Dirichlet-Reihen I

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie 10. 12. 2007

Corinna Wübling

Dieser Vortrag beschäftigt sich mit Dirichlet-Reihen. Im ersten Abschnitt werden die Dirichlet-Reihen definiert und typische Beispiele genannt. Der zweite Teil dieses Vortrags wird sich dann mit der Konvergenz der Dirichlet-Reihen auseinandersetzen und ein Kriterium zur Berechnung der Konvergenzabszisse angeben.

§1 Motivation und Definition der Dirichlet-Reihen

Die Dirichlet-Reihen spielen in der analytischen Zahlentheorie eine entscheidende Rolle, so wie die Potenzreihen in der Funktionentheorie.

Bei der Theorie der Potenzreihen nimmt man die Potenzfunktionen $z \mapsto z^n$ (mit $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$) als zugrundeliegende Funktionen und das Ziel besteht dann darin, beliebige Funktionen als unendliche Linearkombinationen dieser speziellen Funktionen darzustellen. Man erhält die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad z,\, z_0,\, a_n \in \mathbb{C},\, n \in \mathbb{N}_0,$$

wobei z_0 Entwicklungspunkt der Potenzreihe genannt wird.

Bei den Dirichletschen Reihen nimmt man hingegen die Exponentialfunktionen $z \mapsto e^{-\lambda z}$ (mit $\lambda \in \mathbb{R}$) als Grundlage. Da $\mathbb{R}$ im Gegensatz zu $\mathbb{N}$ allerdings nicht abzählbar ist, beschränkt man sich auf die Folge $\{z \mapsto e^{-\lambda_n z}\}_{n \in \mathbb{N}}$, wobei λ_n reell ist und o. B. d. A. $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n \to \infty$ gilt.

Im Folgenden wird eine komplexe Zahl mit s bezeichnet und es gilt $s = \sigma + it$ mit $\sigma, t \in \mathbb{R}$.

(1.1) Definition (Dirichletsche Reihe)
Eine *Dirichletsche Reihe* ist eine Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s},$$

wobei λ_n reelle Zahlen mit $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n$ sind, die a_n beliebige komplexe Zahlen und $s = \sigma + it$ eine komplexe Zahl in der oben eingeführten Darstellung. $\diamond$

(1.2) Beispiel

a) Wählt man $\lambda_n = n$, dann erhält man die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}.$$

Wenn man hier nun die Substituation $e^{-s} = z$ durchführt, bekommt man eine Potenzreihe mit Entwicklungspunkt 0 und $a_0 = 0$, also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$.

b) Wählt man $\lambda_n = \log(n)$, dann erhält man die Dirichletsche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\log(n)s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (e^{\log(n)})^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$$

Dieser Fall ist für die analytische Zahlentheorie besonders wichtig. Eine Reihe dieser Gestalt heißt *gewöhnliche Dirichletsche Reihe*. $\diamond$

§2 Konvergenz der Dirichlet-Reihen

— *Motivation* —

Als nächstes beschäftigen wir uns nun mit der Frage, wann und wo eine Dirichletsche Reihe konvergiert.

Bei den Potenzreihen haben wir gesehen, dass es zu jeder komplexen Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ mit $z_0 \in \mathbb{C}$ einen eindeutig bestimmten Konvergenzradius $R \in \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ gibt, so dass gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \begin{cases} \text{konvergiert absolut für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| < R \\ \text{divergiert für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| > R. \end{cases}$$

(vgl. [K] IV(4.5), wobei [K] auf Krieg, Analysis I – IV, 2003 – 2006 verweist)

An dieser Stelle bleibt noch anzumerken, dass über das Verhalten auf dem Rand ($|z - z_0| = R$) nichts ausgesagt werden kann und dass aus der absoluten Konvergenz auch immer die Konvergenz der Reihe folgt.

Nun soll dieser Satz auf das Beispiel (1.2)(a) angewendet werden. Hier gilt $\lambda_n = n$, und mit Hilfe der Transformation $e^{-s} = z$ kann man den Satz über die Konvergenz von Potenzreihen direkt auf die Veränderliche s übertragen.

Nach dem eben erwähnten Satz konvergiert die Reihe für $|z| < R$ für ein $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$). Nun gilt aber für $R > 0$, dass

$$
\begin{aligned}
|z| < R \Leftrightarrow |e^{-s}| < R & \qquad \text{da } z = e^{-s} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{e^{\sigma}} < R & \qquad \text{da } e^{-s} = \frac{1}{e^{s}} \text{ und } |\exp(s)| = \exp(\mathrm{Re}(s)) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{R} < e^{\sigma} & \qquad \text{da } e^{\sigma} > 0, R > 0 \\
\Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{R}\right) < \log(e^{\sigma}) & \qquad \text{da } \log \text{ monoton wachsend} \\
\Leftrightarrow \log\left(\frac{1}{R}\right) < \sigma &
\end{aligned}
$$

und somit folgt die Konvergenz der Reihe für $\sigma > \log(\frac{1}{R})$. Analog ist $|z| > R$ äquivalent zu $\sigma < \log(\frac{1}{R})$, also folgt in diesem Fall die Divergenz der Reihe. Der Fall $R = 0$ wurde bisher von den Betrachtungen ausgeschlossen. In diesem Fall liegt eine punktweise Konvergenz im Entwicklungspunkt der Potenzreihe vor.

Insgesamt folgt: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-ns}$ konvergiert für alle s mit $\sigma > \sigma_0$ und divergiert für alle s mit $\sigma < \sigma_0$, wobei $\sigma_0 = \log(\frac{1}{R})$. Auf der Geraden $\sigma = \sigma_0$ kann keine Aussage bezüglich der Konvergenz gemacht werden (wie bei den Potenzreihen auf dem Rand des Konvergenzkreises ($|z| = R$)).

Der folgende Satz zeigt nun, dass das Konvergenzverhalten dieses Beispiels typisch für die Dirichletschen Reihen ist.

(2.1) Satz und Definition

Ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ für $s = s_0$ konvergent, so konvergiert sie auch für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$, und zwar gleichmäßig auf kompakten Mengen. Somit existiert eine Zahl σ_0, so dass die Reihe für alle s mit $\sigma > \sigma_0$ konvergiert und für alle s mit $\sigma < \sigma_0$ divergiert. Falls die Reihe überall konvergiert beziehungsweise divergiert, setze σ_0 gleich $-\infty$ beziehungsweise ∞.

Die in dem Gebiet $\sigma > \sigma_0$ durch

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$$

definierte Funktion von s ist dort holomorph und die Ableitungen von f sind gegeben durch

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n s},$$

wobei diese Dirichletschen Reihen ebenfalls für $\sigma > \sigma_0$ konvergiert.

Die Zahl $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ heißt *Konvergenzabszisse* der Dirichletschen Reihe. ◇

Beweis
Zeige: Die Dirichletsche Reihe konvergiert für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$, und zwar gleichmäßig auf kompakten Mengen.

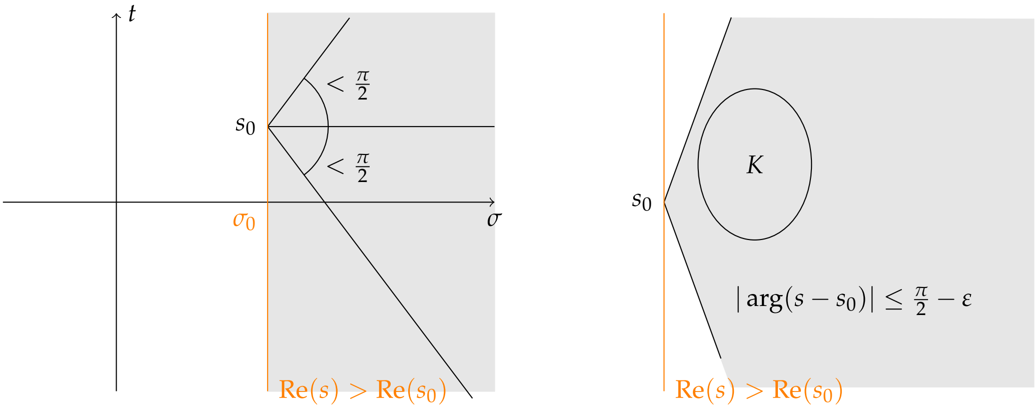
Dazu werden zuerst folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\begin{aligned} A(N) &= \sum_{n=1}^{N} a_n\,, \\ A(M,N) &= \sum_{n=M}^{N} a_n\,, \\ A(M,M-1) &= 0 \qquad \text{für } N \geq M. \end{aligned}$$

Diese Aussage wird hier nicht nur für alle kompakten Mengen mir $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$ bewiesen, sondern für

$$|\arg(s-s_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}.$$

Dieses ist mehr als der Satz fordert, da jede in $\{s \mid \sigma > \sigma_0\}$ enthaltene kompakte Menge K in solch einem Winkel enthalten ist.



O. B. d. A. kann man $s_0 = 0$ voraussetzen. Ersetze dazu gebenenfalls a_n durch $a_n e^{-\lambda_n s_0}$ und s durch $s - s_0$. Dann ergibt sich die Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s_0} e^{-\lambda_n (s-s_0)}$.

Wir haben nun also die Dirichletsche Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$, die an der Stelle $s = s_0 = 0$ die Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ hat und dort nach Voraussetzung konvergiert.

Die Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist nach dem Cauchy-Kriterium für Reihen ([K] IV(1.8)) äquivalent dazu, dass es zu jedem vorgebenen $\varepsilon_1 > 0$ ein $N_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|A(M,N)| = |\sum_{k=M}^{N} a_k| \leq \varepsilon_1$ für alle $N > M \geq N_0$ gilt.

Für $N > M \geq N_0$ gilt mit Hilfe der abelschen partiellen Summation ([K] IV(1.11))

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=M}^{N} a_n e^{-\lambda_n s} &= \sum_{n=M}^{N} A(n)(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + A(N)e^{-\lambda_{N+1} s} - A(M-1)e^{-\lambda_M s} \\
&= \sum_{n=M}^{N} \left[A(M,n) + a_1 + \cdots + a_{M-1}\right](e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) \\
&\quad + \left[A(M,N) + a_1 + \cdots + a_{M-1}\right]e^{-\lambda_{N+1} s} - (a_1 + \cdots + a_{M-1})e^{-\lambda_M s} \\
&= \sum_{n=M}^{N} A(M,n)(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + A(M,N)e^{-\lambda_{N+1} s} \\
&\quad + \underbrace{\sum_{n=M}^{N} (a_1 + \cdots + a_{M-1})(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s})}_{=(a_1+\cdots+a_{M-1})\left(e^{-\lambda_M s} - e^{-\lambda_{N+1} s}\right)} \\
&\quad + (a_1 + \cdots + a_{M-1})e^{-\lambda_{N+1} s} - (a_1 + \cdots + a_{M-1})e^{-\lambda_M s} \\
&= \sum_{n=M}^{N} A(M,n)(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + A(M,N)e^{-\lambda_{N+1} s} \\
&= \sum_{n=M}^{N-1} A(M,n)(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + A(M,N)e^{-\lambda_N s} - A(M,N)e^{-\lambda_{N+1} s} \\
&\quad + A(M,N)e^{-\lambda_{N+1} s} \\
&= \sum_{n=M}^{N-1} A(M,n)(e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}) + A(M,N)e^{-\lambda_N s}\,.
\end{aligned}
$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned}
|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}| &= |s \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-su} du| \\
&\leq |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} |e^{-su}| du \qquad \text{([K] XVII(1.3)(c) und} \\
&\qquad\qquad \text{Stetigkeit der Exponentialfunktion)} \\
&= |s| \int_{\lambda_n}^{\lambda_{n+1}} e^{-\sigma u} du \\
&= \frac{|s|}{\sigma} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1} \sigma}) \,,
\end{aligned}$$

und $\frac{|s|}{\sigma}$ ist im Bereich $|\arg(s - s_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ mit $s_0 = 0$ beschränkt. Dies gilt, da es für s mit $|\arg(s)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ eine Polarkoordinatendarstellung $s = pe^{i\varphi}$ mit $p > 0$ und $-(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) \leq \varphi \leq (\frac{\pi}{2} - \varepsilon)$ gibt; dann folgt

$$\frac{|s|}{\sigma} = \frac{|p||e^{i\varphi}|}{\mathrm{Re}(pe^{i\varphi})} = \frac{p}{p \cos \varphi} = \frac{1}{\cos \varphi} \leq \frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} - \varepsilon)} = C$$

und somit ist $\frac{|s|}{\sigma}$ in diesem Bereich beschränkt.

Definiere nun noch $N_1 := \min\{n \in \mathbb{N} \mid e^{-\lambda_n \sigma}(C + 1) \leq 1\}$.

Für $\sigma = \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0) = 0$ folgt nun insgesamt

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=M}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}\right| &\leq \sum_{n=M}^{N-1} \underbrace{|A(M,n)|}_{\leq \varepsilon_1} \underbrace{|e^{-\lambda_n s} - e^{-\lambda_{n+1} s}|}_{\leq C(e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma})} + \underbrace{|A(M,N)|}_{\leq \varepsilon_1} |e^{-\lambda_N s}| \\
&\leq C\varepsilon_1 \sum_{n=M}^{N-1} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}) + \varepsilon_1 |e^{-\lambda_N s}| \\
&= C\varepsilon_1 \sum_{n=M}^{N-1} (e^{-\lambda_n \sigma} - e^{-\lambda_{n+1}\sigma}) + \varepsilon_1 e^{-\lambda_N \sigma} \qquad (|\exp(z)| = \exp(\mathrm{Re}(z))) \\
&= C\varepsilon_1 (e^{-\lambda_M \sigma} - \underbrace{e^{-\lambda_N \sigma}}_{>0,\text{ da } -\lambda_N \sigma \text{ reell}}) + \varepsilon_1 e^{-\lambda_N \sigma} \\
&\leq C\varepsilon_1 (e^{-\lambda_M \sigma}) + \varepsilon_1 e^{-\lambda_N \sigma} \\
&< (C+1)\varepsilon_1 e^{-\lambda_{N_0} \sigma} \leq \varepsilon . \qquad (\max\{N_0, N_1\} \leq M < N; \lambda_1 < \lambda_2 < \dots)
\end{aligned}$$

Hieraus folgt die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ auf $|\arg(s - s_0)| \leq \frac{\pi}{2} - \varepsilon < \frac{\pi}{2}$ und damit auf jedem Kompaktum in $\{s \mid \mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)\}$.

Nun ist auch klar, dass ein $\sigma_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ existiert, so dass die Dirichletsche Reihe für alle s mit $\sigma > \sigma_0$ konvergiert und für alle s mit $\sigma < \sigma_0$ divergiert; dabei bedeutet σ_0 gleich $-\infty$ oder ∞, dass die Reihe überall konvergiert beziehungsweise divergiert.

Weiterhin gilt für die auf dem Gebiet $\sigma > \sigma_0$ durch $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ definierte Funktion von s, dass sie dort holomorph ist. Dieses folgt aus dem Satz von Weierstrass ([K] XVIII(5.1)). Die Funktionen $S_N : s \mapsto \sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s}$ sind holomorph, da die a_n aus $\mathbb{C}$ sind und die Exponentialfunktion eine ganze Funktion ist. Weiterhin konvergiert die Funktionenfolge $(S_N)_{N\geq 1} = (\sum_{n=1}^{N} a_n e^{-\lambda_n s})_{N\geq 1}$ für $\sigma > \sigma_0$ lokal gleichmäßig gegen die Funktion $f : s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$. Nach dem oben erwähnten Satz folgt nun, dass f ebenfalls holomorph ist und $(S_N^{(k)})_{N\geq 1}$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ebenfalls lokal gleichmäßig gegen $f^{(k)}$ konvergiert. Man darf die Reihe nun also gliedweise differenzieren und erhält damit

$$f^{(k)}(s) = (-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^k a_n e^{-\lambda_n s}.$$

□

Im Folgenden wird thematisiert, wie man die Konvergenzabszisse σ_0 einer Dirichletschen Reihe bestimmen kann.

Bei den komplexen Potenzreihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ gilt der Satz von Cauchy-Hadamard ([K] IV(4.8)), der besagt, dass für den Konvergenzradius R gilt

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad ,$$

wobei $\frac{1}{0}$ als ∞ und $\frac{1}{\infty}$ als 0 definiert werden.

Der folgende Satz enthält nun eine analoge Formel für die Konvergenzabszisse σ_0 in Abhängigkeit von den Koeffizienten λ_n.

(2.2) Satz
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ eine Dirichletsche Reihe mit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Dann ist die Konvergenzabszisse σ_0 durch

$$\sigma_0 = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log|A(N)|}{\lambda_N}$$

gegeben. ◇

Beweis
Wir beweisen diesen Satz der Einfachheit halber nur für den später benötigten Fall von gewöhnlichen Dirichletschen Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, also $\lambda_n = \log n$.

Wir zeigen nun:

$$\sigma_0 = \underbrace{\limsup_{N\to\infty} \frac{\log|A(N)|}{\log N}}_{=:\beta} = \underbrace{\inf\{\alpha \mid A(N) = \mathcal{O}(N^\alpha)\}}_{=:\gamma}$$

Die Gleichung $A(N) = \mathcal{O}(N^\alpha)$ bedeutet, dass eine Zahl $B > 0$ existiert, für die $|A(N)| \leq BN^\alpha$ für alle N gilt.

Es gilt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ gleich der Dirichletschen Reihe an der Stelle $s = 0$ ist. Deshalb ist $\sigma_o \geq 0$. Andererseits folgt aus der Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ auch, dass $(\sum_{n=1}^{N} a_n)_{N\geq 1}$ keine Nullfolge ist. Damit ein $B > 0$ existieren kann, so dass $|A(N)| \leq BN^\alpha$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt, muss also $\alpha \geq 0$ sein.

Beweisaufbau:

1. $\sigma_0 \geq \gamma$

2. $\gamma \geq \sigma_0$ (aus 1. und 2. folgt $\sigma_0 = \gamma$)

3. $\beta = \gamma$

zu 1: (zu zeigen: $\sigma_0 \geq \gamma$)

Ist $\sigma > \sigma_0$, konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}$ nach (2.1). Dementsprechend existiert nach [K] IV(1.9) auch ein $C > 0$, für das gilt

$$\Big| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma} \Big| < C \text{ für alle } N.$$

Mit Hilfe der abelschen partiellen Summation (IV (1.11)) erhält man

$$\begin{aligned}
|A(N)| &= \Big| \sum_{n=1}^{N} (a_n n^{-\sigma}) n^{\sigma} \Big| \\
&= \Big| \sum_{n=1}^{N} \Big[\Big(\sum_{m=1}^{n} a_m m^{-\sigma} \Big) (n^{\sigma} - (n+1)^{\sigma}) \Big] + \sum_{m=1}^{N} a_m m^{-\sigma} (N+1)^{\sigma} \Big| \\
&= \Big| \sum_{n=1}^{N-1} \Big[\Big(\sum_{m=1}^{n} a_m m^{-\sigma} \Big) (n^{\sigma} - (n+1)^{\sigma}) \Big] + \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma} N^{\sigma} \Big| \\
&\leq \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{\Big| \sum_{m=1}^{n} a_m m^{-\sigma} \Big|}_{<C} ((n+1)^{\sigma} - n^{\sigma}) + \underbrace{\Big| \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma} \Big|}_{<C} N^{\sigma} \\
&\qquad (\triangle\text{-Ungleichung und } \sigma > 0, \text{ da } \sigma > \sigma_0) \\
&< C \underbrace{\sum_{n=1}^{N-1} ((n+1)^{\sigma} - n^{\sigma})}_{=(N^{\sigma}-1)} + CN^{\sigma} \\
&< 2CN^{\sigma}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $\gamma \leq \sigma$, und da dieses für alle σ mit $\sigma > \sigma_0$ gilt, folgt $\gamma \leq \sigma_0$.

zu 2: (zu zeigen: $\gamma \geq \sigma_0$)

Sei $\sigma > \gamma$. Dann gilt wieder mit der abelschen partiellen Summation

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma} &= \sum_{n=1}^{N} A(n)(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}) + A(N)(N+1)^{-\sigma} \\ &= \sum_{n=1}^{N-1} \underbrace{A(n)(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma})}_{(*)} + \underbrace{A(N)(N)^{-\sigma}}_{(**)} .\end{aligned}$$

Wähle nun α mit $\gamma < \alpha < \sigma$ (z. B. $\alpha = \frac{\gamma+\sigma}{2}$) und C mit $|A(N)| \leq CN^{\alpha}$ für alle N (existiert nach Voraussetzung).

Hiermit gilt für $(*)$

$$\begin{aligned}|A(n)(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma})| &= \underbrace{|A(n)|}_{\leq Cn^{\alpha}\text{(nach Vor.)}} |(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma})| \\ &\leq Cn^{\alpha}(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma}) \\ &= C\sigma n^{\alpha} \int_{n}^{n+1} x^{-\sigma-1} dx \\ &\leq C\sigma n^{\alpha} \int_{n}^{n+1} n^{-\sigma-1} dx \\ &= C\sigma n^{\alpha-\sigma-1} .\end{aligned}$$

Nun folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N-1} |A(n)(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma})| &\leq C\sigma \sum_{n=1}^{N-1} n^{\alpha-\sigma-1} \\ &= C\sigma \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^{1+(\sigma-\alpha)}} .\end{aligned}$$

Da $(\sigma - \alpha)$ größer als 0 ist, folgt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |A(n)(n^{-\sigma} - (n+1)^{-\sigma})|$ absolut konvergent (vgl. [K] VII(3.8)) und damit auch konvergent ist.

Für $(**)$ erhält man

$$|A(N)N^{-\sigma}| = \underbrace{|A(N)|}_{\leq CN^{\alpha}} |N^{-\sigma}| \leq CN^{\alpha-\sigma} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 .$$

Insgesamt folgt nun, dass $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} a_n n^{-\sigma}$ endlich ist. Die Dirichletsche Reihe konvergiert also und dementsprechend muss $\sigma \geq \sigma_0$ gelten. Da dieses nach Voraussetzung für alle σ gilt, die größer als γ sind, folgt die Behauptung, dass $\gamma \geq \sigma_0$ gilt.

Aus den ersten beiden Teilbeweisen erhält man die Gleichheit von γ und σ_0. Nun bleibt noch die Gleichheit von γ und β zu zeigen.

zu 3: (zu zeigen: $\gamma = \beta$)

zu 3.1 (zu zeigen: $\gamma \geq \beta$)

Aus $\sigma > \gamma$ folgt, dass ein $B > 0$ existiert mit $|A(N)| \leq BN^{\sigma}$ für alle N.

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\log|A(N)|}{\log N} &\leq \frac{\log(BN^{\sigma})}{\log N} \\
&= \frac{\log B}{\log N} + \frac{\log(N^{\sigma})}{\log N} \\
&= \frac{\log B}{\log N} + \frac{\sigma \log N}{\log N} \\
&= \frac{\log B}{\log N} + \sigma \xrightarrow[N\to\infty]{} \sigma \,.
\end{aligned}$$

Aus dieser Rechnung folgt, dass für alle σ mit $\sigma > \gamma$ gilt, dass $\sigma \geq \beta$ erfüllt ist; also folgt, dass $\gamma \geq \beta$ gilt.

zu 3.2 (zu zeigen: $\gamma \leq \beta$)

Sei $\sigma > \beta$. Dann existiert ein $N_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{\log|A(N)|}{\log N} \leq \sigma$ für alle $N \geq N_0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\log|A(N)|}{\log N} \leq \sigma &\Leftrightarrow \log|A(N)| \leq \sigma \log N \\
&\Leftrightarrow \log|A(N)| \leq \log(N^{\sigma}) \\
&\Leftrightarrow |A(N)| \leq N^{\sigma} \qquad\qquad \text{für alle } N \geq N_0 \,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt $|A(N)| \leq BN^{\sigma}$ für alle $N \in \mathbb{N}$, wobei $B := \max\{1, |A(n)n^{-\sigma}|; 1 \leq n < N_0\}$, also gilt $A(N) = O(N^{\sigma})$, und damit folgt $\sigma \geq \gamma$, und da das wieder für alle σ mit $\sigma > \beta$ gilt, folgt $\beta \geq \gamma$.

Aus den letzten beiden Teilbeweisen folgt die Gleichheit von β und γ und damit insgesamt, dass σ_0 gleich β ist. $\square$

(2.3) Bemerkung
Im allgemeinen Fall, das heißt, wenn statt $\log N$ ein beliebiges λ_n betrachtet wird, ist der Beweis analog durchzuführen. Hierbei ist γ durch $\inf\{\alpha \mid \exists\, B > 0;\ |A(N)| \leq Be^{\lambda_n \alpha}\}$ definiert. Die Voraussetzung, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergiert, ist wichtig, da man hieraus schließen kann, dass σ_0 und γ größer gleich Null sind (siehe oben). Falls $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, gilt der Satz noch, wenn wir $A(N)$ durch $\sum_{n=N}^{\infty} a_n$ ersetzen (hierzu schätze $\sum_{n=M}^{N} a_n$ im Beweis durch $\mathcal{O}((N-M+1)^{\alpha})$ ab). Darüberhinaus kann man durch Verschiebung (außer im Fall $\sigma_0 = -\infty$) auch immer erreichen, dass $\sigma_0 > 0$ und somit $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent ist. $\diamond$

(2.4) Beispiel

a) Die Riemannsche Zetafunktion lautet

$$\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \, .$$

Sie ist eine gewöhnliche Dirichlet-Reihe mit $\lambda_n = \log(n)$, $a_n = 1$, $A(N) = \sum_{n=1}^{N} 1 = N$.

Nach Satz (2.2) erhält man nun:

$$\sigma_0 = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log|A(N)|}{\log N} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log N}{\log N} = 1 \, ,$$

also ist die Riemannsche Zeta-Funktion definiert für $\sigma > 1$.

b) Bei der Funktion

$$\psi(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \ldots$$

gilt, dass $a_n = (-1)^{n-1}$, also

$$A(N) = \begin{cases} 1, & \text{falls } N \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{falls } N \text{ gerade.} \end{cases}$$

Mit Satz (2.2) erhält man dann

$$\sigma_0 = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log|A(N)|}{\log N} = \lim_{N\to\infty} \frac{\log 1}{\log N} = 0 \, .$$

Dementsprechend ist diese Funktion definiert für $\sigma > 0$.

Für $\sigma > 1$ gilt

$$\begin{aligned}\psi(s) &= \zeta(s) - 2\Big(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{4^s} + \dots\Big)\\ &= \zeta(s) - 2\frac{1}{2^s}\zeta(s)\\ &= \zeta(s) - 2^{1-s}\zeta(s)\\ &= \big(1 - 2^{1-s}\big)\zeta(s)\ .\end{aligned}$$

An dieser Rechnung sieht man, dass man $\zeta(s)$ in der Halbebene $\sigma > 0$ meromorph fortsetzen kann durch $\frac{\psi(s)}{(1-2^{1-s})}$ (vgl. Def. [K] XX(3.1)).

Diese Funktion ist meromorph, da Pole höchstens in den Punkten $s = 1 - \frac{2k\pi i}{\log 2}$ mit $k \in \mathbb{Z}$ vorliegen können. Dies gilt, da

$$\begin{aligned}2^{1-s} = 1 &\Leftrightarrow \exp((1-s)\log(2)) = 1\\ &\Leftrightarrow (1-s)\log(2) = 2\pi ik && \text{für ein } k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \log(2) - s\log(2) = 2\pi ik && \text{für ein } k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow \frac{\log(2)}{\log(2)} - \frac{2\pi ik}{\log(2)} = s && \text{für ein } k \in \mathbb{Z}\\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{2k\pi i}{\log(2)} = s && \text{für ein } k \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

In diesen Punkten liegt jeweils eine Nullstelle erster Ordnung von $(1 - 2^{1-s})$ vor und da $\psi(s)$ weder wesentliche Singularitäten noch Pole besitzt (da die Reihendarstellung für ψ konvergent ist), handelt es sich insgesamt höchstens um Pole erster Ordnung. ◇

An diesem Beispiel sieht man einen entscheidenden Unterschied zwischen den Dirichletschen Reihen und den Potenzreihen. Die Potenzreihen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad \text{und} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|(z-z_0)^n$$

haben den gleichen Konvergenzradius, wie man an der Formel

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

direkt sehen kann. Außer auf dem Rand des Konvergenzkreises kann man überall sagen, dass die Potenzreihe dort, wo sie konvergiert, auch absolut konvergent ist.

Dieses ist bei den Dirichletschen Reihen nicht der Fall. Die Dirichletsche Reihe im Beispiel (2.3)(b) ($\psi(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \dots$) ist für $\sigma > 0$ konvergent. Die Riemannsche Zetafunktion ist die entsprechende Funktion mit positiven Gliedern ($\zeta(s) = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \frac{1}{4^s} + \dots$), und diese ist, wie im Beispiel (2.3)(a) gezeigt wurde, nur für $\sigma > 1$ konvergent.

Nähere Einzelheiten zu den Konvergenzabszissen σ_0 und σ_1 von Dirichletschen Reihen der Form $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-s}$ wird der nächste Vortrag beinhalten.