vermehrt bei der Bestimmung von Ellipsen und ähnlichen Formen auftreten, bezeichnet man sie missverständlicherweise als *elliptische Integrale*.

Nimmt man hierbei an, dass F (lokal) eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion G besitzt, so ist das Problem äquivalent zur Lösung der Differentialgleichung

$$G'^2 = F'(G)^{-2} = p(G). \quad (2)$$

Vergleiche dazu KOECHER, KRIEG [1], S. 2.

— FAGNANOS Beispiel —

Mit einem speziellen Fall eines solchen Integrals beschäftigte sich GIOVANNI FRANCESCO FAGNANO bereits um 1750. Sei dazu $a = 0$ und $p(t) = 1 - t^4$ in (1), also

$$F(x) := \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}, \quad 0 \leq x \leq 1. \quad (3)$$

Dieses Integral wird auch als das FAGNANO-Integral bezeichnet.

Aufgrund von $1 - t^4 = (1-t)(1+t+t^2+t^3) \geq 1-t \geq 0$ für alle $0 \leq t \leq 1$, existiert das uneigentliche Integral $F(1) =: \sigma$. Die Funktion $F : [0, 1] \rightarrow [0, \sigma]$ ist streng monoton steigend und hat daher eine streng monoton wachsende Umkehrfunktion $G : [0, \sigma] \rightarrow [0, 1]$, welche wegen (2) folgende Eigenschaften hat:

$$G'^2 = 1 - G^4, \quad G(0) = 0, \quad G'(0) = 1. \quad (4)$$

Schon damals erkannte FAGNANO eine unerwartete Eigenschaft von F :

(1.1) Satz (Fagnano)

Für alle hinreichend kleinen $x \geq 0$ gilt

$$2F(x) = F\left(2x \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}\right). \quad \diamond$$

Beweis

Um diese Aussage zu zeigen, werden wir zwei Substitutionen vornehmen. Dabei ersetzen wir in (3) zunächst $t = \frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{1+s^4}}$. Damit erhält man also

$$dt = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{1+s^4} - 2s^4 \cdot (1+s^4)^{-\frac{1}{2}}}{1+s^4} ds = \frac{\sqrt{2}}{1+s^4} \cdot \frac{1+s^4 - 2s^4}{\sqrt{1+s^4}} ds = \frac{\sqrt{2}(1-s^4)}{(1+s^4)^{\frac{3}{2}}} ds.$$

Außerdem gilt:

$$1 - t^4 = 1 - \frac{4s^4}{(1+s^4)^2} = \frac{(1+s^4)^2 - 4s^4}{(1+s^4)^2} = \frac{(1-s^4)^2}{(1+s^4)^2},$$

womit man direkt folgende Gleichung erhält:

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \frac{1+s^4}{1-s^4} \cdot \frac{\sqrt{2}(1-s^4)}{(1+s^4)^{\frac{3}{2}}} ds = \sqrt{2} \cdot \frac{ds}{\sqrt{1+s^4}}.$$

An dieser Stelle liefert die erneute Substitution $s = \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{1-r^4}}$, analog zur Rechnung oben:

$$ds = \frac{d}{dr} \left(\frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{1-r^4}} \right) dr = \frac{\sqrt{2}(1+r^4)}{(1-r^4)^{\frac{3}{2}}} dr \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1+s^4}} = \frac{1-r^4}{1+r^4},$$

woraus sich erneut analog zur ersten Substitution folgendes ergibt:

$$\frac{ds}{\sqrt{1+s^4}} = \frac{1-r^4}{1+r^4} \cdot \frac{\sqrt{2}(1+r^4)}{(1-r^4)^{\frac{3}{2}}} dr = \sqrt{2} \cdot \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}.$$

Insgesamt erhält man also

$$t = \frac{\sqrt{2}s}{\sqrt{1+s^4}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}r}{\sqrt{1-r^4}}}{\sqrt{1 + \frac{4r^4}{(1-r^4)^2}}} = 2 \cdot \frac{1-r^4}{1+r^4} \cdot \frac{r}{\sqrt{1-r^4}} = 2r \cdot \frac{\sqrt{1-r^4}}{1+r^4}$$

und

$$\frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = 2 \cdot \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}}.$$

Daraus folgt schließlich die Behauptung:

$$2 \cdot F(x) = 2 \cdot \int_0^x \frac{dr}{\sqrt{1-r^4}} = \int_0^{2x \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = F \left(2x \cdot \frac{\sqrt{1-x^4}}{1+x^4} \right). \quad \square$$

Man schreibt dies auf die Umkehrfunktion G um und erhält das

(1.2) Korollar

Für alle hinreichend kleinen $u \geq 0$ gilt

$$G(2u) = \frac{2G(u) \cdot G'(u)}{1 + G^4(u)} \quad \diamond$$

§2 Die Lemniskate und ihre Bogenlänge

Bevor wir zur expliziten Berechnung des FAGNANO-Integrals kommen, werden wir in diesem Abschnitt ein Beispiel betrachten, bei welchem man das FAGNANO-Integral benötigt. Wir definieren dazu folgende geometrische Figur:

(2.1) Definition (Lemniskate)

Seien p, q zwei verschiedene Punkte in der euklidischen Ebene \mathbb{R}^2 . Als *Lemniskate* bezeichnet man die Menge der Punkte $z \in \mathbb{R}^2$, für welche

$$|z - p| \cdot |z - q| = \frac{1}{4}|p - q|^2 \quad (5)$$

gilt. ◇

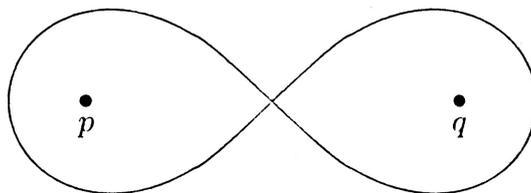


Abbildung 1: Lemniskate

Im Folgenden möchten wir nun für eine solche Lemniskate die Bogenlänge bestimmen. Zunächst stellen wir einmal fest, dass die Gleichung (5) für den Mittelpunkt $\frac{1}{2}(p + q)$ der Strecke zwischen p und q erfüllt ist und dieser somit auf der Kurve liegt. Wir können also die Darstellung vereinfachen und setzen bis auf eine Verschiebung in der Ebene voraus, dass der Mittelpunkt im Ursprung und die Punkte p und q auf der x -Achse liegen. Wir nehmen also an, dass

$$p = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

für ein $a > 0$ gilt.

Dies setzen wir nun in (5) ein und formen wie folgt um:

$$\begin{aligned}
 |z-p| \cdot |z-q| &= \frac{1}{4}|p-q|^2 \\
 \Leftrightarrow \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right| &= \frac{1}{4} \left| \begin{pmatrix} -a \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix} \right|^2 \\
 \Leftrightarrow \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \cdot \sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= \frac{1}{4} \sqrt{4a^2}^2 \\
 \Leftrightarrow ((x+a)^2 + y^2) \cdot ((x-a)^2 + y^2) &= a^4 \\
 \Leftrightarrow (x^2 + 2ax + a^2 + y^2) \cdot (x^2 - 2ax + a^2 + y^2) &= a^4 \\
 \Leftrightarrow x^4 - 2a^2x^2 + 2x^2y^2 + 2a^2y^2 + y^4 + a^4 &= a^4 \\
 \Leftrightarrow (x^2 + y^2)^2 &= 2a^2(x^2 - y^2).
 \end{aligned}$$

Um diese Darstellung weiter zu vereinfachen, bietet es sich an, den Abstand zwischen p und q zu normieren. Naheliegender ist es hierbei, $a = \sqrt{2}/2$ zu setzen, so dass $2a^2 = 1$ ist und man schließlich

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2 \quad (6)$$

erhält. Eine weitere Vereinfachung liefert an dieser Stelle die Polarkoordinatendarstellung. Setzt man in (6) $x = r \cos \phi$ und $y = r \sin \phi$ mit $r \geq 0$, $0 \leq \phi < 2\pi$ ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
 (x^2 + y^2)^2 &= (x^2 - y^2) \\
 \Leftrightarrow (r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi)^2 &= (r^2 \cos^2 \phi - r^2 \sin^2 \phi) \\
 \Leftrightarrow r^4 (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi)^2 &= r^2 (\cos^2 \phi - \sin^2 \phi) \\
 \text{Additionstheoreme} \quad \Leftrightarrow & r^4 = r^2 \cos(2\phi).
 \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich folgende sehr handliche Charakterisierung für die Punkte unserer normierten Lemniskate:

$$r^2 = \cos(2\phi). \quad (7)$$

Man beachte hierbei allerdings, dass die Umformung zu $r = \sqrt{\cos 2\phi}$, welche wir im weiteren Verlauf noch benötigen werden, nur möglich ist, falls $-\frac{\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}$ oder $\frac{3\pi}{4} \leq \phi \leq \frac{5\pi}{4}$ gilt. Um diesem Problem aus dem Weg zu gehen, betrachten wir im Folgenden nur noch den Teil der Lemniskate, der im vierten Quadranten liegt. Wegen der Symmetrieeigenschaften der Lemniskate ist dies ohne weiteres möglich.

Bevor wir nun die gesuchte Bogenlänge bestimmen können, benötigen wir noch einen Hilfssatz:

(2.2) Hilfssatz

Seien $r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ und $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar; dann ist

$$\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2, u \mapsto \begin{pmatrix} r(u) \cos(\phi(u)) \\ r(u) \sin(\phi(u)) \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} x(u) \\ y(u) \end{pmatrix} \quad (8)$$

ein Weg gemäß Def(1.10), Kap. XI, [2] in Polarkoordinatendarstellung. Sei nun $s(t) := L(\gamma|_{[a,t]})$ für ein $t \in [a, b]$ die Bogenlänge der entsprechenden Kurve von a bis t , dann wird $s(t)$ gegeben durch die Differentialgleichung

$$s'^2 = x^2 + y^2 = r'^2 + r^2 \cdot \phi'^2. \quad (9)$$

◇

Beweis

Zunächst liefert uns Satz(1.11), Kap. XI des Analysis-Skripts [2]

$$s(t) = \int_a^t \|\gamma'(u)\|_2 du = \int_a^t \left\| \begin{pmatrix} x'(u) \\ y'(u) \end{pmatrix} \right\|_2 du.$$

Mit dem ersten Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung erhält man nun für die Ableitung

$$s'(t) = \left\| \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}.$$

Quadrieren und Einsetzen der Polarkoordinaten liefert uns an dieser Stelle

$$\begin{aligned} s'(t)^2 &= (r'(t) \cos \phi(t) - r(t) \phi'(t) \sin \phi(t))^2 + (r'(t) \sin \phi(t) + r(t) \phi'(t) \cos \phi(t))^2 \\ &= r'^2(t) \cos^2 \phi(t) - 2r(t)r'(t)\phi'(t) \cos \phi(t) \sin \phi(t) + r^2(t)\phi'^2(t) \sin^2 \phi(t) \\ &\quad + r'^2(t) \sin^2 \phi(t) + 2r(t)r'(t)\phi'(t) \cos \phi(t) \sin \phi(t) + r^2(t)\phi'^2(t) \cos^2 \phi(t) \\ &= r'^2(t) \underbrace{(\cos^2 \phi(t) + \sin^2 \phi(t))}_{=1} + r^2(t)\phi'^2(t) \underbrace{(\cos^2 \phi(t) + \sin^2 \phi(t))}_{=1} \\ &= r'^2(t) + r^2(t)\phi'^2(t), \end{aligned}$$

womit der Satz bewiesen ist. □

Nun möchten wir im Speziellen natürlich die Bogenlänge der Lemniskate bestimmen und formulieren dafür zunächst den für uns relevanten Teil, der im vierten Quadranten liegt, als Kurve in Polarkoordinatendarstellung. Der Formulierung aus Hilfssatz (2.2) entsprechend erhält man

$$\gamma : \left[\frac{-\pi}{4}, 0 \right] \rightarrow \mathbb{R}^2, u \mapsto \begin{pmatrix} \sqrt{\cos 2u} \cos u \\ \sqrt{\cos 2u} \sin u \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Vergleicht man dies mit (8), so erkennt man, dass für die Lemniskate $r(u) = \sqrt{\cos 2u}$ und $\phi(u) = u$ gilt. Mit der folgenden Proposition wollen wir schließlich die Bogenlänge bestimmen.

(2.3) Proposition

Die Bogenlänge der Lemniskate wird gegeben durch

$$s'^2 = \frac{r'^2}{1 - r^4}. \quad (11)$$

◇

Beweis

Man fasse wie in (2.2) s , ϕ und r als Funktionen in t auf. Dabei setzen wir wegen (10) t aus $(\frac{-\pi}{4}, 0)$ voraus. Leitet man nun beide Seiten von (7) ab, so liefert dies

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(r^2(t)) &= \frac{d}{dt}(\cos(2\phi(t))) \\ \Leftrightarrow 2r(t)r'(t) &= -2\phi'(t) \sin(2\phi(t)) \\ \Leftrightarrow r(t)r'(t) &= -\phi'(t) \sin(2\phi(t)) \\ \Rightarrow r^2(t)r'^2(t) &= \phi'^2(t) \sin^2(2\phi(t)) = \phi'^2(t)(1 - \cos^2(2\phi(t))) \stackrel{(7)}{=} \phi'^2(t)(1 - r^4(t)) \\ \stackrel{t \neq 0}{\Leftrightarrow} \phi'^2(t) &= \frac{r^2(t)r'^2(t)}{(1 - r^4(t))}. \end{aligned}$$

Setzt man dieses Ergebnis nun in (9) ein, so erhält man das gewünschte Resultat:

$$s'^2 = r'^2 + r^2 \cdot \phi'^2 = r'^2 + r^2 \cdot \frac{r^2 \cdot r'^2}{(1 - r^4)} = r'^2 \left(1 + \frac{r^4}{1 - r^4} \right) = \frac{r'^2}{1 - r^4}. \quad \square$$

Schließlich kann man hiermit die gesuchte Bogenlänge berechnen. Dazu nimmt man sich zunächst wieder den ersten Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung zu Hilfe und erhält

$$s(t) = \int_{\frac{-\pi}{4}}^t s'(u) du. \quad (12)$$

Offensichtlich folgt aus (11) $s' = \pm \frac{r'}{\sqrt{1-r^4}}$. Betrachtet man nun die Ableitung

$$r'(t) = \frac{-\sin(2t)}{\sqrt{\cos(2t)'}}$$

so erkennt man, dass diese auf dem Intervall $(-\frac{\pi}{4}, 0)$ größer als Null ist. Da die Bogenlänge natürlich positiv sein muss, gilt folglich $s' = \frac{r'}{\sqrt{1-r^4}}$. Setzt man dies in (12) ein, so liefert uns das

$$s(t) = \int_{-\frac{\pi}{4}}^t \frac{r'(u)}{\sqrt{1-r^4(u)}} du \stackrel{\text{Subst.}}{=} \int_{r(-\frac{\pi}{4})}^{r(t)} \frac{1}{\sqrt{1-v^4}} dv \stackrel{\sqrt{\cos(-\frac{\pi}{2})}=0}{=} \int_0^{r(t)} \frac{1}{\sqrt{1-v^4}} dv.$$

Da nun aber r auf $[-\frac{\pi}{4}, 0]$ streng monoton steigend ist mit $r([-\frac{\pi}{4}, 0]) = [0, 1]$ kann man anstelle des Parameters t einen Parameter $R \in [0, 1]$ betrachten und erhält somit

$$F(R) = \int_0^R \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}. \quad (13)$$

Dies gibt die Bogenlänge der Kurve $\gamma|_{[-\frac{\pi}{4}, t]}$ mit $r(t) = R$ und γ aus (10) an. Sie entspricht dem FAGNANO-Integral.

Die Bogenlänge der gesamten Lemniskate ergibt sich folglich zu

$$4 \cdot L(\gamma) = 4 \cdot F(1) = 4 \cdot \int_0^1 \frac{dv}{\sqrt{1-v^4}}. \quad (14)$$

Darüber hinaus liefert uns der Satz von FAGNANO (1.1) eine interessante Eigenschaft des Lemniskatenbogens. Er besagt, dass das Doppelte der Länge des Bogens zwischen dem Ursprung und dem Punkt P mit der Länge des Bogens zwischen dem Ursprung und dem Punkt Q übereinstimmt, wenn die zugehörigen Parameter r_P und r_Q die Beziehung

$$r_Q = 2r_P \cdot \frac{\sqrt{1-r_P^4}}{1+r_P^4}$$

erfüllen. Da die Quadrate von r_P und r_Q jeweils durch rationale Operationen zusammen mit dem Ziehen von Quadratwurzeln auseinander hervorgehen liefert uns die *Ausführbarkeit geometrischer Konstruktionen* aus der Algebra schließlich den

(2.4) Satz

Die Verdopplung des Lemniskatenbogens ist durch Konstruktion mit Zirkel und Lineal möglich. \diamond

§3 Die absolute Invariante

Bevor wir uns mit der eigentlichen Berechnung des FAGNANO-Integrals beschäftigen, wollen wir in diesem Abschnitt einen Satz herleiten, der für diese Berechnung von großer Bedeutung ist. Dabei werden wir zu Beginn dieses Abschnitts noch einige wichtige Begriffe und Sätze wiederholen.

Da wir im Folgenden lediglich \mathbb{R}^2 bzw. \mathbb{C} betrachten, legen wir fest, dass mit Ω von nun an immer ein Gitter der Form

$$\Omega = \omega_1\mathbb{Z} + \omega_2\mathbb{Z} \quad \text{für } \omega_1, \omega_2 \in \mathbb{C} \quad (15)$$

bezeichnet wird. In Abhängigkeit von diesem Gitter definieren wir uns nun folgende Begriffe.

(3.1) Definition

Nach KOECHER, KRIEG [1], Kap.1, 1.9 sind die sogenannten EISENSTEIN-Reihen

$$G_k := G_k(\Omega) := \sum_{0 \neq \omega \in \Omega} \omega^{-k} \quad \text{für } k \in \mathbb{Z}, k \geq 3 \quad (16)$$

absolut konvergent und liefern uns direkt die WEIERSTRASS-Invarianten

$$g_2 := g_2(\Omega) := 60G_4(\Omega) \quad \text{und} \quad g_3 := g_3(\Omega) := 140G_6(\Omega), \quad (17)$$

sowie die Diskriminante

$$\Delta := \Delta(\Omega) := g_2^3 - 27g_3^2 \quad (18)$$

und die absolute Invariante des Gitters Ω

$$j := j(\Omega) := (12g_2)^3 / \Delta. \quad (19)$$

◇

Aus (16) und (17) folgt dabei direkt eine Eigenschaft der WEIERSTRASS-Invarianten, die wir später noch häufig benötigen werden. Es gilt

$$g_2(\lambda\Omega) = \lambda^{-4} \cdot g_2(\Omega) \quad \text{und} \quad g_3(\lambda\Omega) = \lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega). \quad (20)$$

Eine wichtige Aussage über die absolute Invariante liefert

(3.2) Satz

Für Gitter Ω und Ω' in \mathbb{C} sind äquivalent:

i) Es gibt ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $\Omega' = \lambda\Omega$.

ii) $j(\Omega') = j(\Omega)$. ◇

Beweis

Dies ist Satz 4.1, Kap.1 aus KOECHER, KRIEG [1]. □

In KOECHER, KRIEG [1], Kap.1, 4.1 wurde außerdem festgestellt, dass man bei elliptischen Funktionen, ohne wesentliche Einschränkung von einem Gitter der Form $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ mit $\tau \in \mathbb{H}$ ausgehen kann. Daher betrachten wir im Folgenden die Funktionen G_k, g_k, j und Δ ebenfalls lediglich in Abhängigkeit von τ aus der oberen Halbebene \mathbb{H} .

Nun wollen wir eine Reihendarstellung für $j(\tau)$ herleiten und benötigen dafür die

(3.3) Proposition

Sind f und g für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihen der Form

$$f(q) = \sum_{n \geq 0} a_n q^n, \quad g(q) = \sum_{n \geq 0} b_n q^n, \quad a_n, b_n \in \mathbb{C}$$

mit $b_0 = 1$ und $g(q) \neq 0$ für $|q| < 1$, so ist auch f/g eine für $|q| < 1$ konvergente Potenzreihe. Sind speziell die Koeffizienten a_n, b_n ganze Zahlen, so sind auch die Koeffizienten von f/g aus \mathbb{Z} . ◇

Beweis

Für $|q| < 1$ ist wegen $g(q) \neq 0$ mit f und g auch f/g holomorph und lässt sich folglich mit Satz (3.1), Kap. XVIII, [2] in eine Potenzreihe entwickeln, deren Koeffizienten wir mit c_n bezeichnen. Es gilt also

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} c_n q^n &= \left(\sum_{n \geq 0} a_n q^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n q^n \right)^{-1} \\ \Leftrightarrow \sum_{n \geq 0} a_n q^n &= \left(\sum_{n \geq 0} c_n q^n \right) \cdot \left(\sum_{n \geq 0} b_n q^n \right). \end{aligned}$$

Wegen $b_0 = 1$ gilt offensichtlich $c_0 = a_0$ und mit Hilfe des Cauchy-Produkts für

Reihen erhalten wir für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n q^n &= \sum_{j=0}^n c_j q^j \cdot b_{n-j} q^{n-j} \Leftrightarrow a_n q^n = q^n \sum_{j=0}^n c_j \cdot b_{n-j} \\ \Leftrightarrow a_n &= \sum_{j=0}^n c_j \cdot b_{n-j} \quad \stackrel{b_0=1}{\Leftrightarrow} \quad a_n = c_n + \sum_{j=0}^{n-1} c_j \cdot b_{n-j} \\ \Leftrightarrow c_n &= a_n - \sum_{j=0}^{n-1} c_j \cdot b_{n-j}, \end{aligned}$$

womit man eine Rekursionsformel für die Koeffizienten c_n gefunden hat. An dieser erkennt man nun leicht, dass die c_n ganze Zahlen sind, falls alle a_n, b_n in \mathbb{Z} liegen. \square

Bevor wir nun Proposition (3.3) anwenden können um eine Reihendarstellung für j zu erhalten, rufen wir uns zunächst noch einmal die Reihendarstellungen von Δ und G_4 in Erinnerung.

(3.4) Satz

a) Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$\begin{aligned} G_4(\tau) &:= G_4(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}) = \frac{\pi^4}{45} \left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m \tau} \right) \quad \text{mit} \\ \sigma_3(m) &:= \sum_{d \in \mathbb{N}, d|m} d^3. \end{aligned}$$

$G_4 : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph auf \mathbb{H} und erfüllt

$$G_4\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^4 \cdot G_4(\tau) \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{Z}).$$

b) Für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gilt

$$\Delta(\tau) := \Delta(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}) = (2\pi)^{12} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}$$

mit Koeffizienten $\tau(m) \in \mathbb{Z}$ und $\tau(1) = 1$. Die Diskriminante $\Delta : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist eine holomorphe Funktion mit $\Delta(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ und es gilt

$$\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = (c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau) \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{Z}). \quad \diamond$$

Beweis

Den Beweis entnimmt man KOECHER, KRIEG [1], Kap. 1, 4.2 und 4.3. \square

Mit Hilfe dessen können wir nun die gewünschte Reihendarstellung von j herleiten.

(3.5) Satz

Die absolute Invariante $j : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ ist holomorph und besitzt eine FOURIER-Entwicklung der Form:

$$j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m \geq 0} j_m \cdot e^{2\pi i m \tau} \quad \text{mit } j_m \in \mathbb{Z}, \quad m \geq 0. \quad (21)$$

Außerdem gilt

$$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau) \quad \text{für alle } \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{Z}). \quad \diamond$$

Beweis

Nach Satz (3.4)b) gilt $\Delta(\tau) \neq 0$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$, das heißt mit der Holomorphie von G_4 und Δ folgt auch die Holomorphie von j .

Um nun die Reihendarstellung von j zu erhalten betrachten wir

$$\begin{aligned} j(\tau) &= \frac{(12g_2(\tau))^3}{\Delta(\tau)} = (12 \cdot 60)^3 \cdot \frac{G_4(\tau)^3}{\Delta(\tau)} \\ &= \underbrace{(12 \cdot 60)^3 \cdot \frac{\pi^{12}}{45^3} \cdot \frac{1}{(2\pi)^{12}}}_{=1} \cdot \frac{(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m \tau})^3}{\sum_{m=1}^{\infty} \tau(m) \cdot e^{2\pi i m \tau}}. \end{aligned}$$

Setzt man nun $q := e^{2\pi i\tau}$ und formt den Nenner und den Zähler jeweils in Reihen um, deren Index bei 0 beginnt, so erhält man

$$j(\tau) = \frac{(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot e^{2\pi i m \tau})^3}{e^{2\pi i\tau} \sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot e^{2\pi i m \tau}} \stackrel{q:=e^{2\pi i\tau}}{=} \frac{\overbrace{\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_m \cdot q^m\right)^3}^{:=f(q)}}{e^{2\pi i\tau} \underbrace{\sum_{m=0}^{\infty} b_m \cdot q^m}_{:=g(q)}} \quad \text{mit}$$

$$a_m := \begin{cases} 240 \cdot \sigma_3(m), & m \geq 1 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad b_m := \tau(m+1), \quad m \geq 0.$$

Somit sind insbesondere die a_m und b_m ganze Zahlen. Nun möchten wir auf $f(q)$ und $g(q)$ Proposition (3.3) anwenden. Dazu stellen wir zunächst einmal fest, dass $f(q)$ als Produkt von Potenzreihen ebenfalls eine Darstellung als Potenzreihe besitzt. Wendet man daher zweimal das Cauchy-Produkt für Reihen an, so erhält man

$$f(q) = \sum_{m=0}^{\infty} a'_m \cdot q^m \quad \text{mit} \quad a'_m := \sum_{i=0}^m a_i \cdot \sum_{j=0}^{m-i} a_j \cdot a_{m-i-j}, \quad m \geq 0.$$

Insbesondere gilt also $a'_0 = a_0 = 1$ und $a'_m \in \mathbb{Z}$ für alle $m \geq 0$. Weiterhin wissen wir, dass $f(e^{2\pi i\tau})$ und $g(e^{2\pi i\tau})$ für $\tau \in \mathbb{H}$ konvergieren und stellen fest, dass

$$\begin{aligned} |q| < 1 &\Leftrightarrow |e^{2\pi i\tau}| < 1 && \stackrel{\tau := a+bi}{\Leftrightarrow} \underbrace{|e^{2\pi ia}|}_{=1} |e^{-2\pi b}| < 1 \Leftrightarrow e^{-2\pi b} < 1 \\ &&& \Leftrightarrow b = \text{Im}(\tau) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \tau \in \mathbb{H} \end{aligned}$$

gilt, $f(q)$ und $g(q)$ also für $|q| < 1$ konvergent sind. Darüber hinaus gilt nach Satz (3.4)b): $b_0 = \tau(1) = 1$, und mit $\Delta(\tau)$ ist auch $g(q) \neq 0$. Oben haben wir bereits $a'_m, b_m \in \mathbb{Z}$ festgestellt, womit wir nun Proposition (3.3) anwenden können und

$$j(\tau) = e^{-2\pi i\tau} \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cdot e^{2\pi im\tau}$$

erhalten. Im Beweis von (3.3) haben wir festgestellt, dass $c_0 = a'_0 = 1$ gilt, womit wir wie folgt vereinfachen können:

$$\begin{aligned} j(\tau) &= \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cdot e^{2\pi i(m-1)\tau} = c_0 \cdot e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m=1}^{\infty} c_m \cdot e^{2\pi i(m-1)\tau} \\ &= e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m=0}^{\infty} c_{m+1} \cdot e^{2\pi im\tau}. \end{aligned}$$

Mit $j_m := c_{m+1}$ und $c_m \in \mathbb{Z}$ folgt also (21).

Weiterhin gilt für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$ mit (3.4)

$$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) \stackrel{(17),(19)}{=} \frac{(12 \cdot 60)^3 \cdot G_4\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)^3}{\Delta\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right)} = \frac{(12 \cdot 60)^3 (c\tau + d)^{12} G_4(\tau)^3}{(c\tau + d)^{12} \cdot \Delta(\tau)} = j(\tau),$$

womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist. \square

Nun können wir uns schließlich mit dem zentralen Satz dieses Paragraphen befassen.

(3.6) Satz

Zu jedem $c \in \mathbb{C}$ gibt es ein $\tau \in \mathbb{H}$ mit $j(\tau) = c$. \diamond

Beweis

Diesen Satz werden wir indirekt beweisen, sei dafür $c \in \mathbb{C}$ beliebig und man nehme an, dass $j(\tau) \neq c$ für alle $\tau \in \mathbb{H}$ gelte. Aufgrund der Annahme ist dann offensichtlich die Funktion

$$F : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}, \tau \mapsto \frac{j'(\tau)}{j(\tau) - c}$$

holomorph. Um eine Reihendarstellung von F zu erhalten berechnen wir zunächst

$$\begin{aligned} j'(\tau) &= \frac{d}{d\tau} \left(e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m \geq 0} j_m \cdot e^{2\pi i m \tau} \right) = -2\pi i \cdot e^{-2\pi i\tau} + \sum_{m \geq 1} j_m \cdot 2\pi i m \cdot e^{2\pi i m \tau} \\ &= \sum_{m \geq -1} q_{m+1} \cdot e^{2\pi i m \tau} = \sum_{m \geq 0} q_m \cdot e^{2\pi i(m-1)\tau} \quad \text{mit} \quad q_m := \begin{cases} j_m \cdot 2\pi i m, & m \geq 2 \\ 0, & m = 1 \\ -2\pi i, & m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

In ähnlicher Form kann man auch $j(\tau) - c$ als Reihe schreiben:

$$\begin{aligned} j(\tau) - c &= e^{-2\pi i\tau} - c + \sum_{m \geq 0} j_m \cdot e^{2\pi i m \tau} = \sum_{m \geq -1} p_{m+1} \cdot e^{2\pi i m \tau} \\ &= \sum_{m \geq 0} p_m \cdot e^{2\pi i(m-1)\tau} \quad \text{mit} \quad p_m := \begin{cases} j_{m-1}, & m \geq 2 \\ j_0 - c, & m = 1 \\ 1, & m = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Zusammen erhält man nun also

$$\begin{aligned} F(\tau) &= \frac{j'(\tau)}{j(\tau) - c} = \frac{\sum_{m \geq 0} q_m \cdot e^{2\pi i(m-1)\tau}}{\sum_{m \geq 0} p_m \cdot e^{2\pi i(m-1)\tau}} \\ &= \frac{e^{2\pi i\tau} \cdot \sum_{m \geq 0} q_m \cdot e^{2\pi i(m-1)\tau}}{e^{2\pi i\tau} \cdot \sum_{m \geq 0} p_m \cdot e^{2\pi i(m-1)\tau}} = \frac{\sum_{m \geq 0} q_m \cdot e^{2\pi i m \tau}}{\sum_{m \geq 0} p_m \cdot e^{2\pi i m \tau}} \end{aligned}$$

Nun kann man also analog zum Beweis von Satz (3.5) die Proposition (3.3) anwenden, was uns folgende Reihendarstellung für F liefert:

$$F(\tau) = \sum_{m \geq 0} a_m \cdot e^{2\pi i m \tau} \quad \text{mit} \quad a_m \in \mathbb{C} \quad \text{und} \quad a_0 = q_0 = -2\pi i.$$

Weiterhin wissen wir nach (3.5), wegen $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \text{SL}(2; \mathbb{Z})$, dass $j(\tau) = j(\tau + 1)$ sowie $j(-\tau^{-1}) = j(\tau)$ gilt. Durch die Periodizität von j ist auch $j'(\tau) = j'(\tau + 1)$

gegeben. Um nun ähnliche Eigenschaften für F herleiten zu können, brauchen wir noch

$$j'(\tau) = \frac{d}{d\tau}(j(\tau)) = \frac{d}{d\tau}(j(-\tau^{-1})) = \tau^{-2} \cdot j'(-\tau^{-1}).$$

Damit erhält man nun also:

$$F(\tau + 1) = F(\tau) \quad \text{und} \quad F(-\tau^{-1}) = \frac{j'(-\tau^{-1})}{j(-\tau^{-1}) - c} = \frac{\tau^2 \cdot j'(\tau)}{j(\tau) - c} = \tau^2 \cdot F(\tau). \quad (22)$$

Um unsere Annahme zum Widerspruch zu führen, werden wir im Folgenden das Integral von F über den in Abbildung 2 angegebenen Weg berechnen. Dafür definieren wir uns die Kurven

$$\gamma_1 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}, \quad t \mapsto \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i + t \left(2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \cdot i,$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}, \quad t \mapsto \frac{1}{2} + 2 \cdot i - t,$$

$$\gamma_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}, \quad t \mapsto \frac{-1}{2} + 2 \cdot i + t \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \right) \cdot i,$$

$$\gamma_4 : \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{H}, \quad t \mapsto e^{-it},$$

$$\gamma_5 : \left[\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbb{H}, \quad t \mapsto e^{-it}.$$

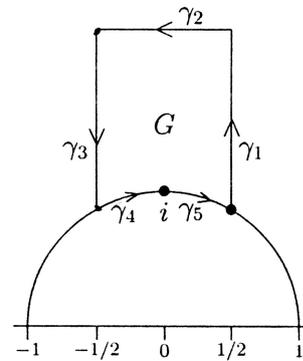


Abbildung 2: Integrationsweg

Dabei stellen wir zunächst einmal fest, dass $\gamma_1^-(t) - 1 = \gamma_3(t)$ ist und erhalten damit

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} F(\tau) d\tau &= - \int_{\gamma_1^-} F(\tau) d\tau = - \int_0^1 F(\gamma_1^-(t)) \cdot (\gamma_1^-)'(t) dt \\ &\stackrel{(22)}{=} - \int_0^1 F(\gamma_1^-(t) - 1) \cdot i \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \right) dt \\ &= - \int_0^1 F(\gamma_3(t)) \gamma_3'(t) dt = - \int_{\gamma_3} F(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Definiert man sich außerdem $\gamma_6 := \gamma_4 + \gamma_5$, so erhält man für den entgegengesetzten

Weg

$$\gamma_6^- : \left[\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3} \right] \rightarrow \mathbb{H}, t \mapsto e^{-i(\frac{5\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} - t)} = e^{-3\pi i} \cdot e^{it} = -e^{it}.$$

Mit Hilfe dessen berechnet man das Integral

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_6} F(\tau) d\tau &= \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} F(e^{-it})(-i)e^{-it} dt \stackrel{(22)}{=} \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} e^{2it} \cdot F(-e^{it})(-i)e^{-it} dt \\ &= \int_{\frac{4\pi}{3}}^{\frac{5\pi}{3}} F(-e^{it}) \cdot (-i) \cdot e^{it} dt = \int_{\gamma_6^-} F(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

welches folglich gleich Null ist. Schließlich betrachtet man nun noch das Kurvenintegral von F über den Weg γ_2 :

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_2} F(\tau) d\tau &= - \int_0^1 F\left(\frac{1}{2} + 2i - t\right) dt = - \int_0^1 \sum_{m \geq 0} a_m e^{2\pi i m (\frac{1}{2} + 2i - t)} dt \\ &\stackrel{\text{Reihe konv. glm.}}{=} \sum_{m \geq 0} a_m e^{2\pi i m (\frac{1}{2} + 2i)} \int_0^1 e^{-2\pi i m t} dt \\ &= - \left(a_0 \int_0^1 dt + \sum_{m \geq 1} a_m e^{2\pi i m (\frac{1}{2} + 2i)} \left[\frac{e^{-2\pi i m t}}{-2\pi i m} \right]_0^1 \right) \\ &= - \left(a_0 + \sum_{m \geq 1} a_m e^{2\pi i m (\frac{1}{2} + 2i)} \underbrace{\left[\frac{e^{-2\pi i m} - 1}{-2\pi i m} \right]}_{=0} \right) = -a_0 = 2\pi i. \end{aligned}$$

Insgesamt erhält man also mit $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4 + \gamma_5$:

$$\int_{\gamma} F(\tau) d\tau = \int_{\gamma_1} F(\tau) d\tau + \underbrace{\int_{\gamma_3} F(\tau) d\tau}_{=0} + \underbrace{\int_{\gamma_4} F(\tau) d\tau}_{=0} + \int_{\gamma_5} F(\tau) d\tau + \int_{\gamma_2} F(\tau) d\tau = 2\pi i.$$

Nun ist aber \mathbb{H} einfach zusammenhängend und γ ein Zyklus in \mathbb{H} , dann gilt wegen der Holomorphie von F mit dem Äquivalenzsatz für einfach zusammenhängende Gebiete aus der Analysis (vgl. KRIEG [2], S. 500) $\int_{\gamma} F(\tau) d\tau = 0$, womit wir unsere Annahme zum Widerspruch geführt haben und der Satz somit bewiesen ist. \square

Wir betrachten nun allgemeiner an Stelle eines Gitters $\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}$ wieder ein beliebiges Gitter $\Omega = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$. Es gilt dabei offensichtlich $\lambda(\mathbb{Z}\tau + \mathbb{Z}) = \Omega$ mit $\lambda = \omega_2 \neq 0$ und $\tau = \omega_1/\omega_2$. Satz (3.2) liefert dann:

$$j(\Omega) = j\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right), \quad \text{falls } \operatorname{Im}\left(\frac{\omega_1}{\omega_2}\right) > 0.$$

Die Bedeutung von Satz (3.6) für elliptische Funktionen liegt nun in dem

(3.7) Korollar

Sind $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ mit $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$, dann gibt es genau ein Gitter Ω in \mathbb{C} mit

$$c_2 = g_2(\Omega) \quad \text{und} \quad c_3 = g_3(\Omega). \quad (23)$$

◇

Beweis

Seien also $c_2, c_3 \in \mathbb{C}$ mit $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$ gegeben, dann existiert nach Satz(3.6) ein Gitter Ω mit

$$j(\Omega) = c := \frac{(12c_2)^3}{c_2^3 - 27c_3^2}.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass es genau ein Gitter mit (23) gibt.

Existenz: 1. Fall ($c_2 = 0$): Dann ist offensichtlich $j(\Omega) = 0$ und somit gilt mit der Definition von j auch $g_2(\Omega) = 0$ und damit $g_3(\Omega) \neq 0$. Wegen $c_2 = 0$ und $c_2^3 - 27c_3^2 \neq 0$ ist $c_3 \neq 0$ und es existiert somit ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $g_3(\Omega) = \lambda^6 c_3$. Für ein solches λ gilt mit (20)

$$g_3(\lambda\Omega) = \lambda^{-6} \cdot g_3(\Omega) = c_3 \quad \text{und} \quad g_2(\lambda\Omega) = \lambda^{-4} \cdot g_2(\Omega) = 0 = c_2.$$

Somit erfüllt das Gitter $\lambda\Omega$ die gesuchte Eigenschaft (23).

2. Fall ($c_2 \neq 0$): In diesem Fall ist $j(\Omega) \neq 0$, also $g_2(\Omega) \neq 0$. Wegen $c_2 \neq 0$ existiert also ein $0 \neq \lambda \in \mathbb{C}$ mit $g_2(\Omega) = \lambda^4 c_2$. Für ein solches λ gilt analog zum ersten Fall $g_2(\lambda\Omega) = c_2$, schließlich liefert uns Satz (3.2):

$$\begin{aligned} j(\lambda\Omega) &= j(\Omega) \\ \Leftrightarrow \frac{(12g_2(\lambda\Omega))^3}{g_2(\lambda\Omega)^3 - 27g_3(\lambda\Omega)^2} &= \frac{(12c_2)^3}{c_2^3 - 27c_3^2} \\ \stackrel{g_2(\lambda\Omega)=c_2}{\Leftrightarrow} \frac{(12c_2)^3}{c_2^3 - 27g_3(\lambda\Omega)^2} &= \frac{(12c_2)^3}{c_2^3 - 27c_3^2} \\ \Leftrightarrow c_3^2 &= g_3(\lambda\Omega)^2 \\ \Leftrightarrow c_3 = g_3(\lambda\Omega) \quad \text{oder} \quad c_3 &= -g_3(\lambda\Omega). \end{aligned}$$

Gilt hierbei $c_3 = g_3(\lambda\Omega)$, so ist $\lambda\Omega$ das gesuchte Gitter. Ist hingegen $c_3 = -g_3(\lambda\Omega)$, so erfüllt das Gitter $i\lambda\Omega$ die gewünschten Eigenschaften:

$$g_3(i\lambda\Omega) = i^{-6}g_3(\lambda\Omega) = -g_3(\lambda\Omega) = c_3 \quad \text{und} \quad g_2(i\lambda\Omega) = i^4g_2(\lambda\Omega) = g_2(\lambda\Omega) = c_2.$$

Es existiert also auch in diesem Fall ein Gitter mit (23).

Eindeutigkeit: Nach Korollar 3.3F aus Kap. 1, [1] ist ein Gitter Ω durch $g_2(\Omega)$ und $g_3(\Omega)$ eindeutig bestimmt. Daraus folgt in beiden Fällen die Eindeutigkeit. \square

§4 Berechnung des Fagnano-Integrals

In diesem Abschnitt wenden wir die Ergebnisse aus §3 an, um das in §1 beschriebene FAGNANO-Integral zu berechnen. Dazu definieren wir zunächst

(4.1) Definition (Gamma-Funktion)

Die *Gamma-Funktion* ist für $s \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ gegeben durch

$$\Gamma(s) := \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-t} dt. \quad (24) \quad \diamond$$

(4.2) Proposition

Es gilt:

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4x}} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt = \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}}. \quad (25) \quad \diamond$$

Beweis

Eine einfache Substitution liefert uns zunächst

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4x}} dx \stackrel{x = \frac{1}{t^2}, dx = \frac{-2dt}{t^3}}{=} \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\frac{1}{\sqrt{a}}}^{\frac{1}{\sqrt{a}}} \frac{-2}{t^3 \sqrt{\frac{4}{t^6} - \frac{4}{t^2}}} dt = \int_1^0 \frac{-2}{2\sqrt{\frac{t^6}{t^6} - \frac{t^6}{t^2}}} dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt,$$

womit die erste Gleichung von (25) gezeigt ist. Da das Integral der Gamma-Funktion für $s \in \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(z) > 0\}$ existiert, kann $\Gamma(1/4)^2$ wie folgt betrachtet werden:

$$\Gamma(1/4)^2 = \left(\int_0^{\infty} x^{-3/4} e^{-x} dx \right) \cdot \left(\int_0^{\infty} y^{-3/4} e^{-y} dy \right) = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (xy)^{-3/4} e^{-(x+y)} dx dy.$$

Um dies nun mit Hilfe der Transformationsformel weiter vereinfachen zu können, definieren wir zunächst den Diffeomorphismus

$$\psi : (0, \infty) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow (0, \infty)^2, \begin{pmatrix} r \\ \phi \end{pmatrix} \mapsto r^2 \begin{pmatrix} \cos^2 \phi \\ \sin^2 \phi \end{pmatrix} \quad \text{mit}$$

$$D_\psi = \begin{pmatrix} 2r \cos^2 \phi & 2r^2 \sin \phi \cos \phi \\ 2r \sin^2 \phi & -2r^2 \sin \phi \cos \phi \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \det(D_\psi) = -4r^3 \cos \phi \sin \phi.$$

Nun substituiert man $\psi(r, \phi) = (x, y)$ mit Hilfe der Transformationsformel

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty (xy)^{-3/4} e^{-(x+y)} dx dy &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} (r^4 \cos^2 \phi \sin^2 \phi)^{-3/4} e^{-r^2(\sin^2 \phi + \cos^2 \phi)} |\det(D_\psi)| d\phi dr \\ &= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} r^{-3} (\cos \phi \sin \phi)^{-3/2} e^{-r^2} 4r^3 \cos \phi \sin \phi d\phi dr \\ &= 4 \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos \phi \sin \phi}} d\phi. \end{aligned}$$

An dieser Stelle bedient man sich zweier Hilfsmittel aus der Analysis, zum einen gilt nach Beispiel (5.8), Kap. XIV, [2] $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. Zum anderen liefert das Additionstheorem vom Sinus $\cos x \cdot \sin x = \frac{\sin(2x)}{2}$. Damit erhält man nun

$$\begin{aligned} 4 \cdot \int_0^\infty e^{-r^2} dr \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\cos \phi \sin \phi}} d\phi &= 2\sqrt{2\pi} \cdot \int_0^{\pi/2} \frac{1}{\sqrt{\sin(2\phi)}} d\phi = 4\sqrt{2\pi} \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\sqrt{\sin(2\phi)}} d\phi \\ &= 4\sqrt{2\pi} \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2\phi)}{\sqrt{\sin(2\phi) \cos(2\phi)}} d\phi = 4\sqrt{2\pi} \cdot \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(2\phi)}{\sqrt{\sin(2\phi)(\sqrt{1 - \sin^2(2\phi)})}} d\phi. \end{aligned}$$

Hier führt man noch einmal eine Substitution durch, ersetzt $t = \sqrt{\sin(2\phi)}$ und somit $dt = \frac{\cos(2\phi)d\phi}{\sqrt{\sin(2\phi)}}$, was schließlich

$$\Gamma(1/4)^2 = 4\sqrt{2\pi} \cdot \int_{\sqrt{\sin(0)}}^{\sqrt{\sin(\pi/2)}} \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt = 4\sqrt{2\pi} \cdot \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt,$$

liefert. Daraus folgt direkt die zweite Gleichung von (25). □

Damit haben wir bereits das FAGNANO-Integral (3) an der Stelle $R = 1$ bestimmt.

Da wir später bei der allgemeinen Berechnung des FAGNANO-Integrals die WEIERSTRASSsche \wp -Funktion für das Gitter $\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ benötigen werden, berechnen wir nun zunächst die WEIERSTRASS-Invarianten dieses Gitters.

(4.3) Satz

Es gilt

$$g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \frac{\Gamma(1/4)^8}{16\pi^2} \quad \text{und} \quad g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = 0. \quad \diamond$$

Beweis

Wegen $\mathbb{Z}i + \mathbb{Z} = i(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})$ folgt mit (20):

$$g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = g_3(i(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})) = -g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) \quad \text{also} \quad g_3(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = 0.$$

Um nun $g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})$ bestimmen zu können, werden wir das Ergebnis aus Proposition (4.2) verwenden und die linke Seite von (25) mit Hilfe der WEIERSTRASSschen \wp -Funktion umformen. Dazu suchen wir an dieser Stelle ein Gitter Ω mit $g_2(\Omega) = 4$ und $g_3(\Omega) = 0$. Da offensichtlich $4^3 - 27 \cdot 0^2 \neq 0$ ist, liefert Korollar (3.7) die Existenz genau eines solchen Gitters. Darüber hinaus gilt mit der Reihendarstellung von G_4 aus Satz (3.4)

$$\begin{aligned} g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) &= 60 \cdot G_4(i) = 60 \cdot \frac{\pi^4}{45} \left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \sigma_3(m) \cdot e^{2\pi i m i} \right) \\ &= \underbrace{\frac{4 \cdot \pi^4}{3}}_{>0} \left(1 + 240 \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \underbrace{\sigma_3(m)}_{>0} \cdot \underbrace{e^{-2\pi m}}_{>0} \right) > 0. \end{aligned}$$

Damit ist $\lambda := \left(\frac{g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})}{4} \right)^{\frac{1}{4}}$ wohldefiniert und man erhält

$$g_2(\lambda(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})) \stackrel{(20)}{=} \lambda^{-4} \cdot g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \frac{4}{g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})} \cdot g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = 4.$$

Da offensichtlich auch $g_3(\lambda(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})) = 0$ gilt und ein Gitter durch g_2 und g_3 eindeutig bestimmt ist, können wir $\Omega = \lambda(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z})$ annehmen. Nun nehmen wir uns die WEIERSTRASSsche \wp -Funktion von Ω zu Hilfe, diese erfüllt nach KOECHER, KRIEG [1], Kap. 1, 3.1 die Differentialgleichung:

$$\wp_{\Omega}^{\prime 2} = 4\wp_{\Omega}^3 - g_2(\Omega)\wp_{\Omega} - g_3(\Omega) = 4\wp_{\Omega}^3 - 4\wp_{\Omega} \quad (26)$$

Mit den Bezeichnungen $\omega_1 = i\lambda$, $\omega_2 = \lambda$, $\omega_3 = \lambda + i\lambda$ und $e_k := \wp_\Omega(\omega_k/2)$ für $k = 1, 2, 3$ liefert uns nun Satz 3.6, Kap. 1 aus [1] $e_1 < e_3 < e_2$. Wegen $4x^3 - g_2(\Omega)x + g_3(\Omega) = 4x^3 - 4x = 4x(x-1)(x+1)$ folgt also mit Satz 3.4, Kap. 1 aus [1]

$$e_1 = \wp_\Omega\left(\frac{i\lambda}{2}\right) = -1, \quad e_3 = \wp_\Omega\left(\frac{\lambda + i\lambda}{2}\right) = 0 \quad \text{und} \quad e_2 = \wp_\Omega\left(\frac{\lambda}{2}\right) = 1. \quad (27)$$

Hier nehmen wir erneut Satz 3.6 aus [1] zu Hilfe, dieser liefert uns, dass die untere Seite des Rechtecks $0, \frac{\lambda i}{2}, \frac{\lambda i + \lambda}{2}, \frac{\lambda}{2}$ von \wp_Ω auf den Teil der x -Achse zwischen $e_2 = 1$ und ∞ abgebildet wird. Dabei ist \wp_Ω auf dem reellen Intervall $(0, \frac{\lambda}{2}]$ streng monoton fallend und somit die Ableitung \wp'_Ω dort kleiner als Null.

Schließlich erhalten wir mit der Substitution $x = \wp_\Omega(t)$ und $dx = \wp'_\Omega(t)dt$

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma(1/4)^2}{4\sqrt{2\pi}} &\stackrel{\text{Prop. (4.2)}}{=} \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4x}} dx \stackrel{\text{Subst.}}{=} \int_{\lambda/2}^0 \frac{\wp'_\Omega(t)}{\sqrt{4\wp_\Omega(t)^3 - 4\wp_\Omega(t)}} dt \\ &\stackrel{(26)}{=} \int_{\lambda/2}^0 \frac{\wp'_\Omega(t)}{\sqrt{\wp'_\Omega(t)^2}} dt \stackrel{\wp'_\Omega < 0}{=} \int_0^{\lambda/2} dt = \frac{\lambda}{2}. \end{aligned}$$

Daraus ergibt sich nun $\lambda = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2\pi}}$ und man erhält folglich:

$$g_2(\mathbb{Z}i + \mathbb{Z}) = \lambda^4 \cdot g_2(\Omega) = 4 \cdot \left(\frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2\pi}}\right)^4 = \frac{\Gamma(1/4)^8}{16\pi^2} \quad \square$$

Dieses Ergebnis werden wir nun anwenden um das FAGNANO-Integral zu berechnen.

(4.4) Korollar

Sei $\Omega = \mathbb{Z}i + \mathbb{Z}$ und $\wp := \wp_\Omega$ die zugehörige WEIERSTRASSSche \wp -Funktion. Ist $0 < R \leq 1$, so gilt für das FAGNANO-Integral

$$\int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2\pi}} \zeta, \quad (28)$$

wobei $\zeta \in (0, \frac{1}{2}]$ bestimmt ist durch $\wp_\Omega(\zeta) = \frac{\Gamma(1/4)^4}{8\pi R^2} = \frac{\lambda^2}{R^2}$ mit $\lambda = \frac{\Gamma(1/4)^2}{2\sqrt{2\pi}}$ wie im Beweis von Satz (4.3). \diamond

Beweis

In Satz (4.3) haben wir festgestellt, dass $g_2(\Omega) = 4\lambda^4$ und $g_3(\Omega) = 0$ gilt. Die Funktion \wp erfüllt also die Differentialgleichung $\wp'^2 = 4\wp^3 - 4\lambda^4\wp$. Wir gehen nun analog zum Beweis von Satz (4.3) vor und stellen zunächst fest, dass in diesem Fall $\omega_1 = i$, $\omega_2 = 1$ und $\omega_3 = 1 + i$ sind. Mit $4x^3 - 4\lambda^4x = 4x(x - \lambda^2)(x + \lambda^2)$ und Satz 3.4, Kap. 1 aus [1] folgt nun $e_1 = -\lambda^2$, $e_3 = 0$ und $e_2 = \lambda^2$. Satz 3.6, Kap. 1 aus [1] liefert uns also $\wp((0, \frac{1}{2}]) = [\lambda^2, \infty)$, wobei \wp auf diesem Intervall streng monoton fallend ist. Daraus folgt nun, dass wegen $0 < R \leq 1$ ein $\xi \in (0, \frac{1}{2}]$ mit $\wp(\xi) = \lambda^2/R^2$ existiert und $\wp' < 0$ auf $(0, \frac{1}{2}]$ gilt. Damit erhält man nun analog zum Beweis von Satz (4.3)

$$\int_{\xi}^0 \frac{\wp'(s)}{\sqrt{4\wp^3(s) - 4\lambda^4\wp(s)}} ds = \int_0^{\xi} ds = \xi. \quad (29)$$

Die linke Seite kann man wiederum analog zum vorigen Beweis mittels der Substitution $x = \wp(s)$, $dx = \wp'(s)ds$ wie folgt umschreiben

$$\int_{\xi}^0 \frac{\wp'(s)}{\sqrt{4\wp^3(s) - 4\lambda^4\wp(s)}} ds \stackrel{\text{Subst.}}{=} \lim_{a \rightarrow 0} \int_{\wp(\xi)}^{\wp(a)} \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4\lambda^4x}} dx = \int_{\frac{\lambda^2}{R^2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4\lambda^4x}} dx.$$

Definiert man sich nun die Funktion $\phi(t) := \lambda^2/t^2$ mit zugehöriger Umkehrfunktion $\phi^{-1}(t) = \sqrt{\lambda^2/t}$, so kann man das gerade erhaltene Integral mit der Substitution $x = \phi(t)$, $dx = \phi'(t)dt = -2\lambda^2 \cdot t^{-3}dt$ weiter umschreiben und erhält insgesamt:

$$\begin{aligned} \lambda\xi &\stackrel{(29)}{=} \lambda \cdot \int_{\xi}^0 \frac{\wp'(s)}{\sqrt{4\wp^3(s) - 4\lambda^4\wp(s)}} ds \stackrel{\text{Subst. } \wp(s)=x}{=} \lambda \cdot \int_{\frac{\lambda^2}{R^2}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{4x^3 - 4\lambda^4x}} dx \\ &\stackrel{\text{Subst. } x=\phi(t)}{=} \lambda \cdot \lim_{a \rightarrow \infty} \int_{\phi^{-1}(\frac{\lambda^2}{R^2})}^{\phi^{-1}(a)} \frac{-2\lambda^2}{t^3 \sqrt{4\frac{\lambda^6}{t^6} - 4\lambda^4\frac{\lambda^2}{t^2}}} dt = \lambda \cdot \int_R^0 \frac{-2\lambda^2}{2\lambda^3 \sqrt{\frac{t^6}{t^6} - \frac{t^6}{t^2}}} dt \\ &= \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1-t^4}} dt. \end{aligned}$$

□

Literatur

- [1] MAX KOECHER, ALOYS KRIEG: *Elliptische Funktionen und Modulformen*, 2. Auflage, Springer (2007)
- [2] ALOYS KRIEG: *Analysis I–IV*, Aachen (2005)