Dirichlet-Reihen II

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 17.12.2007

Holger Wintermayr

In diesem Vortrag werden wir Konvergenzeigenschaften von Dirichlet-Reihen erarbeiten und einen Vergleich zu Potenzreihen ziehen. Ein weiteres Ziel dieses Vortrages ist es, Dirichlet-Reihen unter gewissen Voraussetzungen als Produkte darzustellen.

§ 1 Konvergenzeigenschaften von Dirichlet-Reihen

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns mit der Konvergenz von Dirichlet-Reihen und vergleichen diese mit der Konvergenz von Potenzreihen.

(1.1) Satz
Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ eine Dirichletsche Reihe mit Konvergenzabszisse σ_0 und sei σ_1 die Konvergenzabszisse von $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-s}$. Dann gilt

$$\sigma_0 \leq \sigma_1 \leq \sigma_0 + 1. \qquad \diamond$$

Beweis
Sei $\sigma \in \mathbb{R}$ mit $\sigma > \sigma_1$. Dann ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}$ absolut konvergent und es folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}$ konvergiert. Daher erhält man aus der absoluten Konvergenz der Reihe die Konvergenz und es gilt $\sigma_0 \leq \sigma_1$.

Sei nun $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\sigma, t \in \mathbb{R}$ und $\sigma > \sigma_0 + 1$. Wegen $\sigma - 1 > \sigma_0$ konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(\sigma-1)}$, also ist $(a_n n^{-\sigma+1})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, das heißt für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mit $\left|a_n n^{-\sigma+1}\right| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere existiert also ein C > 0 mit

$$\left|a_n n^{-\sigma+1}\right| < C \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

(zum Beispiel $C := \max\{|a_1|, |a_2 2^{-\sigma+1}|, ..., |a_{n_0} {n_0}^{-\sigma+1}|\} + 1$).

Weil die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(z)$ für alle $z = \sigma + it \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(z) > 1$ konvergiert, gelten für alle $N \in \mathbb{N}$ folgende Abschätzungen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \left|a_n n^{-(\sigma+\varepsilon)}\right| &= \sum_{n=1}^{N} \left|a_n n^{-(\sigma-1+1+\varepsilon)}\right| = \sum_{n=1}^{N} \left|a_n n^{-\sigma+1} n^{-(1+\varepsilon)}\right| \\ &= \sum_{n=1}^{N} \left|a_n n^{-\sigma+1}\right| n^{-(1+\varepsilon)} \leq \sum_{n=1}^{N} C n^{-(1+\varepsilon)} = C \sum_{n=1}^{N} n^{-(1+\varepsilon)} \\ &\leq C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)} = C \cdot \zeta(1+\varepsilon) < \infty.\end{aligned}$$

Damit konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(\sigma+\varepsilon)}$ absolut für alle $\sigma > \sigma_0 + 1$ und für alle $\varepsilon > 0$. Da $\sigma_1 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}\,;\, \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-\sigma}$ konvergiert absolut$\}$ ist, folgt $\sigma_1 \leq \sigma_0 + 1$ und somit die Behauptung. □

Dieser Satz ist nur für gewöhnliche Dirichlet-Reihen gültig. Man betrachte dazu folgendes

(1.2) Beispiel
Die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (\ln n)^{-s}$$

◇

konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$, aber konvergiert für kein $s \in \mathbb{C}$ absolut.

Beweis
Zur absoluten Konvergenz: Für die absolute Konvergenzabszisse σ_1 der Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (\ln n)^{-s}$$

gilt mit $\lambda_n = \ln(\ln n)$ und $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ nach [Z] §1 Satz 2

$$\sigma_1 = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln \left| \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \right|}{\ln(\ln N)}.$$

Da $x \geq [x]$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 2$ gilt, erhält man die folgende Abschätzung

$$\left| \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}} \right| = \left| \int_2^{N+1} \frac{1}{\sqrt{[x]}} dx \right| \geq \left| \int_2^{N+1} \frac{1}{\sqrt{x}} dx \right| = \left[2\sqrt{x}\,\right]_2^{N+1} = 2\sqrt{N+1} - 2\sqrt{2}.$$

Man definiere nun die Funktionen

$$f : (2,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln\left(2\sqrt{x+1} - 2\sqrt{2}\right) \text{ und}$$
$$g : (2,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \ln(\ln(x)).$$

Die Funktionen f und g sind auf dem Intervall (2,∞) differenzierbar, mit der Ableitung $g'(x) = 1/(\ln x \cdot x) \neq 0$ für alle $x \in (2,\infty)$, und es gilt

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

Daher ist der Satz von L'Hospital anwendbar und man erhält für den Grenzwert

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}-2\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{\ln x} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x \cdot x}{2(x+1) - 2\sqrt{2}\sqrt{x+1}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x \cdot x}{(x+1)\cdot\left(2 - 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{(1+\frac{1}{x})\cdot\left(2 - 2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{x+1}}\right)} = \infty.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\sigma_1 = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\sqrt{n}}\right|}{\ln(\ln N)} \geq \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln(2\sqrt{N+1} - 2\sqrt{2})}{\ln(\ln N)} = \infty.$$

Deshalb konvergiert die Reihe für kein $s \in \mathbb{C}$ absolut.

Zur bedingten Konvergenz: Sei $\alpha < 0$. Definiere die Funktion

$$h : (0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{(\ln x)^{-\alpha}}{\sqrt{x}}.$$

Für jedes $x \geq e^{-2\alpha}$ gilt dann

$$\begin{aligned}h'(x) &= -\frac{(\ln x)^{-\alpha}\alpha}{x^{\frac{3}{2}}\ln x} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln x)^{-\alpha}}{x^{\frac{3}{2}}} \geq -\frac{(\ln x)^{-\alpha}\alpha}{x^{\frac{3}{2}}(-2\alpha)} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln x)^{-\alpha}}{x^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln x)^{-\alpha}}{x^{\frac{3}{2}}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{(\ln x)^{-\alpha}}{x^{\frac{3}{2}}} = 0,\end{aligned}$$

also ist h auf $[e^{-2\alpha}, \infty)$ monoton fallend. Daher konvergiert

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (\ln n)^{-\alpha} = \sum_{n=2}^{[e^{-2\alpha}]} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} (\ln n)^{-\alpha} + \sum_{n=[e^{-2\alpha}]+1}^{\infty} (-1)^n h(n), \qquad \square$$

da der erste Summand eine endliche Summe und der zweite Summand wegen $h(n) \to 0$ für $n \to \infty$ (Potenzreihen wachsen schneller als Potenzen von Logarithmen) und der gerade bewiesenen Monotonie eine Leibnizreihe ist. Mit [Z] §1 Satz 1 folgt, dass die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n n^{-1/2} (\ln n)^{-s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > \alpha$ konvergiert, und da $\alpha < 0$ beliebig gewählt war, erhält man die Konvergenz dieser Reihe auf ganz $\mathbb{C}$.

Es gibt zwei große Unterschiede zwischen der Theorie der Dirichlet-Reihen und der der Potenzreihen.

(1.3) Bemerkung

a) Der erste Unterschied zwischen Dirichlet-Reihen und Potenzreihen zeigt sich in Satz (1.1). Falls eine Dirichlet-Reihe absolut konvergiert, muss die Konvergenzabszisse σ_0 nicht mit der absoluten Konvergenzabszisse σ_1 übereinstimmen. Dagegen stimmt der Konvergenzradius R einer Potenzreihe mit dem absoluten Konvergenzradius der Reihe überein. Dies folgt aufgund des Satzes von Cauchy-Hadamard über den Konvergenzradius R einer Potenzreihe, der besagt, dass

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}},$$

gilt.

b) Ein weiterer wichtiger Unterschied zwischen Dirichlet-Reihen und Potenzreihen liegt darin, dass sich der Konvergenzradius einer Potenzreihe auch durch das Verhalten der analytischen Funktion der Reihe bestimmen lässt. So kann der Konvergenzradius einer Potenzreihe als maximaler Abstand vom Entwicklungspunkt zum nächstgelegenen Punkt, in dem die Reihe nicht mehr fortsetzbar ist, festgelegt werden.

Für Dirichlet-Reihen stimmt das nicht. Die Riemannsche Zetafunktion $\zeta(s)$ konvergiert für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Für die analytische Funktion der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s}$ gilt

$$\begin{aligned}\psi(s) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2(2n)^{-s} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} - 2\sum_{n=1}^{\infty}(2n)^{-s} = (1-2^{1-s})\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1} = \begin{cases} 0, & \text{falls } N \text{ gerade} \\ 1, & \text{falls } N \text{ ungerade}\end{cases}$$

divergiert $\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}$ und man erhält für die Konvergenzabszisse σ_0 nach [Z] §1 Satz 2

$$\sigma_0 = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln\left|\sum_{n=1}^{N}(-1)^{n-1}\right|}{\ln n} = \limsup_{n\to\infty}\frac{\ln 1}{\ln n} = 0.$$

Daher konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$. Nach [Z] §4 (später) lässt sich $\zeta(s)$ auf $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ holomorph fortsetzen. Auf $\overline{K_{1/2}(1)}$ konvergiert $(1-2^{1-s}) \cdot \zeta(s)$ nach [Z] §1 Satz 1 gleichmäßig. Daher darf man die Summe mit dem Grenzwert vertauschen und es folgt

$$\begin{aligned}\lim_{s\to 1}\psi(s) &= \lim_{s\to 1}(1-2^{1-s})\cdot\zeta(s) = \lim_{s\to 1}(1-2^{1-s})\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} \\ &= \lim_{s\to 1}\sum_{n=1}^{\infty}(1-2^{1-s})n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty}\lim_{s\to 1}(1-2^{1-s})n^{-s} = 0.\end{aligned}$$

◇

Somit lässt sich $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n^{-s} = (1-2^{1-s})\cdot\zeta(s)$ auf $\mathbb{C}$ holomorph fortsetzen.

(1.4) Satz

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ eine gewöhnliche Dirichlet-Reihe mit Konvergenzabszisse σ_0 und nichtnegativen reellen Koeffizienten. Dann hat die durch

$$D(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \text{ mit } \mathrm{Re}(s) > \sigma_0$$

definierte Funktion keine hebbare Singularität an der Stelle $s = \sigma_0$, das heißt, es existiert kein Kreis um σ_0, in dem man $D(s)$ holomorph fortsetzen kann. ◇

Beweis
Sei ohne Einschränkung $\sigma_0 = 0$. Andernfalls ersetze a_n durch $a_n n^{-s_0}$ sowie s durch $s - s_0$ mit $s_0 = \sigma_0 + it_0 \in \mathbb{C}$, wodurch man

$$a_n n^{-s} = a_n n^{-s_0+s_0-s} = a_n n^{-s_0} n^{s_0-s} = a_n n^{-s_0} n^{-(s-s_0)}$$

erhält.

Angenommen D sei in $s = 0$ holomorph fortsetzbar. Dann existiert ein $\delta > 0$, so dass D in $K_\delta(0)$ holomorph ist. Da $\sigma_0 = 0$ ist, ist D insbesondere in $s = 1$ holomorph und besitzt (weil D auf $K_\delta(0)$ holomorph ist) eine Taylor-Entwicklung um $s = 1$ mit einem Konvergenzradius $R > 1$. Für $\varepsilon := \frac{\sqrt{1+\delta^2}-1}{2}$ erhält man

$$K_{1+2\varepsilon}(1) \subset (K_\delta(0) \cup \{z \in \mathbb{C}; \mathrm{Re}(z) > 0\}),$$

denn die „kritischen Punkte“ $\pm i\delta$ haben von 1 den Abstand

$$|i\delta - 1| = \sqrt{1+\delta^2} = 1 + 2\varepsilon.$$

Damit ist D holomorph auf $K_{1+2\varepsilon}(1)$ und in $s = -\varepsilon$ in eine Potenzreihe entwickelbar. Nun folgt mit den Ableitungen von D aus [Z] §1 Satz 1

$$\begin{aligned} D(-\varepsilon) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} D^{(k)}(1)(-\varepsilon-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(-1)^k \sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^k a_n n^{-1} (-\varepsilon-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^k a_n n^{-1} \frac{(-1)^k}{k!}(-\varepsilon-1)^k = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^k \frac{a_n}{n}\frac{(\varepsilon+1)^k}{k!}. \end{aligned}$$

Da alle Terme positiv und reell vorliegen, dürfen die Summanden vertauscht werden. Dadurch ergibt sich

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} (\ln n)^k \frac{a_n}{n}\frac{(\varepsilon+1)^k}{k!} &= \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (\ln n)^k \frac{a_n}{n}\frac{(\varepsilon+1)^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} (\ln n)^k \frac{(\varepsilon+1)^k}{k!} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\ln n \cdot (\varepsilon+1))^k}{k!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} e^{(\ln n \cdot (\varepsilon+1))} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} \left(e^{\ln n}\right)^{(\varepsilon+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n} n^{(\varepsilon+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{\varepsilon} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(-\varepsilon)} < \infty. \end{aligned}$$

Aus der Konvergenz der Reihe $D(-\varepsilon) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-(-\varepsilon)}$ folgt dann der Widerspruch zu $\sigma_0 = 0$. □

Wir beenden den Paragraphen mit einem Satz über die Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Dirichlet-Reihe.

(1.5) Satz

Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet sowie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$ zwei Dirichlet-Reihen, die auf G konvergieren und dort die gleiche Funktion $D_\mathrm{a} : s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ und $D_\mathrm{b} : s \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n s}$ definieren. Dann gilt

$$a_n = b_n \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

$\diamond$

Beweis

Sei $\widetilde{s} = \widetilde{\sigma} + i\widetilde{t} \in G$ mit $\widetilde{\sigma}, \widetilde{t} \in \mathbb{R}$. Sei $W := \{s \in \mathbb{C}; |\arg(s - \widetilde{\sigma})| \leq \pi/4\}$ der Winkelbereich mit Spitze $\widetilde{\sigma}$. Nach [Z] §1 Satz 1 konvergieren damit D_a und D_b gleichmäßig in W und sind darin auch holomorph. Da G als Gebiet offen ist, existiert ein $\delta > 0$ mit $K_\delta(\widetilde{s}) \subset G$. Weil $K_\delta(\widetilde{s}) \cap W$ nicht leer und nicht diskret ist, folgt mit dem Identitätssatz $D_\mathrm{a}(s) = D_\mathrm{b}(s)$ für alle $s \in W$. Angenommen, die komplexen Folgen $(a_n)_{n\geq 1}$ und $(b_n)_{n\geq 1}$ sind nicht identisch. Wähle $m \in \mathbb{N}$ minimal mit der Eigenschaft $a_m \neq b_m$. Für alle $\sigma > \widetilde{\sigma}$ folgt dann

$$\begin{aligned} 0 &= e^{\lambda_m \sigma} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma} - \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \sigma} \right) \\ &= e^{\lambda_m \sigma} \left(a_m e^{-\lambda_m \sigma} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma} - b_m e^{-\lambda_m \sigma} - \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \sigma} \right), \end{aligned}$$

da $a_n = b_n$ nach Wahl von m für alle $1 \leq n < m$ gilt. Weil beide Reihen konvergieren, darf man sie zusammenfassen:

$$\begin{aligned} 0 &= e^{\lambda_m \sigma} \left(a_m e^{-\lambda_m \sigma} + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma} - b_m e^{-\lambda_m \sigma} - \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \sigma} \right) \\ &= a_m - b_m + e^{\lambda_m \sigma} \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n \sigma} - e^{\lambda_m \sigma} \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n \sigma} \\ &= a_m - b_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_m)\sigma} - \sum_{n=m+1}^{\infty} b_n e^{-(\lambda_n - \lambda_m)\sigma} \\ &= a_m - b_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} \left(a_n e^{-(\lambda_n - \lambda_m)\sigma} - b_n e^{-(\lambda_n - \lambda_m)\sigma} \right) \\ &= a_m - b_m + \sum_{n=m+1}^{\infty} (a_n - b_n) e^{-(\lambda_n - \lambda_m)\sigma}. \end{aligned}$$

Wie schon erwähnt, konvergieren D_{a} und D_{b} gleichmäßig in W. Somit darf man den Limes mit der Reihe vertauschen und man erhält

$$\begin{aligned}
0 &= \lim_{\sigma\to\infty}\left(a_m - b_m + \sum_{n=m+1}^{\infty}(a_n-b_n)e^{-(\lambda_n-\lambda_m)\sigma}\right)\\
&= a_m - b_m + \lim_{\sigma\to\infty}\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{n=m+1}^{N}(a_n-b_n)e^{-(\lambda_n-\lambda_m)\sigma}\right)\\
&= a_m - b_m + \lim_{N\to\infty}\sum_{n=m+1}^{N}\lim_{\sigma\to\infty}\left((a_n-b_n)e^{-(\lambda_n-\lambda_m)\sigma}\right)\\
&= a_m - b_m + \sum_{n=m+1}^{\infty}\lim_{\sigma\to\infty}\left((a_n-b_n)e^{-(\lambda_n-\lambda_m)\sigma}\right).
\end{aligned}$$

Da es sich um Dirichlet-Reihen handelt, ist $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton steigende reelle Folge, und es gilt $-(\lambda_n-\lambda_m) < 0$ für alle $n > m$. Das bedeutet, dass der Summand für $\sigma \to \infty$ verschwindet, wenn man die Stetigkeit der Exponentialfunktion beachtet. Daher folgt

$$\begin{aligned}
0 &= a_m - b_m + \sum_{n=m+1}^{\infty}\lim_{\sigma\to\infty}\left((a_n-b_n)e^{-(\lambda_n-\lambda_m)\sigma}\right)\\
&= a_m - b_m + \sum_{n=m+1}^{\infty}(a_n-b_n)\lim_{\sigma\to\infty}e^{-(\lambda_n-\lambda_m)\sigma}\\
&= a_m - b_m + \sum_{n=m+1}^{\infty}(a_n-b_n)\cdot 0 = a_m - b_m,
\end{aligned}$$

und es ergibt sich $a_m = b_m$ als Widerspruch zur Wahl von m. Somit gilt $a_n = b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. □

§2 Formale Eigenschaften von Dirichlet-Reihen

Nachdem wir die Konvergenz von Dirichlet-Reihen besprochen haben, wollen wir erläutern, wie man mit solchen Reihen umgeht. In diesem Abschnitt lernen wir die Multiplikation zweier Dirichlet-Reihen kennen. Des Weiteren führen wir multiplikative Folgen ein, da sich ihre Dirichlet-Reihen besonders schön als Produkt darstellen lassen.

Die Summe von zwei Dirichlet-Reihen ist die Reihe, deren Koeffizienten die Summe der beiden entsprechenden Koeffizienten der einzelnen Reihen ist. Für das Produkt zweier Dirichlet-Reihen gilt das

(2.1) Lemma
Seien $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ und $G(s) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{-s}$ zwei in einer offenen Umgebung U durch absolut konvergente gewöhnliche Dirichlet-Reihen gegebene Funktionen. Dann gilt

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{-s} \right) \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m (nm)^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^{-s} \end{aligned}$$

für alle $s \in U$, wobei

$$c_k := \sum_{\substack{n,m \geq 1 \\ nm=k}} a_n b_m = \sum_{n \in \mathbb{N},\, n|k} a_n b_{k/n}$$

die Faltung der Koeffizientenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_m)_{n\in\mathbb{N}}$ genannt wird. Das Produkt konvergiert dabei absolut auf U. $\diamond$

Beweis
Wegen der absoluten Konvergenz beider Dirichlet-Reihen, konvergiert das Produkt auch absolut und man darf die Summanden beliebig umordenen. Daher gilt

$$\begin{aligned} F(s) \cdot G(s) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} \right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} b_m m^{-s} \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_n n^{-s} b_m m^{-s} \\ &= \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m (nm)^{-s}. \end{aligned}$$

Mit der Indexsubstitution $m = k/n$ für alle n und m mit $nm = k$ erhält man

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{\infty} a_n b_m (nm)^{-s} &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n \in \mathbb{N},\, n \mid k} a_n b_{k/n} \right) k^{-s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k k^{-s}. \end{aligned}$$

□

(2.2) Bemerkung
Die additive Faltung, die die Multiplikation von Potenzreihen beschreibt, nämlich

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j},$$

wird somit in der Theorie der Dirichlet-Reihen durch die multiplikative Faltung ersetzt. Diese Tatsache ist verantwortlich für die große Bedeutung der Dirichlet-Reihen in der Zahlentheorie.

Für den Fall, dass nicht beide Reihen absolut konvergieren, kann man zum Beispiel zeigen, dass das Produkt mindestens dann konvergiert, wenn beide Reihen konvergieren und eine davon absolut konvergent ist. ◇

(2.3) Definition
Seien $n, l, k \in \mathbb{N}$. Definiere

$$d(n) := |\{ l \in \mathbb{N}; l \text{ teilt } n \}| = \sum_{l \in \mathbb{N},\, l \mid n} 1$$

als die Anzahl der positiven Teiler von n, weiter

$$\tau(n) := \sum_{l\in\mathbb{N},\ l|n} l$$

als die Summe der positiven Teiler von n und allgemeiner

$$\sigma_k(n) := \sum_{l\in\mathbb{N},\ l|n} l^k$$

◇

als die Summe der k-ten Potenzen der positiven Teiler von n für $k \in \mathbb{N}_0$. Damit erhält man $\sigma_1(n) = \tau(n)$ sowie $\sigma_0(n) = d(n)$.

(2.4) Beispiel

a) Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2,$$

denn mit der multiplikativen Faltung folgt

$$\begin{aligned}\zeta(s)^2 &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} (nm)^{-s} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n\in\mathbb{N},\ n|k} 1\right) k^{-s} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d(k)}{k^s}.\end{aligned}$$

b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > k+1$ konvergieren $\zeta(s)$ und $\zeta(s-k)$ absolut. Man darf wieder die multiplikative Faltung anwenden und erhält

$$\begin{aligned}\zeta(s)\cdot\zeta(s-k) &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-(s-k)}\right) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\right) \cdot \left(\sum_{m=1}^{\infty} m^k \cdot m^{-s}\right) \\ &= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{m\in\mathbb{N}, m|l} m^k\right) l^{-s} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(l)}{l^s}.\end{aligned}$$

Damit gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s)\cdot\zeta(s-k) \qquad \text{für alle } k \in \mathbb{N}_0.$$

◇

(2.5) Beispiel
Es gilt
$$\sum_{n\leq N} d(n) = \mathcal{O}(N^{1+\varepsilon}) \qquad \text{für alle } \varepsilon > 0,$$
das heißt es existiert ein $C > 0$, so dass
$$\sum_{n\leq N} d(n) \leq C \cdot N^{1+\varepsilon} \qquad \text{für alle } N \in \mathbb{N}$$
gilt. ◇

Beweis
Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d(n)$ divergiert, gilt für die Konvergenzabszisse σ_0 der Dirichlet-Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s}$ nach [Z] §1 Satz 2
$$\sigma_0 = \limsup_{N\to\infty} \frac{\ln |\sum_{n=1}^{N} d(n)|}{\ln N} = \inf\{\alpha > 0; \sum_{n=1}^{N} d(n) = \mathcal{O}(N^{\alpha})\}.$$
Zeige zunächst, dass $\sigma_0 = 1$ gilt. Für $\sigma = 1 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$ beliebig folgt mit der Gleichung aus Beispiel (2.4)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^{1+\varepsilon}} = \zeta(1+\varepsilon)^2 < \infty,$$
da die Konvergenzabszisse von ζ gleich 1 ist. Aus der Definition der Konvergenzabszisse $\sigma_0 = \inf\{\sigma \in \mathbb{R}\ ; \sum_{n=1}^{\infty} d(n)n^{-\sigma} \text{ konvergiert}\}$ folgt $\sigma_0 \leq 1$. Angenommen es gilt $\sigma_0 < 1$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d(n)/n$ und man erhält
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n} < \infty$$
als Widerspruch dazu, dass ζ in $s = 1$ keine hebbare Singularität besitzt. Damit folgt die Behauptung $\sigma_0 = 1$. Man erhält somit
$$1 = \sigma_0 = \inf\{\alpha > 0; \sum_{n=1}^{N} d(n) = \mathcal{O}(N^{\alpha})\}.$$
Aus der Definition des Infimums folgt nun insbesondere
$$\sum_{n\leq N} d(n) = \mathcal{O}(N^{1+\varepsilon}).$$
□

(2.6) Definition
Eine komplexe Folge $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, die nicht identisch verschwindet, heißt *multiplikativ*, wenn

$$f(m \cdot n) = f(n) \cdot f(m) \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } \operatorname{ggT}(m, n) = 1$$

gilt. Erfüllt die komplexe Folge

$$f(m \cdot n) = f(n) \cdot f(m) \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N},$$

so heißt sie *streng multiplikativ*. ◇

(2.7) Bemerkung

a) Weil für eine multiplikative Folge stets $f(1) = f(1 \cdot 1) = f(1) \cdot f(1) = f(1)^2$ gilt, folgt $f(1) = 1$, denn wäre $f(1) = 0$ so würde

$$f(n) = f(n \cdot 1) = f(n) \cdot f(1) = f(n) \cdot 0 = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten und f damit identisch verschwinden. Dies wäre ein Widerspruch zur Voraussetzung.

b) Man kann jedes $n \in \mathbb{N}$ stets als endliches Produkt von Primzahlen schreiben. Sei also

$$n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{r_j} \qquad \text{mit } p_j \in \mathbb{P} \text{ und } r_j \in \mathbb{N} \text{ für alle } 1 \leq j \leq k,$$

wobei $\mathbb{P}$ die Menge der Primzahlen sei. Ist f multiplikativ, so gilt damit insbesondere

$$f(n) = f\left(\prod_{j=1}^{k} p_j^{r_j}\right) = \prod_{j=1}^{k} f(p_j^{r_j}).$$

◇

(2.8) Beispiel
Die Folge σ_k ist multiplikativ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Seien

$$n = \prod_{j=1}^{J} p_j^{r_j} \qquad \text{und} \qquad m = \prod_{i=1}^{I} q_i^{s_i}$$

mit $p_j, q_i \in \mathbb{P}$, $r_j, s_i \in \mathbb{N}$ sowie $p_j \neq q_i$ für alle $1 \leq j \leq J$ und für alle $1 \leq i \leq I$. Dann ist $\operatorname{ggT}(n, m) = 1$. Es gilt

$$d | nm \Leftrightarrow d = \left(\prod_{j=1}^{J} p_j^{\widetilde{r}_j}\right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{I} q_i^{\widetilde{s}_i}\right)$$

mit $0 \leq \widetilde{r}_j, \widetilde{s}_i \in \mathbb{N}_0$ und $0 \leq \widetilde{r}_j \leq r_j, 0 \leq \widetilde{s}_i \leq s_i$ für alle $1 \leq j \leq J$ und für alle $1 \leq i \leq I$. Weil $\sigma_k(nm)$ eine endliche Summe ist, darf man sie beliebig umordnen, und es folgt

$$\begin{aligned}
\sigma_k(nm) = \sum_{d|nm} d^k &= \sum_{\substack{0\leq \widetilde{r}_j \leq r_j, 0\leq j\leq J \\ 0\leq \widetilde{s}_i\leq s_i, 0\leq i\leq I}} \left(\left(\prod_{j=1}^{J} p_j^{\widetilde{r}_j} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{I} q_i^{\widetilde{s}_i} \right) \right)^k \\
&= \sum_{0\leq \widetilde{r}_j \leq r_j, 0\leq j\leq J} \left(\sum_{0\leq \widetilde{s}_i\leq s_i, 0\leq i\leq I} \left(\prod_{j=1}^{J} p_j^{\widetilde{r}_j k} \right) \cdot \left(\prod_{i=1}^{I} q_i^{\widetilde{s}_i k} \right) \right) \\
&= \sum_{0\leq \widetilde{r}_j \leq r_j, 0\leq j\leq J} \left(\left(\prod_{j=1}^{J} p_j^{\widetilde{r}_j k} \right) \sum_{0\leq \widetilde{s}_i\leq s_i, 0\leq i\leq I} \left(\prod_{i=1}^{I} q_i^{\widetilde{s}_i k} \right) \right) \\
&= \left(\sum_{0\leq \widetilde{s}_i\leq s_i, 0\leq i\leq I} \left(\prod_{i=1}^{I} q_i^{\widetilde{s}_i k} \right) \right) \left(\sum_{0\leq \widetilde{r}_j \leq r_j, 0\leq j\leq J} \left(\prod_{j=1}^{J} p_j^{\widetilde{r}_j k} \right) \right) \\
&= \left(\sum_{0\leq \widetilde{s}_i\leq s_i, 0\leq i\leq I} \left(\prod_{i=1}^{I} q_i^{\widetilde{s}_i} \right)^k \right) \left(\sum_{0\leq \widetilde{r}_j \leq r_j, 0\leq j\leq J} \left(\prod_{j=1}^{J} p_j^{\widetilde{r}_j} \right)^k \right) \\
&= \sigma_k(m)\sigma_k(n) = \sigma_k(n)\sigma_k(m).
\end{aligned}$$

◇

Damit ist σ_k multiplikativ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Mit $k = 0$ und $k = 1$ folgt also auch, dass d und τ multiplikativ sind.

Für den nächsten Satz definieren wir zunächst die Konvergenz von Produkten.

(2.9) Definition
Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen.

a) Man sagt, dass das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ *konvergiert*, wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

   (i) $a_k \neq 0$ für alle $k \geq m$ gilt und

   (ii) die Folge $(\prod_{k=m}^{n} a_k)_{n\geq m}$ gegen einen von 0 verschiedenen Wert in $\mathbb{C}$ konvergiert, den wir mit $\prod_{k=m}^{\infty} a_k$ bezeichnen.

   Wir setzen dann
$$\prod_{k=1}^{\infty} a_k = \left(\prod_{k=1}^{m-1} a_k \right) \cdot \left(\prod_{k=m}^{\infty} a_k \right) \in \mathbb{C}.$$

b) Man sagt, dass das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ *absolut konvergiert*, wenn das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|a_k|)$ konvergiert. ◇

Einen Satz benötigen wir noch , um Dirichlet-Reihen multiplikativer Folgen als Produkt darstellen zu können.

(2.10) Satz
Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen und $1+a_k \neq 0$ für alle $k \geq N$. Dann sind äquivalent:

(i) $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ konvergiert absolut.

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert absolut.

In diesem Fall ist $\prod_{k=1}^{\infty}(1+a_k)$ auch konvergent und jede Umordnung des Produktes konvergiert gegen denselben Wert. ◇

Beweis
A. Krieg, Skript Höhere Funktionentheorie I 2007, Kapitel XXVI Satz (3.6). □

(2.11) Satz
Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ eine Folge, so dass die absolute Konvergenzabszisse σ_1 von $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ endlich ist. Die komplexe Folge f ist genau dann multiplikativ, wenn $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ die für $\mathrm{Re}(s) = \sigma > \sigma_1$ absolut konvergente Produktdarstellung

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right)$$

besitzt. Ein derartiges Produkt nennt man Euler-Produkt der Dirichlet-Reihe. ◇

Beweis
„⇒“ Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{p\in\mathbb{P}} \left| \sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} - 1 \right| &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \left| \sum_{l=1}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right| \leq \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{l=1}^{\infty} \left| f(p^l) \right| \cdot p^{-l\sigma} \\ &= \sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{l=1}^{\infty} \left| f(p^l) \right| \cdot (p^l)^{-\sigma} \leq \sum_{n=2}^{\infty} |f(n)| \cdot n^{-\sigma} < \infty.\end{aligned}$$

Insbesondere ist $(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} - 1)_{p\in\mathbb{P}}$ eine Nullfolge und $(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls})_{p\in\mathbb{P}}$ konvergiert demnach gegen 1. Daher ist die Summe $\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls}$ ab einer gewissen Primzahl stets ungleich Null. Folglich konvergiert das Produkt

$$\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right)$$

nach Satz (2.10) absolut.

Sei f multiplikativ. Definiere

$$P_N := \prod_{\substack{p\leq N \\ p\in\mathbb{P}}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right) \qquad \text{mit } N \in \mathbb{N}.$$

Weiter sei $\{p_1, ..., p_r\} = \{p \in \mathbb{P};\, p \leq N\}$. Da man ein endliches Produkt absolut konvergenter Reihen beliebig umordnen darf, erhält man

$$\begin{aligned} P_N &= \prod_{p\leq N} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right) = \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p_1^l) \cdot p_1^{-ls} \right) \cdot \ldots \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p_r^l) \cdot p_r^{-ls} \right) \\ &= \sum_{l_1,\ldots,l_r\geq 0} f(p_1^{l_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_r^{l_r}) \cdot p_1^{-l_1 s} \cdot \ldots \cdot p_r^{-l_r s} \\ &= \sum_{l_1,\ldots,l_r\geq 0} f(p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r}) \cdot \left(p_1^{l_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{l_r} \right)^{-s} = \sum_{n\in A} f(n) \cdot n^{-s}, \end{aligned}$$

wobei $A := \{n \in \mathbb{N};\, n = \prod_{j=1}^{k} p_j^{\nu_j},\, p_j \in \mathbb{P},\, \nu_j \in \mathbb{N}_0 \text{ mit } p_j \leq N \text{ für alle } j = 1, \ldots, k\}$ ist. Das heißt A besteht aus allen $n \in \mathbb{N}$, deren Primteiler höchstens gleich N sind. Mit der Menge $B := \mathbb{N} \setminus A \subset \{N+1, N+2, \ldots\}$ gilt dann

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \cdot n^{-s} - P_N \right| = \left| \sum_{n\in B} f(n) \cdot n^{-s} \right| \leq \sum_{n\in B} |f(n)| \cdot n^{-\sigma} \leq \sum_{n=N+1}^{\infty} |f(n)| \cdot n^{-\sigma}.$$

Die Reihe $\sum_{n=N+1}^{\infty} |f(n)| \cdot n^{-\sigma}$ konvergiert für $N \to \infty$ gegen 0. Damit folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s} = \lim_{N\to\infty} P_N = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right).$$

„$\Leftarrow$“ Für $N \in \mathbb{N}$ sei $\{p_1, \dots, p_r\} = \{p \in \mathbb{P};\ p \le N\}$. Indem man jedes $n \in \mathbb{N}$ durch seine Primfaktorzerlegung darstellt, erhält man

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) n^{-s} = \sum_{p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r} \le N} f(p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}) \cdot \left(p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}\right)^{-s},$$

sowie

$$\prod_{p \le N} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right) = \sum_{p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r} \le N} f(p_1^{\nu_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_r^{\nu_r}) \cdot \left(p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}\right)^{-s} + \sum_{p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r} > N} f(p_1^{\nu_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_r^{\nu_r}) \cdot \left(p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}\right)^{-s},$$

wenn man wieder beachtet, dass man ein endliches Produkt absolut konvergenter Reihen beliebig umordnen darf. Zusammen mit der Voraussetzung erhält man nun

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{n=1}^{N} f(n) n^{-s} - \prod_{p \le N} \left(\sum_{l=0}^{\infty} f(p^l) \cdot p^{-ls} \right) \right) \\ &= \lim_{N \to \infty} \Bigg(\sum_{p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r} \le N} \left[f(p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}) - f(p_1^{\nu_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_r^{\nu_r}) \right] \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r})^{-s} \\ &\qquad - \sum_{p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r} > N} f(p_1^{\nu_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_r^{\nu_r}) \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r})^{-s} \Bigg). \end{aligned}$$

Da

$$\sum_{p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r} > N} f(p_1^{\nu_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_r^{\nu_r}) \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r})^{-s}$$

für $N \to \infty$ gegen 0 konvergiert, folgt

$$\sum_{r=1}^{\infty} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{N}_0} \left[f(p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r}) - f(p_1^{\nu_1}) \cdot \ldots \cdot f(p_r^{\nu_r}) \right] \cdot (p_1^{\nu_1} \cdot \ldots \cdot p_r^{\nu_r})^{-s} = 0$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) = \sigma > \sigma_1$. Nach dem Satz (1.5) sind alle Koeffizienten 0. Daher ist f multiplikativ. $\square$

(2.12) Beispiel

a) Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Für $\zeta(s)$ sind alle Koeffizienten aus der Darstellung als Dirichlet-Reihe gleich 1. Daher gilt für das Euler-Produkt

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} p^{-ls} \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l \right).$$

Da $|p^{-s}| < 1$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt, konvergiert die geometrische Reihe und man erhält

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l \right) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}.$$

b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > k + 1$. Da σ_k nach Beispiel (2.8) für alle $k \in \mathbb{N}_0$ multiplikativ ist, folgt mit Satz (2.11)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sigma_k(p^l)}{p^{ls}} \right),$$

sowie mit $k = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{d(p^l)}{p^{ls}} \right).$$

◇

(2.13) Bemerkung

Man kann die Aussagen aus Beispiel (2.12) b) auch mit Hilfe von Beispiel (2.4) und Beispiel (2.12) a) zeigen.

a) Sei $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$. Aus Beispiel (2.4) und Beispiel (2.12) a) folgt

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \zeta(s)^2 &= \left(\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} \right)^2 \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\frac{1}{1 - p^{-s}} \right)^2 = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l \right)^2, \end{aligned}$$

wenn man im letzten Schritt die geometrische Reihe einsetzt. Dies ist erlaubt, da $|p^{-s}| < 1$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt. Weil die geometrische Reihe absolut konvergiert, kann man das Cauchy-Produkt anwenden. Aus A. Krieg, Analysis I, 2005, Kapitel IV Beispiel (4.11) b) folgt

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n \qquad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

Da $|p^{-s}| < 1$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ gilt, erhält man

$$\begin{aligned}\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l\right)^2 &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} (l+1)(p^{-s})^l\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{l+1}{p^{ls}}\right) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{d(p^l)}{p^{ls}}\right),\end{aligned}$$

wenn man $d(p^l) = l+1$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $l \in \mathbb{N}_0$ beachtet. Die letzte Aussage gilt, weil für jede Primzahl p

$$q | p^l \Leftrightarrow q = p^i \qquad \text{für } i \in \{0, 1, \ldots, l\}$$

gilt. Somit erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{d(p^l)}{p^{ls}}\right).$$

b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > k+1$. Aus Beispiel (2.4) und Beispiel (2.12) a) folgt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \zeta(s) \cdot \zeta(s-k) &= \left(\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}\right) \cdot \left(\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-(s-k)}}\right) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{1-p^{-s}} \cdot \frac{1}{1-p^{-(s-k)}}\right) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l\right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-(s-k)})^l\right)\right).\end{aligned}$$

Im letzten Schritt wurde wieder die geometrische Reihe verwendet, wobei diese Umformung aufgrund von $|p^{-s}| < 1$ und $|p^{-(s-k)}| < 1$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle

$s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > k+1$ erlaubt ist. Mit derselben Begründung ist das Cauchy-Produkt anwendbar, und es folgt

$$\begin{aligned}
\prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-(s-k)})^l \right) \right) &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\left(\sum_{l=0}^{\infty} (p^{-s})^l \right) \left(\sum_{l=0}^{\infty} p^{kl} (p^{-s})^l \right) \right) \\
&= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{l} p^{ki} \right) (p^{-s})^l \right) \\
&= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \sigma_k(p^l)(p^{-s})^l \right) \\
&= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sigma_k(p^l)}{p^{ls}} \right),
\end{aligned}$$

wenn man noch $\sigma_k(p^l) = \sum_{i=0}^{l} p^{ki}$ für alle $p \in \mathbb{P}$ und für alle $l \in \mathbb{N}_0$ beachtet. Damit erhält man

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_k(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\sigma_k(p^l)}{p^{ls}} \right).$$

◇