Dirichlet - Reihen III

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 07.01.2008

Sophia Dahmen

In diesem Vortrag geht es darum, einige Dirichlet-Reihen mit multiplikativen Koeffizienten kennen zu lernen und den Zusammenhang zwischen verschiedenen Koeffizienten und den zugehörigen Reihen näher zu untersuchen.

§ 1 Die Möbiussche Umkehrformel

Ein Zusammenhang zwischen den Koeffizienten zweier Dirichlet-Reihen kann beispielsweise durch die Möbiussche Umkehrformel gegeben sein. Daher definieren und untersuchen wir nun zunächst die Möbiussche Funktion, um mit ihrer Hilfe dann die Möbiussche Umkehrformel zu erhalten.

(1.1) Definition
Die Funktion

$$\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{C},$$

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ 0, & \text{falls die Primfaktorzerlegung von } n \text{ ein Quadrat enthält,} \\ (-1)^k, & \text{falls } n \text{ in } k \text{ paarweise verschiedene Primfaktoren zerfällt,} \end{cases}$$

nennt man *Möbiussche Funktion*. ◇

(1.2) Lemma
Die Möbiussche Funktion ist multiplikativ. ◇

Beweis
Seien $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(m, n) = 1$.

1. Fall: Die Zahlen m und n zerfallen in paarweise verschiedene Primfaktoren, also

$$\begin{aligned} m &= p_{m,1} \cdot \ldots \cdot p_{m,i} \quad &\text{mit} \quad & p_{m,1} < p_{m,2} \ldots < p_{m,i} \in \mathbb{P}, \\ n &= p_{n,1} \cdot \ldots \cdot p_{n,j} \quad &\text{mit} \quad & p_{n,1} < p_{n,2} \ldots < p_{n,j} \in \mathbb{P}. \end{aligned}$$

Dann gilt

$$\mu(n \cdot m) = \mu(\underbrace{p_{m,1} \cdot \ldots \cdot p_{m,i} \cdot p_{n,1} \cdot \ldots \cdot p_{n,j}}_{\text{paarweise verschieden da ggT}(m,n)=1}) = (-1)^{i+j} = (-1)^i \cdot (-1)^j = \mu(m) \cdot \mu(n).$$

2. Fall: Mindestens eine der Zahlen m und n enthält ein Quadrat. In diesem Fall enthält auch $n \cdot m$ ein Quadrat und es gilt

$$\mu(m \cdot n) = 0 = \mu(m) \cdot \mu(n).$$

Da $\mu(1) = 1$ gilt, ist die Funktion nicht identisch 0. Somit ist sie nach Fall 1 und 2 multiplikativ. □

Mit Hilfe der Möbiusschen Funktion lässt sich der Kehrwert der Zetafunktion als Dirichlet-Reihe mit einer multiplikativen Koeffizientenfolge darstellen.

(1.3) Beispiel
Wir betrachten die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s}$. Die Konvergenzabszisse dieser Reihe lässt sich mit Hilfe von [Z] § 1 Satz 2 wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{b}} &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\log\left|\sum_{n=1}^{N} \mu(n)\right|}{\log N} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{N} |\mu(n)|}{\log N} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{N} 1}{\log N} \\ &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\log N}{\log N} = 1.\end{aligned}$$

Wir zeigen nun, dass die absolute Konvergenzabszisse der Reihe genau in 1 liegt, indem wir nachweisen, dass die Reihe an der Stelle 1 nicht absolut konvergent ist. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\mu(n)|}{n} \geq \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{|\mu(p)|}{p} = \sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}.$$

Wenn wir nun zeigen, dass die Reihe $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}$ nicht konvergent ist, haben wir eine divergente Minorante gefunden und es folgt die Behauptung. Dazu nehmen wir an, diese Hilfsreihe sei konvergent und definieren p_1, $p_2, \ldots$ als Auflistung aller Primzahlen der Größe nach. Dann existiert ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_m} < \frac{1}{2}.$$

Wir definieren nun $Q = p_1 \cdot \ldots \cdot p_k$. Für die Folge $1 + nQ$ mit $n \in \mathbb{N}$ gilt nun, dass keines der Folgenglieder durch eine der Primzahlen $p_1, \ldots, p_k$ teilbar ist, da ja jedes

$p_1, \dots, p_k$ die Zahl nQ teilt. Daher sind alle Primfaktoren von $1 + nQ$ größer als p_k. Es gibt also zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine endliche Menge $J \subset \{k+1, k+2 \dots\}$, so dass man die Darstellung

$$\frac{1}{1+nQ} = \frac{1}{\prod_{j \in J} p_j^{r_j}}$$

erhält. Die rechte Seite ist einer der Summanden, die entstehen, wenn man das Produkt

$$\Big(\frac{1}{p_{k+1}} + \frac{1}{p_{k+2}} + \frac{1}{p_{k+3}} + \dots\Big)^t$$

ausmultipliziert. Hierbei ist $t = \sum_{j \in J} r_j$. Es gilt nun

$$\sum_{n=1}^{r} \frac{1}{1+nQ} \le \sum_{t=1}^{\infty} \Big(\sum_{m=k+1}^{\infty} \frac{1}{p_m} \Big)^t \le \sum_{t=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{2}\Big)^t = 2,$$

da nach obiger Überlegung jeder Summand der linken Seite in der mittleren Summe enthalten ist. Im vorletzten Schritt wurde die Abschätzung von weiter oben verwendet und mit Hilfe der geometrischen Summenformel ausgewertet. Nun folgt also aus der Konvergenz von $\sum_{p \in \mathbb{P}} 1/p$ die Konvergenz von $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(1+nQ)$. Dies ist ein Widerspruch zur Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(1+nQ)$, welche sich aus der Divergenz der Minorante $(Q+1)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} 1/n$ ergibt. Insgesamt folgt somit die Divergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(|\mu(n)| / n)$ und daher hat diese Reihe ihre absolute Konvergenzabszisse in 1.

Wir können nun für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ die Eulersche Produktentwicklung betrachten und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \Big(1 + \frac{\mu(p)}{p^s} + \frac{\mu(p^2)}{p^{2s}} + \dots\Big) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \Big(1 + \frac{-1}{p^s}\Big) = \frac{1}{\frac{1}{\prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - p^{-s}\right)}} = \frac{1}{\zeta(s)},$$

wobei die Produktdarstellung der Zetafunktion verwendet wurde, sowie $\mu(p) = -1$ und $\mu(p^r) = 0$ für $r > 1$. $\diamond$

Dieses Ergebnis ist hilfreich beim Beweis von

(1.4) Lemma
Für die Möbiussche Funktion μ gilt

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 1, \\ 0, & \text{falls } n > 1. \end{cases}$$

$\diamond$

Beweis
Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_1 = 1$ und $a_n = 0$ für alle $n > 1$. Mit Hilfe der Faltungsformel aus [Z] § 2 ((1)–(3)) gilt für $s \in \mathbb{C}$ mit Re $s > 1$ die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = 1 = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot \zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big)\Big) \cdot n^{-s}$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\sum_{d|n} \mu(d)\Big) \cdot n^{-s}.$$

Auf Grund der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer absolut konvergenten Dirichlet-Reihe folgt $\sum_{d|n} \mu(d) = a_n$, was zu zeigen war. □

(1.5) Satz (Möbiussche Umkehrformel)
Seien f und g zwei Funktionen von $\mathbb{N}$ nach $\mathbb{C}$. Gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$f(n) = \sum_{d|n} g(d),$$

so gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ ebenfalls

$$g(n) = \sum_{d|n} \mu\Big(\frac{n}{d}\Big) f(d)$$

und umgekeht. Wenn f und g in dieser Beziehung zueinander stehen, so ist g multiplikativ genau dann, wenn f multiplikativ ist. ◇

Beweis
Wir beweisen zunächst den ersten Teil des Satzes. Zur Verdeutlichung setzt man erst einmal Werte für n in f ein und erhält so die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
&f(1) = g(1) && \Rightarrow\ g(1) = f(1)\\
&f(2) = g(1) + g(2) && \Rightarrow\ g(2) = f(2) - f(1)\\
&f(3) = g(1) + g(3) && \Rightarrow\ g(3) = f(3) - f(1)\\
&f(4) = g(1) + g(2) + g(4) && \Rightarrow\ g(4) = f(4) - f(2)\\
&\dots
\end{aligned}$$

Man sieht nun, dass eine Darstellung von g in der Form $g(n) = \sum_{d|n} a_{n,d} f(d)$ existiert, wobei die Koeffizienten $a_{n,d}$ unabhängig von f und g sind. Ziel ist es nun, diese $a_{n,d}$ genauer zu bestimmen.

Dazu wählt man ein $n_0 \in \mathbb{N}$ beliebig aus und setzt $g(n) = 0$ für alle $n > n_0$. Dann ist die Reihe

$$G(s) = \sum_{n=1}^{n_0} \frac{g(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$$

absolut konvergent für alle $s \in \mathbb{C}$. Weiterhin setzt man

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}.$$

Für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ gilt mit der Faltungsformel

$$\zeta(s) \cdot G(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \cdot \sum_{d|n} g(d).$$

Aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer Dirichlet-Reihe folgt nun

$$\begin{aligned}
&\sum_{d|n} g(d) && = f(n) \qquad \forall n \in \mathbb{N} \\
\Leftrightarrow\ & \zeta(s) \cdot G(m) = F(s) && \\
\Leftrightarrow\ & G(s) && = \frac{1}{\zeta(s)} \cdot F(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k^s} \cdot \sum_{m=1}^{\infty} \frac{f(m)}{m^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \cdot \frac{1}{n^s} \\
\Leftrightarrow\ & g(n) && = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) \qquad \forall n \in \mathbb{N},
\end{aligned}$$

wobei die letzte Äquivalenz aus der Eindeutigkeit der Koeffizienten einer konvergenten Dirichlet-Reihe folgt. Da n_0 beliebig gewählt war, gilt die Äquivalenz für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zum zweiten Teil des Satzes:

„ $\Rightarrow$“ Sei g multiplikativ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(n, m) = 1$. Dann gilt

$$f(n) \cdot f(m) = \sum_{e|m} g(e) \cdot \sum_{c|n} g(c) = \sum_{ec|nm} g(e) \cdot g(c) = \sum_{ec|nm} g(ec) = \sum_{d|nm} g(d) = f(nm).$$

„ ⇐" Sei f multiplikativ und $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(n, m) = 1$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g(n) \cdot g(m) &= \sum_{c|n} \mu\left(\frac{n}{c}\right) f(c) \cdot \sum_{e|m} \mu\left(\frac{m}{e}\right) f(e) = \sum_{c|n, e|m} \mu\left(\frac{m}{e}\right) \mu\left(\frac{n}{c}\right) f(e) f(c) \\ &= \sum_{ce|nm} \mu\left(\frac{mn}{ec}\right) f(ec) = \sum_{d|nm} \mu\left(\frac{mn}{d}\right) f(d) = g(nm). \end{aligned}$$

□

(1.6) Bemerkung
Die Äquivalenz aus (1.5) lässt sich auch mit Hilfe von (1.4) zeigen.

„ ⇒" Sei $f(n) = \sum_{d|n} g(d) = \sum_{d|n} g(n/d)$. Dann folgt in dem man $ed \mid n$ durch $d \mid m, m \mid n$ ersetzt

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) f(d) &= \sum_{d|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{e|n/d} g\left(\frac{n}{de}\right) = \sum_{d|n} \mu(d) \sum_{ed|n} g\left(\frac{n}{de}\right) \\ &= \sum_{d|n, d|m} \mu(d) \sum_{m|n} g\left(\frac{n}{m}\right) = \sum_{m|n} g\left(\frac{n}{m}\right) \sum_{d|m} \mu(d) = g(n). \end{aligned}$$

„ ⇐" Sei $g(n) = \sum_{d|n} \mu(\frac{n}{d}) f(d) = \sum_{d|n} \mu(d) f(\frac{n}{d})$. Nun zeigt man analog

$$\begin{aligned} \sum_{d|n} g(d) &= \sum_{d|n} g\left(\frac{n}{d}\right) = \sum_{d|n} \sum_{e|n/d} \mu(e) f\left(\frac{n}{de}\right) = \sum_{d|n} \sum_{ed|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{de}\right) = \sum_{d|n} \sum_{d|m|n} \mu(d) f\left(\frac{n}{m}\right) \\ &= \sum_{m|n} f\left(\frac{n}{m}\right) \sum_{d|m} \mu(d) = f(n). \end{aligned}$$

Ein Sonderfall des zweiten Teils von (1.5) liegt vor, wenn die Reihe $G(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g(n)}{n^s}$ absolut konvergent ist. In diesem Fall lässt sich die Aussage mit Hilfe von [Z] § 2 Satz 1 beweisen. Dann gilt:

$$\begin{aligned} g \text{ ist multiplikativ} &\Leftrightarrow G(s) \text{ besitzt eine Eulersche Produktentwicklung} \\ &\Leftrightarrow F(s) = \zeta(s) G(s) \text{ besitzt eine Eulersche Produktentwicklung} \\ &\Leftrightarrow f \text{ ist multiplikativ} \end{aligned}$$

◇

§2 Beispiele zu Dirichlet-Reihen mit multiplikativen Koeffizienten

Wir definieren zu Beginn einige zahlentheoretische Funktionen. Das sind Funktionen mit Definitionsmenge $\mathbb{N}$ und Werten in einer Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(2.1) Definition

a) Die Funktion $\nu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bildet n auf die Anzahl der Primteiler von n ab, wobei die Primteiler mit Vielfacheit gezählt werden. Weiter definieren wir $\lambda(n) = (-1)^{\nu(n)}$.

b) Die Funktion $\omega : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ bildet n ab auf die Anzahl der verschiedenen Primteiler von n.

c) Die Funktion $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}\,, n \mapsto n \prod_{p|n}(1 - 1/p)$ heißt *Eulersche Funktion*.

d) Wir definieren $r(n) = \#\{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 \mid a^2 + b^2 = n\}$ als die Anzahl der Möglichkeiten, eine natürliche Zahl n als Summe von zwei Quadraten darzustellen.

e) Die Funktion χ auf den natürlichen Zahlen sei definiert durch

$$\chi(n) = \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv 1 \pmod 4, \\ -1, & \text{falls } n \equiv -1 \pmod 4, \\ 0, & \text{falls } n \equiv 0 \pmod 2. \end{cases}$$

f) Wir führen nun noch eine Bezeichnung ein:

$$L(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \frac{1}{9^s} - \dots$$

◇

Der Beweis des folgenden Satzes ist sehr aufwendig und setzt die Kenntnis der Theorie zur Darstellung einer Zahl als Summe von zwei Quadraten voraus. Aus diesem Grund wird er hier ausgelassen. Nachzulesen ist er in Hardy/Wright: „An Introduction to the Theory of Numbers“.

(2.2) Satz

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{1}{4} r(n) = \sum_{d|n} \chi(d).$$

◇

(2.3) Lemma
Die Funktionen φ, λ, 2^{ω}, χ und $\frac{1}{4}r$ sind multiplikativ. ◇

Beweis
Seien $n, m \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(n,m) = 1$. Die Funktionen φ, λ, $2^{\omega(n)}$, $\frac{1}{4}r$ und χ sind alle nicht identisch Null und es gilt

$$\varphi(nm) = nm \prod_{p|nm}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) = m\prod_{p|m}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) \cdot n\prod_{p|n}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big) = \varphi(n)\varphi(m),$$
$$\lambda(nm) = (-1)^{\nu(nm)} = (-1)^{\nu(n)\nu(m)} = (-1)^{\nu(n)} \cdot (-1)^{\nu(m)} = \lambda(n)\lambda(m),$$
$$2^{\omega(nm)} = 2^{\omega(n)+\omega(n)} = 2^{\omega(n)} \cdot 2^{\omega(m)}.$$

Die Multiplikativität der Funktion χ folgt aus der Definition der Multiplikation auf Restklassen. Die Funktion $\frac{1}{4}r$ ist multiplikativ, da die beiden Funktionen $\frac{1}{4}r$ und χ nach (2.2) in der in (1.5) verlangten Relation stehen und χ multiplikativ ist. □

Nun zeigen wir, dass die hier vorliegende Definition der φ-Funktion äquivalent ist zur bereits aus der linearen Algebra bekannten Darstellung.

(2.4) Lemma
Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\varphi(n) = \#\{d \in \mathbb{N}; d \leq n, \mathrm{ggT}(d,n) = 1\}$$

und des Weiteren

$$\sum_{d|n} \varphi(d) = n.$$

◇

Beweis
Wir wollen zunächst die erste Aussage beweisen. Dazu verwenden wir die Notation $f(n) = \#\{d \in \mathbb{N}; d \leq n, \mathrm{ggT}(d,n) = 1\}$. Die hier neu angeführte Darstellung f ist ebenfalls multiplikativ. Es gilt nämlich für teilerfremde $n, m \in \mathbb{N}$, dass $f(n \cdot m)$ genau der Anzahl von Möglichkeiten entspricht, eine Zahl, die kleiner als m und teilerfremd zu m ist, mit einer Zahl, die kleiner n und teilerfremd zu n ist, zu multiplizieren. Dies gilt, da ja m und n nach Vorraussetztung teilerfremd sind. Man erhält also

$$f(n \cdot m) = f(n)f(m).$$

Daher genügt es zu zeigen, dass für alle p^r mit $p \in \mathbb{P}$ und $r \in \mathbb{N}$ gilt

$$f(p^r) = \#\{d \in \mathbb{N}; d \leq p^r, \mathrm{ggT}(d, p^r) = 1\} = p^r - p^{r-1} = p^r(1 - 1/p) = \varphi(p^r).$$

Dabei wurde verwendet, dass unter den Zahlen $1, \dots, p^r$ genau jede p-te durch p teilbar und somit nicht teilerfremdzu p^r ist.

Nun zur zweiten Aussage. Wir definieren $M_d = \{m \in \{1, \dots, n\}\,; \mathrm{ggT}(m,n) = d\}$. Aus $\mathrm{ggT}(m,n) = d$ folgt, dass $\mathrm{ggT}(m/d, n/d) = 1$ ist. Nun setzt man $q = m/d$ und erhält, dass die Mächtigkeit von M_d der Anzahl der Zahlen q entspricht, die kleiner als n/d sind und dazu teilerfremd. Es folgt somit $\# M_d = \varphi(n/d)$. Jetzt betrachtet man

$$n = \#\{1, 2 \dots n\} = \# \bigcup_{d|n} M_d = \sum_{d|n} \varphi(n/d) = \sum_{d|n} \varphi(d).$$

Es handelt sich hier um eine disjunkte Vereinigung von M_d, da jedes $m \in \{1, \dots, n\}$ genau in eine dieser Mengen M_d vorkommt, nämlich in derjenigen mit $d = \mathrm{ggT}(m,n)$. Damit gilt also die obige Behauptung. □

In der folgenden Tabelle sind einige Dirichlet-Reihen mit multiplikativen Koeffizienten und deren absolute Konvergenzabszissen aufgeführt:

Nr.	$f(n)$	$\sum f(n) n^{-s}$	σ_{a}
1	1	$\zeta(s)$	1
2	$\mu(n)$	$1/\zeta(s)$	1
3	$d(n)$	$\zeta(s)^2$	1
4	$\tau(n)$	$\zeta(s)\zeta(s-1)$	2
5	$\sigma_k(n)$	$\zeta(s)\zeta(s-k)$	$k+1$
6	$\lambda(n)$	$\zeta(2s)/\zeta(s)$	
7	$\sum_{d\|n} \lambda(d)$	$\zeta(2s)$	
8	$\chi(n)$	$L(s)$	
9	$\frac{1}{4} r(n)$	$\zeta(s) L(s)$	
10	$\varphi(n)$	$\zeta(s-1)/\zeta(s)$	2
11	$2^{\omega(n)}$	$\zeta(s)^2/\zeta(2s)$	
12	$\mu(n)^2$	$\zeta(s)/\zeta(2s)$	
13	$d(n^2)$	$\zeta(s)^3/\zeta(2s)$	
14	$\sigma_k(n)\sigma_l(n)$	$\zeta(s)\zeta(s-k)\zeta(s-l)\zeta(s-k-l)/\zeta(2s-k-l)$	
15	$d(n)^2$	$\zeta(s)^4/\zeta(2s)$	

Die **Darstellungen 1 bis 5** wurden bereits gezeigt.

Zu den Darstellungen 3 bis 5 berechnen wir nun noch die absoluten Konvergenzabszissen.

Im vorherigen Vortrag wurde mit Hilfe der Faltungsformel nachgewiesen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} d(n)/n^s$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > 1$ konvergiert. Nun gilt mit [Z] § 1 Satz 2, da $\sum d(n)$ divergent ist,

$$\sigma_{\mathrm{b}} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log \left|\sum_{n=1}^{N} d(n)\right|}{\log N} \geq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{N} 1}{\log N} = \limsup_{N\to\infty} \frac{\log N}{\log N} = 1.$$

Damit folgt also, dass die Reihe die Konvergenzabszisse $\sigma_{\mathrm{b}} = 1$ hat.

Nun zur Konvergenzabszisse der Darstellung 5. Es wurde bereits gezeigt, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \sigma_k(n)/n^s$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} s > k+1$ konvergiert. Es gilt mit [Z] § 1 Satz 2, da $\sum \sigma_k(n)$ divergent ist,

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{b}} &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\log \left|\sum_{n=1}^{N} \sigma_k(n)\right|}{\log N} \geq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{N} n^k}{\log N} \geq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log\left(\frac{N^{k+1}}{k+1}\right)}{\log N} \\ &= \limsup_{N\to\infty} \left((k+1)\frac{\log N}{\log N} - \frac{\log(k+1)}{\log N} \right) = k+1.\end{aligned}$$

Dabei verwendet man die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{N} n^k \geq \int_0^N x^k \,\mathrm{d}x = \frac{1}{k+1} N^{k+1}.$$

Die Konvergenzabszisse der Reihe liegt also bei $k+1$.

Da $\tau(n) = \sigma_1(n)$, hat die Reihe 4 ihre Konvergenzabszisse in 2 und Reihe 3 in 1.

Wir betrachten nun die **Darstellung 6** genauer. Die Konvergenzabszisse dieser Reihe lässt sich wie folgt abschätzen:

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{b}} &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\log \left|\sum_{n=1}^{N} \lambda(n)\right|}{\log N} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{N} |\lambda(n)|}{\log N} \leq \limsup_{N\to\infty} \frac{\log \sum_{n=1}^{N} 1}{\log N} \\ &= \limsup_{N\to\infty} \frac{\log N}{\log N} = 1.\end{aligned}$$

Es gilt, da die Reihe somit für $\operatorname{Re}(s) > 1$ absolut konvergent ist, mit [Z] § 2 Satz 1 und der Formel für geometrische Reihen

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n^s} &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{\lambda(p^2)}{p^{2s}} + \ldots\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s} + \frac{1}{p^{2s}} - \ldots\right) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{p^s}\right)^r = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\frac{1}{1+p^{-s}}\right) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(\frac{1-p^{-s}}{1-p^{-2s}}\right) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)},\end{aligned}$$

indem man im letzten Schritt das bereits bekannten Eulerprodukt für ζ verwendet.

Als Nächstes leiten wir die **Darstellung 7** her. Auf Grund der Darstellung 6 erhalten wir mit Hilfe der Faltungsformel

$$\zeta(2s) = \frac{\zeta(2s)}{\zeta(s)}\zeta(s) = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda(k)k^{-s}\Big)\Big(\sum_{m=1}^{\infty} m^{-s}\Big) = \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n}\lambda(d)\Big)n^{-s}.$$

Die **Darstellung 8** gilt nach (2.1).

Die **Darstellung 9** erhält man auf Grund von (2.2), der Darstellung 8 und der Faltungsformel auf dem absoluten Konvergenzbereich der Reihe:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\frac{1}{4}r(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\sum_{d|n}\chi(d) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi(n)}{n^s} = \zeta(s)L(s).$$

Nun betrachten wir die **Darstellung 10**. Aus der Definition von $\varphi(n)$ folgt, dass $\varphi(n) \le n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Auf Grund der Abschätzung

$$\begin{aligned}\sigma_{\mathrm{b}} &= \limsup_{N\to\infty}\frac{\log\left|\sum_{n=1}^{N}\varphi(n)\right|}{\log N} = \limsup_{N\to\infty}\frac{\log\sum_{n=1}^{N}|\varphi(n)|}{\log N} \le \limsup_{N\to\infty}\frac{\log\sum_{n=1}^{N} n}{\log N}\\ &= \limsup_{N\to\infty}\frac{\log(N(N+1)/2}{\log N} = \limsup_{N\to\infty}\Big(\frac{\log N}{\log N} + \frac{\log(N+1)}{\log N} - \frac{\log 2}{\log N}\Big) = 2\end{aligned}$$

ist die Reihe für $\mathrm{Re}(s) > 2$ absolut konvergent. [Z] § 2 Satz 1 ist anwendbar, da weiterhin $\varphi(n)$ multiplikativ ist. Es gilt also mit der Formel zur geometrischen Reihe und da $\varphi(p^r) = p^r(1-1/p)$ für $r \ge 1$ ist

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi(n)}{n^s} &= \prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(1 + \frac{\varphi(p)}{p^s} + \frac{\varphi(p^2)}{p^{2s}} + \frac{\varphi(p^3)}{p^{3s}} + \ldots\Big) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty}\frac{\varphi(p^r)}{p^{rs}}\Big)\\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\varphi(p^r)}{p^{rs}}\Big) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(\sum_{r=0}^{\infty}\frac{p^r(1-1/p)}{p^{rs}} + \frac{1}{p}\Big)\\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}}\Big((1-1/p)\sum_{r=0}^{\infty}(p^{-(s-1)})^r + \frac{1}{p}\Big) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\Big(\frac{1-1/p}{1-p^{-(s-1)}} + \frac{1}{p}\Big)\\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{p-p^{-(s-1)}}{(1-p^{-(s-1)})p} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\frac{1-p^{-s}}{1-p^{-(s-1)}} = \frac{\prod_{p\in\mathbb{P}}(1-p^{-s})}{\prod_{p\in\mathbb{P}}1-p^{-(s-1)}} = \frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}.\end{aligned}$$

Man kann diese Identität auch leicht mit Hilfe von (2.4) und der Faltungsformel zeigen. Es gilt nämlich

$$\zeta(s) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi(n)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sum_{d|n} \varphi(d)}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^s} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{s-1}} = \zeta(s-1).$$

Nimmt man an, dass die Reihe eine Konvergenzabszisse $\sigma_{\mathrm{b}} < 2$ hat, so folgt, dass ein $\varepsilon > 0$ existiert, sodass die Reihe für $s = 2 - \varepsilon$ absolut konvergent ist, da hier $\sigma_{\mathrm{b}} = \sigma_{\mathrm{a}}$ gilt. Dann sind aber in der oberen Rechnung beide Reihen auf der linken Seite absolut konvergent in einer Umgebung von 2. Daraus folgt nach [Z] § 2 Seite 9, dass auch die rechte Seite absolut konvergent in einer Umgebung von 2 ist. Man erhält nun aber einen Widerspruch, da die Zetafunktion in 1 nicht absolut konvergent ist. Somit divergiert die hier betrachtete Reihe in 2 und hat daher die Konvergenzabszisse 2.

Nun zur **Darstellung 11**. Auf Grund der Definition erhält man für alle $p \in \mathbb{P}$ die Gleichung $2^{\omega(p)} = 2$. Unter Verwendung der Eulerschen Produktdarstellung gilt auf dem absoluten Konvergenzgebiet der Reihe

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{\omega(n)}}{n^s} &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(1 + \frac{2^{\omega(p)}}{p^s} + \frac{2^{\omega(p^2)}}{p^{2s}} + \frac{2^{\omega(p^3)}}{p^{3s}} + \ldots\Big) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{2}{p^{rs}}\Big) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(-1 + 2\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}}\Big) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(\frac{2}{1-p^{-s}} - 1\Big) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(\frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}}\Big) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(\frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^2}\Big) = \frac{\zeta(s)^2}{\zeta(2s)}.\end{aligned}$$

Darstellung 12 zeigt man wieder mit Hilfe der Eulerschen Produktentwicklung. Weiterhin wird verwendet, dass $\mu(p)^2 = (-1)^2 = 1$ ist und für $r > 1$ stets $\mu(p^r)^2 = 0$ gilt. Daher erhält man

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)^2}{n^s} &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(1 + \frac{\mu(p)^2}{p^s} + \frac{\mu(p^2)^2}{p^{2s}} + \frac{\mu(p^3)^2}{p^{3s}} + \ldots\Big) \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(1 + \frac{1}{p^s}\Big) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(1 - p^{-2s}\Big) \cdot \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(\frac{1}{1-p^{-s}}\Big) = \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)}.\end{aligned}$$

Wir wollen nun **Darstellung 13** nachweisen. Mit [K] Analysis I Kapitel IV Beispiel 4.11 b) gilt

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{2r}{p^{rs}} = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2r+2}{p^{rs}} - \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2}{p^{rs}} = 2\sum_{r=0}^{\infty} \frac{r+1}{p^{rs}} - 2\sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{p^{rs}}$$
$$= \frac{2}{(1-p^{-s})^2} - \frac{2}{1-p^{-s}} = \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2}.$$

Aus $d(p^{2r}) = 2r+1$ und der Eulerschen Produktentwicklung folgt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d(n^2)}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(1 + \frac{d(p^2)}{p^s} + \frac{d(p^4)}{p^{2s}} + \frac{d(p^6)}{p^{3s}} \dots\Big) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2r+1}{p^{rs}}$$
$$= \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(\frac{1}{1-p^{-s}} + \sum_{r=0}^{\infty} \frac{2r}{p^{rs}}\Big) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \Big(\frac{1}{1-p^{-s}} + \frac{2p^{-s}}{(1-p^{-s})^2}\Big)$$
$$= \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1+p^{-s}}{(1-p^{-s})^2} = \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1-p^{-2s}}{(1-p^{-s})^3} = \frac{\zeta(s)^3}{\zeta(2s)}$$

auf dem absoluten Konvergenzbereich der Reihe.

Die **Darstellung 14** wird hier nicht nachgewiesen, aber man sieht, dass aus ihr mit $l = 0$ und $k = 0$ dann sofort die **Darstellung 15** folgt.

Literatur

[Z] D. B. Zagier: Zetafunktionen und quadratische Körper, Springer 1981

[K] A. Krieg: Skripte zur Analysis I–IV 2005–2007