Die Gammafunktion

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 14.01.2008

Miriam Tamm

In diesem Vortrag werden wir uns mit der Gammafunktion beschäftigen. Sie ist eine der wichtigsten mathematischen Funktionen und eine der einfachsten von den nichtelementaren Funktionen. Außerdem spielt sie eine wesentliche Rolle bei der Untersuchung von Dirichletschen Reihen.

Ziel des ersten Abschnittes ist es, die Gammafunktion als meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ zu definieren. Im zweiten Abschnitt werden wir weitere Eigenschaften herleiten und unter Verwendung der Eulerschen Integraldarstellung der Gammafunktion die Mellinsche Transformation herleiten.

Im Folgenden werden wir hier die komplexe Veränderliche mit s und ihren Real- und Imaginärteil mit σ beziehungsweise t bezeichen.

§1 Motivation und Definition der Gammafunktion

Zunächst werden wir die Gammafunktion motivieren und sie als meromorphe Funktion auf $\mathbb{C}$ definieren.

Die Idee ist, dass man eine Interpolationsfunktion für die Funktion $n \mapsto n!$ sucht, das heißt eine stetige Funktion Π, so dass $\Pi(n) = n!$ für alle natürliche Zahlen ist. Auf Grund eines historischen Umstandes betrachten man aber nun die Substitution $x = s - 1$ und schreibt $\Gamma(s)$ für $\Pi(x) = \Pi(s-1)$.

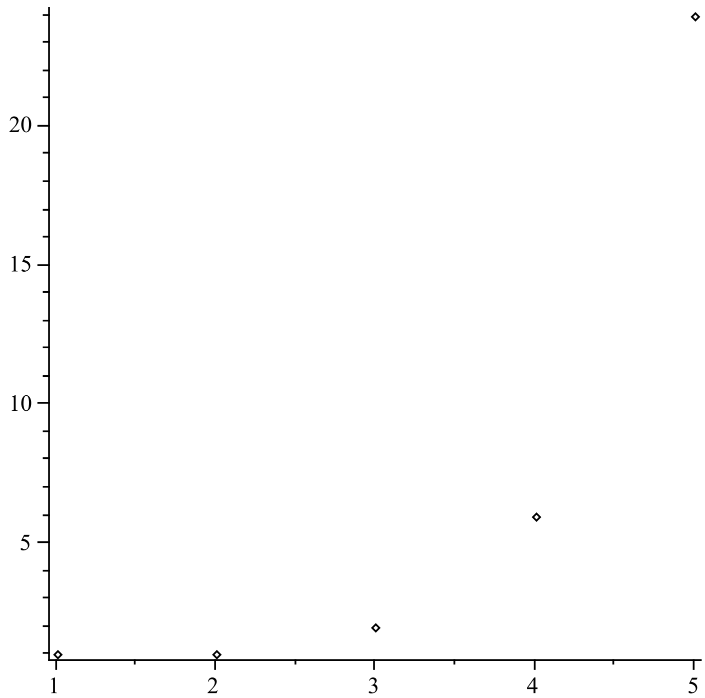
Gesucht wird also eine stetige Funktion Γ, die

$$\Gamma(n) = (n-1)! \qquad \text{für alle}\, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

erfüllt und außerdem die Grundeigenschaft $n! = n \cdot (n-1)!$ der Fakultät besitzt:

$$\Gamma(s+1) = s \cdot \Gamma(s) \qquad \text{für alle}\, s \neq 0. \tag{2}$$

Es ist also eine Funktion gesucht, die für s klein durch folgende Punkte läuft:



Durch wiederholte Anwendung von (2) erhalten wir für $N \in \mathbb{N}$ die Gleichung

$$\Gamma(s+N) = s \cdot (s+1) \cdot \ldots \cdot (s+N-1) \cdot \Gamma(s). \tag{3}$$

Es reicht nun also eine asymptotische Formel für $\Gamma(s+N)$ mit $N \to \infty$ anzugeben. Für $s \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \Gamma(s+N) &\overset{(1)}{=} (N+s-1)! = (N+s-1) \cdot (N+s-2) \cdot \ldots \cdot (N+1) \cdot N \cdot (N-1)! \\ &= N^s \cdot \left(1 + \frac{s-1}{N}\right) \cdot \left(1 + \frac{s-2}{N}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + \frac{1}{N}\right) \cdot (N-1)!. \end{aligned}$$

Das Obige liefert nun

$$\Gamma(s+N) \sim N^s \cdot (N-1)! \qquad \text{für } N \to \infty,$$

das heißt, dass

$$\lim_{N \to \infty} \frac{\Gamma(s+N)}{N^s \cdot (N-1)!} = 1$$

gilt.

Es ist daher naheliegend, $\Gamma(s)$ unter Verwendung von (3) auch für alle $s \in \mathbb{C}$ durch

$$\Gamma(s) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^s \cdot (N-1)!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+N-1)} \tag{4}$$

zu definieren, falls der Grenzwert existiert.

Für den Beweis des nun folgenden Satzes benötigen wir

(1.1) Lemma
Sei $N_0 \in \mathbb{N}$ und $(a_N)_{N\geq 1}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $1 + a_N \neq 0$ für $N \geq N_0$. Dann sind äquivalent:

(i) $\prod\limits_{N=1}^{\infty} (1 + a_N)$ konvergiert absolut.

(ii) $\sum\limits_{N=1}^{\infty} a_N$ konvergiert absolut.

In diesem Fall ist $\prod\limits_{N=1}^{\infty} (1 + a_N)$ auch konvergent. $\diamond$

Beweis
[Kr] XXVI(3.6) $\square$

Damit kommen wir nun zu

(1.2) Satz

(i) Der Grenzwert von

$$\Gamma_N(s) := \frac{N^s \cdot (N-1)!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+N-1)}$$

für $N \to \infty$ existiert für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$.

(ii) Es gilt die Eulersche Produktdarstellung

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s}\prod_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1+\frac{s}{n}} \qquad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0).$$

(iii) Die durch (4) definierte Funktion Γ erfüllt die geforderten Eigenschaften

$$\begin{aligned} \Gamma(n) &= (n-1)! \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und} \\ \Gamma(s+1) &= s\cdot\Gamma(s) \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0). \end{aligned}$$

$\diamond$

Beweis

(i) Es gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_{N+1}(s)}{\Gamma_N(s)} &= \frac{(N+1)^s \cdot N!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+N)} \cdot \frac{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+N-1)}{N^s\cdot(N-1)!} \\ &= \left(\frac{N+1}{N}\right)^s \cdot \frac{N}{s+N} \\ &= \left(1+\frac{1}{N}\right)^s \cdot \left(1+\frac{s}{N}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Nun gilt mit der Binomischen Reihe

$$\left(1+\frac{1}{N}\right)^s = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{s}{k} \left(\frac{1}{N}\right)^k$$

(vergleiche zum Beispiel [Kö] S. 116 f) und mit der geometrischen Reihe

$$\left(1+\frac{s}{N}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{s}{N}\right)^k$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ mit $N > |s|$, also $\left|\frac{s}{N}\right| < 1$.

Hiermit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\Gamma_{N+1}(s)}{\Gamma_N(s)} &= \left(1+\frac{s}{N}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{s}{N}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)\right) \\ &= 1-\frac{s^2}{N^2}+O\left(\frac{1}{N^2}\right)-\frac{s}{N}\cdot O\left(\frac{1}{N^2}\right)+O\left(\frac{1}{N^2}\right) \\ &\quad +\frac{s}{N}\cdot O\left(\frac{1}{N^2}\right)+O\left(\frac{1}{N^4}\right) = 1+O\left(\frac{1}{N^2}\right).\end{aligned}$$

Wir definieren nun $a_N := \frac{\Gamma_{N+1}(s)}{\Gamma_N(s)} - 1$. Für N groß genug ist $a_N + 1 \neq 0$. Außerdem existiert ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $|a_N| \leq c \cdot \frac{1}{N^2}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert somit $\sum_{N=1}^{\infty} a_N$ und mit (1.1) auch das Produkt $\prod_{N=1}^{\infty}(a_N+1)$. Da

$$\Gamma_N(s) = \Gamma_1(s) \prod_{n=1}^{N-1} \frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)}$$

gilt, konvergiert auch $(\Gamma_N(s))_{N\geq 1}$.

(ii) Aus dem Beweis von (i) erhält man

$$\Gamma_N(s) = \Gamma_1(s) \prod_{n=1}^{N-1} \frac{\Gamma_{n+1}(s)}{\Gamma_n(s)} = \frac{1}{s} \prod_{n=1}^{N-1} \frac{(1+\frac{1}{n})^s}{1+\frac{s}{n}}$$

für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ und damit die Behauptung.

(iii) Dass (2) erfüllt ist, entnimmt man folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= \lim_{N\to\infty} \frac{N^{s+1} \cdot (N-1)!}{(s+1)\cdot(s+2)\cdot\ldots\cdot(s+N)} \\ &= \lim_{N\to\infty} \left[s \cdot \frac{N}{N+s} \cdot \frac{N^s \cdot (N-1)!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+N-1)} \right] \\ &= \lim_{N\to\infty} \left[s \cdot \frac{N}{N+s} \cdot \Gamma_N(s) \right] = s \cdot \Gamma(s).\end{aligned}$$

Die Eigenschaft (1) folgt per Induktion. Nach der Eulerschen Produktdarstellung ist $\Gamma(1) = 1$, also gilt der Induktionsanfang $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n = 1$. Die Aussage folgt mit dem Induktionsschluss $\Gamma(n+1) = n \cdot \Gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!$. □

Als Nächstes definieren wir die Eulersche Konstante.

(1.3) Lemma
Der Limes

$$\gamma := \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \log N \right)$$

existiert und wird Eulersche Konstanten genannt. ◇

Beweis
Wir zeigen, dass die durch $a_N := \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} - \log N$ definierte Folge $(a_N)_{N\geq 1}$ nach unten beschränkt und monoton fallend ist.

zur Beschränktheit:

$$\begin{aligned}a_N &= \frac{1}{N} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \log N = \frac{1}{N} + \sum_{k=1}^{N-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{[x]}\,dx - \int_1^N \frac{1}{x}\,dx \\ &= \frac{1}{N} + \int_1^N \left(\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \right) dx \geq \frac{1}{N} > 0,\end{aligned}$$

denn $\frac{1}{[x]} - \frac{1}{x} \geq 0$ für alle $x \geq 1$.

zur Monotonie:

$$a_N - a_{N+1} = -\log N + \log(N+1) - \frac{1}{N+1} = \int\limits_N^{N+1} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{N+1}\right) dx \geq 0.$$

Damit ist die Folge $(a_N)_{N\geq 1}$ nach unten beschränkt und monoton fallend, also konvergent. □

Mit Hilfe der Eulerschen Konstante erhalten wir eine weitere Produktdarstellung für $\Gamma(s)$, die sogenannte Weierstraßsche Produktdarstellung. Dazu verwenden wir

(1.4) Lemma
Sei $E_q(s)$ mit $q \in \mathbb{N}_0$ definiert durch $E_q(s) := (1-s) \cdot e^{s+(s^2/2)+\ldots+(s^q/q)}$ für $q \geq 1$ und $E_0(s) := (1-s)$. Sei $(a_k)_{k\geq 1}$ eine komplexe Zahlenfolge in $\mathbb{C}^*$ mit der Eigenschaft $\lim\limits_{k\to\infty} |a_k| = \infty$ und $(q_k)_{k\geq 1}$ eine beliebige Folge in $\mathbb{N}_0$, so dass

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{R}{|a_k|}\right)^{q_k+1} < \infty \quad \text{für alle } R > 0.$$

Dann ist

$$f(s) := \prod_{k=1}^{\infty} E_{q_k}\left(\frac{s}{a_k}\right)$$

eine ganze Funktion, die genau in den Stellen $a_k,\ k \geq 1$, verschwindet und sonst nirgends. Kommt die Zahl $a \in \mathbb{C}^*$ genau m-mal unter den $a_k,\ k \geq 1$, vor, so gilt

$$\operatorname{ord}_a(f) = m.$$

◇

Beweis
[Kr] XXVI(3.15) □

(1.5) Satz
Für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gilt

$$\Gamma(s) = \frac{1}{s \cdot e^{\gamma s} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{s}{n}\right) \cdot e^{-s/n}} = \frac{1}{s} \cdot e^{-\gamma s} \cdot \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 + \frac{s}{n}\right)^{-1} \cdot e^{s/n}\right)$$

und $\frac{1}{\Gamma}$ ist eine ganze Funktion mit einfachen Nullstellen für $s \in -\mathbb{N}_0$. ◇

Beweis
Wir formen (4) in die Gestalt

$$\begin{aligned}
\Gamma(s+1) &= s\cdot\Gamma(s) \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{s\cdot N^s\cdot(N-1)!}{s\cdot(s+1)\cdot\ldots\cdot(s+N-1)}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{N^s}{(1+\frac{s}{1})\cdot(1+\frac{s}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{s}{N-1})}\right] \qquad (5)
\end{aligned}$$

um. Des Weiteren erhalten wir aus (1.3):

$$e^{s\cdot(\log N-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n})}\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} e^{-\gamma s}.$$

Mit Hilfe von (5) gilt nun

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{N^s}{(1+\frac{s}{1})\cdot(1+\frac{s}{2})\cdot\ldots\cdot(1+\frac{s}{N-1})}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{s}\cdot\frac{N^s}{\prod_{n=1}^{N-1}(1+\frac{s}{n})}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} e^{s\cdot(\log N-\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n})}\cdot\frac{1}{s}\cdot\prod_{n=1}^{N-1}(1+\frac{s}{n})^{-1}\cdot e^{s/n} \\
&= e^{-\gamma s}\cdot\frac{1}{s}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\cdot e^{s/n}\right).
\end{aligned}$$

Nun wenden wir für die Holomorphie von $\frac{1}{\Gamma}$ auf ganz $\mathbb{C}$ das Lemma (1.4) an. Hier ist nun $a_n = -n$ und $q_n = 1$ für $n\in\mathbb{N}$. Da $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<\infty$ gilt, sind die Voraussetzungen von (1.4) erfüllt. Damit erhalten wir, dass

$$s\mapsto\frac{1}{\Gamma(s)} = s\cdot e^{\gamma s}\cdot\prod_{n=1}^{\infty}\left(\left(1+\frac{s}{n}\right)\cdot e^{-s/n}\right)$$

eine ganze Funktion ist, die genau für $s\in-\mathbb{N}_0$ verschwindet und sonst nirgends. Die Ordnung der Nullstellen ist genau 1. □

(1.6) Satz
Die durch (4) beziehungsweise Satz (1.5) erklärte Funktion Γ ist in der ganzen komplexen Ebene als meromorphe Funktion definiert. Sie ist holomorph bis auf einfache Pole in den Punkten $-N$ für $N\in\mathbb{N}_0$ mit den Residuen

$$\operatorname{Res}_{-N}\Gamma(s) = \frac{(-1)^N}{N!}.$$

Γ ist nullstellenfrei auf $\mathbb{C}$. ◇

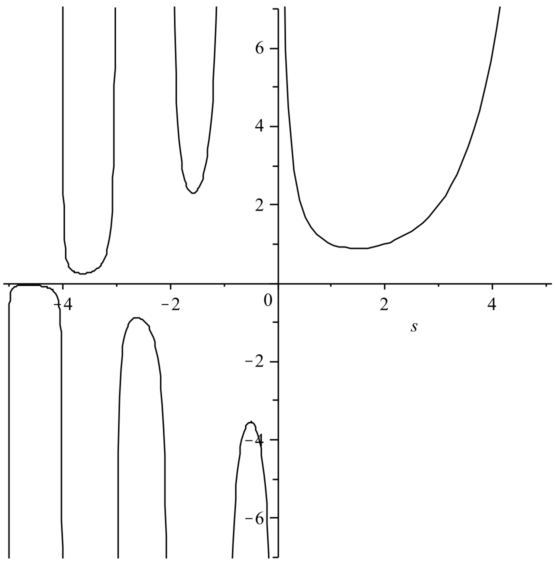
Beweis

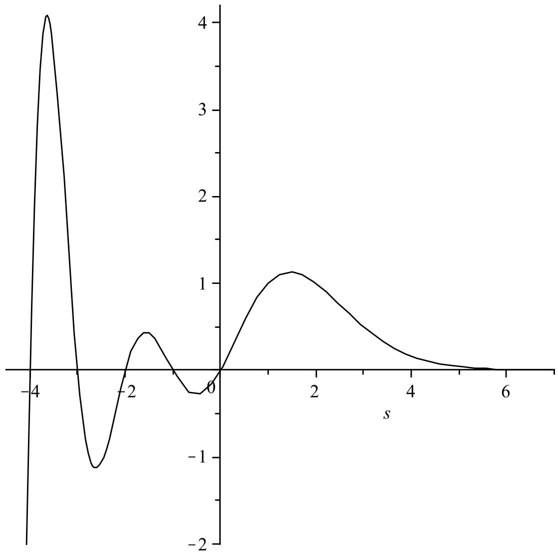
Nach (1.5) ist $\frac{1}{\Gamma}$ holomorph mit einfachen Nullstellen in $0, -1, -2, \ldots$, also ist Γ meromorph mit einfachen Polen für $s \in -\mathbb{N}_0$. Das Residuum von Γ an der Polstelle $-N$ ist

$$\begin{aligned}
\operatorname{Res}_{-N} \Gamma(s) &= \lim_{s \to -N} (s+N)\Gamma(s) \\
&= \lim_{s \to -N} \frac{\Gamma(s+N+1)}{s(s+1)\ldots(s+N-1)} \\
&= \frac{\Gamma(1)}{(-N)(-N+1)\ldots(-1)} \\
&= \frac{(-1)^N}{N!}.
\end{aligned}$$

Die Nullstellenfreiheit folgt nach (1.5), denn $\frac{1}{\Gamma}$ ist eine ganze Funktion. $\square$

Auf der reellen Achse sehen Γ beziehungsweise $\frac{1}{\Gamma}$ so aus:





§2 Eigenschaften der Gammafunktion

Wir werden nun weitere Eigenschaften und Darstellungen der Gammafunktion beweisen. Insbesondere werden wir die Eulersche Integraldarstellung der Gammafunktion für $\sigma > 0$ herleiten, welche uns dann zur Mellinschen Transformation führt.

Zunächst kommen wir zu einem Resultat, welches uns sagt, dass die Werte der Zetafunktion an ganzzahligen Stellen als Koeffizienten der Taylorentwicklung von $\operatorname{Log}\Gamma(s)$ an der Stelle $s = 1$ auftreten.

Diesen Satz können wir auch ohne Verwendung von §1 beweisen, also ohne tiefere Kenntnisse der Funktionentheorie wie den Satz von Weierstraß vorauszusetzen. Dazu benötigen wir einige Vorüberlegungen.

(2.1) Definition
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen, $f_k : U \to \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und $f : U \to \mathbb{C}$ gegeben. Das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} f_k$ konvergiert absolut lokal gleichmäßig gegen f, wenn

$$\prod_{k=1}^{\infty} f_k(s) = f(s)$$

für alle $s \in U$ gilt und die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(f_k - 1)$ absolut lokal gleichmäßig auf U konvergiert. ◇

(2.2) Lemma
Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f_k : U \to \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}$, holomorphe Funktionen. Wenn das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} f_k$ absolut lokal gleichmäßig konvergiert, so ist die durch

$$f(s) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(s)$$

definierte Grenzfunktion f holomorph. ◇

Beweis
[Kr] XXVI(3.10) □

(2.3) Lemma
Es gibt ein $c \in \mathbb{R}$, so dass für beliebiges $a \in [0,1]$ und $s \in K_1(0)$ stets

$$|(1+a)^s - 1 - as| \le ca^2\,|s|$$

gilt. ◇

Beweis
Sei $a \in [0,1]$ und $f_a : K_1(0) \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_a(s) = (1+a)^s$. Da f_a auf $K_1(0)$ holomorph ist, können wir f_a in seine Taylorreihe um 0 entwickeln und erhalten

$$f_a(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f_a^{(k)}(0) \cdot s^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(1+a) \cdot s^k}{k!}$$

für alle $s \in K_1(0)$. Damit ergibt sich nun

$$\begin{aligned} |f_a(s) - 1 - s\log(1+a)| &\leq \sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{\log^k(1+a) \cdot s^k}{k!} \right| \\ &= \log^2(1+a)|s|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left| \frac{\log^k(1+a) \cdot s^k}{(k+2)!} \right| \\ &\leq \log^2(1+a)|s|^2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\log^k(1+a) \cdot |s|^k}{k!} \\ &= \log^2(1+a)|s|^2(1+a)^{|s|} \end{aligned}$$

Mit $a \in [0,1]$ und $s \in K_1(0)$ sowie der Abschätzung $\log(1+a) \leq a$ gilt nun

$$|f_a(s) - 1 - s\log(1+a)| \leq \log^2(1+a)|s|^2(1+a)^{|s|} \leq 2a^2|s|^2 \leq 2a^2|s|.$$

Mit Hilfe des Leibnizkriteriums erhalten wir die Abschätzung

$$|\log(1+a) - a| = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} a^k - a \right| = \left| \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} a^k \right| \leq \frac{1}{2}a^2,$$

denn $(\frac{a^k}{k})_{k\geq 1}$ ist für $a \in [0,1]$ eine monoton fallende Nullfolge. Damit gilt nun die Behauptung, denn

$$\begin{aligned} |(1+a)^s - 1 - as| &\leq |(1+a)^s - 1 - s\log(1+a)| + |s\log(1+a) - as| \\ &\leq 2a^2|s| + |s| \cdot \frac{1}{2}a^2 = \frac{5}{2}a^2|s|. \end{aligned}$$ □

(2.4) Lemma
Das Produkt

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(1+\frac{1}{n})^s}{1+\frac{s}{n}}$$

konvergiert für $s \in K_1(0)$ absolut lokal gleichmäßig. ◇

Beweis
Zum Beweis verwenden wir (2.1). Wir zeigen also, dass $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^s}{1+\frac{s}{n}}-1\right)$ absolut lokal gleichmäßig konvergiert.

Sei dazu $0<\varepsilon<1$. Für alle $s\in K_1(0)$ mit $|s|\leq 1-\varepsilon$ gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(1+\frac{1}{n})^s}{1+\frac{s}{n}}-1\right| &= \sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(1+\frac{1}{n})^s-1-\frac{s}{n}}{1+\frac{s}{n}}\right| \overset{(2.3)}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{c|s|}{n^2}}{\left|1+\frac{s}{n}\right|}\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{c|s|}{n^2}}{\varepsilon}\leq\frac{c}{\varepsilon}\zeta(2)<\infty,\end{aligned}$$

denn $\left|1+\frac{s}{n}\right|\geq|1|-\left|\frac{s}{n}\right|\geq 1-\frac{1-\varepsilon}{n}\geq\varepsilon$ für $|s|\leq 1-\varepsilon$. □

(2.5) Folgerung
Die Funktion Γ ist auf $K_1(1)$ holomorph. ◇

(2.6) Lemma
Für alle $0<\delta<1$ und $N\in\mathbb{N}$ ist die Funktionenreihe

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{k}\,s^k\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^k}\right)$$

gleichmäßig konvergent für $|s|\leq 1-\delta$. ◇

Beweis
Zum Beweis verwenden wir das Dirichlet-Kriterium für gleichmäßige Konvergenz. Sei dazu $g_k:=\frac{1}{k}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^k}$ und $f_k:=(-1)^k s^k$. Damit ist $(g_k)_{k\geq 2}$ eine monoton fallende Nullfolge. Zum Nachweis der gleichmäßigen Beschränktheit von $\sum_{k=2}^{\infty}f_k$ sei $K\in\mathbb{N}$ und $|s|\leq 1-\delta$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=2}^{K}(-1)^k s^k\right| &\leq \sum_{k=2}^{K}|s|^k=|s|^2\sum_{k=2}^{K}|s|^{k-2}=|s|^2\sum_{k=0}^{K-2}|s|^k=|s|^2\,\frac{1-|s|^{K-1}}{1-|s|}\\ &\leq\frac{1+|s|^{K-1}}{1-|s|}\leq\frac{2}{1-(1-\delta)}=\frac{2}{\delta}<\infty.\end{aligned}$$

Somit ist $\sum_{k=2}^{\infty}f_k$ gleichmäßig beschränkt und wir erhalten die gleichmäßige Konvergenz von $\sum_{k=2}^{\infty}f_k g_k$. □

Damit kommen wir zum entscheidenden

(2.7) Satz
Es gibt ein $\varepsilon > 0$, so dass für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $|s| < \varepsilon$ die Taylorentwicklung

$$\operatorname{Log}\Gamma(1+s) = -\gamma s + \sum_{k=2}^{\infty} (-1)^k \frac{\zeta(k)}{k} s^k$$

konvergiert. ◇

Beweis
Nach (5) gilt

$$\Gamma(s+1) = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{N^s}{(1+\frac{s}{1})(1+\frac{s}{2})\dots(1+\frac{s}{N-1})} \right].$$

Wegen (2.5) ist Γ holomorph in $K_1(1)$, also insbesondere stetig für $s = 1$. Weiterhin ist $\Gamma(1) = 1$. Daher existiert eine ε-Umgebung U von 1, für die alle in $\Gamma(U)$ liegene Werte einen Realteil haben, der größer als $\frac{1}{2}$ ist. Auf $\Gamma(U)$ ist dann Log stetig und somit $s \mapsto \operatorname{Log}\Gamma(s+1)$ auf $U' = \{u - 1 \mid u \in U\}$. Wir wenden nun den Logarithmus auf beide Seiten der obigen Gleichung an. Den Limes dürfen wir auf Grund der Stetigkeit von $\operatorname{Log}\Gamma(1+s)$ für $|s| < \varepsilon$ hinausziehen. Für $|s| < \varepsilon$ erhalten wir daher

$$\operatorname{Log}\Gamma(1+s) = \lim_{N\to\infty} \left[s \cdot \log N - \sum_{n=1}^{N-1} \operatorname{Log}\left(1 + \frac{s}{n}\right) \right] + 2\pi i k(s)$$

für ein $k(s) \in \mathbb{Z}$ unter der Bedingung, dass der Grenzwert existiert, welches wir später beweisen werden. Nun verwenden wir die Reihendarstellung des Logarithmus:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Log}\Gamma(1+s) &= \lim_{N\to\infty} \left[s \cdot \log N - \sum_{n=1}^{N-1} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{s}{n}\right)^k \right) \right] + 2\pi i k(s) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[s \cdot \log N - \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{s}{n}\right)^k \right) \right] + 2\pi i k(s) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[s \cdot \log N - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{s}{n} - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{N-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \left(\frac{s}{n}\right)^k \right) \right] + 2\pi i k(s) \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[s \cdot \left(\log N - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} \right) - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} s^k \sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n^k} \right) \right] \\
&\quad + 2\pi i k(s).
\end{aligned}$$

Auf Grund der gleichmäßigen Konvergenz, welche in (2.6) bewiesen wurde, sind Summation und Grenzübergang vertauschbar. Mit Hilfe von (1.3) erhalten wir nun,

dass
$$\lim_{N\to\infty}\left(\log N - \sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n}\right) = \lim_{N\to\infty}\left(\log N - \sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n} + \frac{1}{N}\right) = -\gamma$$
ist. Für $k \geq 2$ gilt nach Definition der Riemannschen Zetafunktion weiterhin
$$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N-1}\frac{1}{n^k} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^k} = \zeta(k).$$

Damit erhalten wir
$$\operatorname{Log}\Gamma(1+s) = \underbrace{-\gamma s + \sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\,\frac{\zeta(k)}{k}\,s^k}_{=:F(s)} + 2\pi i k(s), \quad k(s) \in \mathbb{Z}.$$

Nun ist $s \mapsto F(s)$ auf U' stetig, da die einzelnen Summanden stetig sind und die Reihe gleichmäßig konvergiert, was man analog zu (2.6) zeigen kann. Außerdem ist nach Obigem $s \mapsto \operatorname{Log}\Gamma(s+1)$ auf U' stetig. Daher muss auch $k(s)$ stetig sein und ist somit konstant. Einsetzen von $s = 0$ auf beiden Seiten liefert, dass $k(s) = 0$ für alle $s \in U'$ gelten muss, also erhalten wir die behauptete Identität. □

Bemerkung: Man kann zeigen, dass (2.7) für $|s| < 1$ gilt. Hier und im Folgenden genügt aber $|s| < \varepsilon$.

Nun leiten wir eine weitere Funktionalgleichung her. Dazu benötigen wir zuerst folgendes

(2.8) Lemma
Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt
$$\sin(\pi s) = \pi s \prod_{k=1}^{\infty}\left(1 - \frac{s^2}{k^2}\right).$$
◇

Beweis
[Kr] XXVI(4.2) □

(2.9) Satz
Für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ gilt
$$\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}.$$
◇

Beweis
Mit (1.5) folgt

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Gamma(s)\cdot\Gamma(-s)} &= s\cdot e^{\gamma s}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{k}\right)\cdot e^{-s/k}\cdot(-s)\cdot e^{-\gamma s}\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s}{k}\right)\cdot e^{s/k}\\ &= -s^2\cdot\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{s^2}{k^2}\right)\\ &\overset{(2.8)}{=} -s\cdot\frac{\sin\pi s}{\pi}.\end{aligned}$$

Mit der Funktionalgleichung (2) gilt

$$\frac{1}{\Gamma(s)\cdot\Gamma(1-s)} = \frac{1}{\Gamma(s)\cdot(-s)\cdot\Gamma(-s)} = \frac{\sin(\pi s)}{\pi}. \qquad \square$$

Damit erhalten wir nun die

(2.10) Folgerung
Es gilt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \qquad \diamond$$

Beweis
Nach (2.9) gilt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin(\pi/2)} = \pi.$$

Außerdem erhalten wir nach der Eulerschen Produktdarstellung, dass $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \geq 0$, denn alle Faktoren des Produktes sind größer als 0. Damit ist

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \qquad \square$$

Folgende Überlegung führt uns zu einem weiteren Satz. Für $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ sei

$$f(s) = \Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

Dann gilt

$$f(s+1) = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) = \frac{s}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) = \frac{s}{2} \cdot f(s)$$

oder

$$2^{s+1} \cdot f(s+1) = s \cdot 2^s \cdot f(s).$$

Diese Gleichung entspricht der Funktionalgleichung von Γ und daher ist es naheliegend zu vermuten, dass $s \mapsto 2^s \cdot f(s)$ ein Vielfaches von Γ ist, was auch der Fall ist nach

(2.11) Satz (Legendresche Verdopplungsformel)
Für alle $s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0)$ gilt

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{1-s} \cdot \sqrt{\pi} \cdot \Gamma(s).$$

$\diamond$

Beweis
Wir verwenden die Darstellung (4) der Gammafunktion. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
&2^s \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) \\
&= \lim_{N\to\infty} 2^s \cdot \left[\frac{N^{s/2} \cdot (N-1)!}{\frac{s}{2} \cdot (\frac{s}{2}+1) \cdot \ldots \cdot (\frac{s}{2}+N-1)} \cdot \frac{N^{(s+1)/2} \cdot (N-1)!}{\frac{s+1}{2} \cdot (\frac{s+1}{2}+1) \cdot \ldots \cdot (\frac{s+1}{2}+N-1)}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{2^{2N+s} \cdot N^{s+1/2} \cdot ((N-1)!)^2}{s \cdot (s+2) \cdot \ldots \cdot (s+2N-2) \cdot (s+1) \cdot (s+3) \cdot \ldots \cdot (s+2N-1)}\right] \\
&= \lim_{N\to\infty} \left[\frac{2^{2N} \cdot N^{1/2} \cdot ((N-1)!)^2}{(2N-1)!} \cdot \frac{(2N)^s \cdot (2N-1)!}{s \cdot (s+1) \cdot (s+2) \cdot \ldots \cdot (s+2N-1)}\right] \\
&= C \cdot \Gamma(s)
\end{aligned}$$

mit

$$C = \lim_{N\to\infty} \left[\frac{2^{2N} \cdot N^{1/2} \cdot ((N-1)!)^2}{(2N-1)!}\right].$$

Wenn wir nun $s = 1$ betrachten, erhalten wir

$$2^1 \cdot \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \cdot \Gamma(1) = C \cdot \Gamma(1).$$

Da nach (2.10) weiterhin $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ gilt, ist hier

$$C = 2\sqrt{\pi}.$$

Da C unabhängig von s ist erhalten wir insgesamt

$$2^s \cdot \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2\sqrt{\pi} \cdot \Gamma(s).$$
□

— Die Eulersche Integraldarstellung —

Sei

$$h(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$

Das Integral ist holomorph für $\mathrm{Re}(s) > 0$ (vergleiche [Kr] XVIII(5.4)) und es gelten (1) und (2), denn:

$$h(s+1) = \int_0^\infty t^s e^{-t} dt = \underbrace{\left[t^s(-e^{-t})\right]_0^\infty}_{=0} + \int_0^\infty s \cdot t^{s-1} e^{-t} dt = s \cdot h(s)$$

und

$$h(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1.$$

Die Funktion $h(s)$ ist also ein Kandidat für die ursprünglich gesuchte Funktion $\Gamma(s)$. In der Tat gilt nun der folgende

(2.12) Satz
Für $\mathrm{Re}(s) > 0$ gilt

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1} e^{-t} dt.$$
◇

Beweis
Zum Beweis der Aussage zeigen wir für $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq 1$:

(i) $$\int_0^N (1 - \frac{t}{N})^N t^{x-1} dt = \frac{N^x N!}{x \cdot (x+1) \cdot \ldots \cdot (x+N)} \stackrel{N \to \infty}{\longrightarrow} \Gamma(x)$$

(ii) $$\lim_{N \to \infty} \int_0^N (1 - \frac{t}{N})^N t^{x-1} dt = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$

zu (i): Durch N-malige partielle Integration erhalten wir die Behauptung.

$$\begin{aligned}
\int_0^N \left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{x-1}dt &\overset{t=Nu}{=} \int_0^1 (1-u)^N\,(Nu)^{x-1}\,Ndu \\
&= N^x \int_0^1 (1-u)^N\,u^{x-1}du \\
&= N^x\Bigg(\underbrace{\left[\frac{1}{x}\,u^x\,(1-u)^N\right]_0^1}_{=0} + \frac{N}{x}\int_0^1 (1-u)^{N-1}\,u^x du\Bigg) \\
&= N^x\cdot\frac{N}{x}\Bigg(\underbrace{\left[\frac{1}{x+1}\,u^{x+1}\,(1-u)^{N-1}\right]_0^1}_{=0} \\
&\quad + \frac{N-1}{x+1}\int_0^1 (1-u)^{N-2}\,u^{x+1}du\Bigg) \\
&= \ldots \\
&= N^x\cdot\frac{N}{x}\cdot\frac{N-1}{x+1}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{x+N-1}\int_0^1 u^{N+x-1}du \\
&= \frac{N^x\,N!}{x\cdot(x+1)\cdot(x+N)} = \frac{N}{N+x}\cdot\Gamma_N(x) \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \Gamma(x).
\end{aligned}$$

zu (ii):

Es gilt:

$$\lim_{N\to\infty}\chi_{[0,N]}(t)\left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{x-1} = e^{-t}t^{x-1}$$

und

$$0 \le \chi_{[0,N]}(t)\left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{x-1} \le e^{-t}t^{x-1}.$$

für alle $t \ge 0$. Das Riemann-Integral $\int_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}dt$ existiert nach [Kr] VII(4.1) und ist nach [Kr] XIV(3.9) gleich dem Lebesgue-Integral der Majorante $t \mapsto e^{-t}\,t^{x-1}$ für $t > 0$. Damit können wir nun den Satz von der majorisierten Konvergenz von Lebesgue anwenden:

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty}\int\limits_0^N \left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{x-1}dt &= \lim_{N\to\infty}\int\limits_0^\infty \chi_{[0,N]}(t)\left(1-\frac{t}{N}\right)^N t^{x-1}dt\\ &= \int\limits_0^\infty e^{-t}\,t^{x-1}dt.\end{aligned}$$

Mit (i) und (ii) erhalten wir nun

$$\Gamma(x)=\int\limits_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad \text{für alle } x\geq 1.$$

Da h eine in der rechten Halbebene holomorphe Funktion ist und die Aussage für $x \geq 1$ gilt, folgt die Behauptung mit Hilfe des Identitätsatzes. □

— *Mellinsche Transformation* —

Die im vorherigen Abschnitt hergeleitete Integraldarstellung für die Gammafunktion führt nun zu einer Verknüpfung der Dirichletreihen mit den Potenzreihen.

(2.13) Satz (Mellinsche Transformation)
Die gewöhnliche Dirichletreihe $f(s) := \sum_{n=1}^\infty a_n n^{-s}$ und die Potenzreihe $F(z) := \sum_{n=1}^\infty a_n z^n$ mit denselben Koeffizienten sind im Bereich der absoluten Konvergenz durch die Integraltransformation

$$f(s)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int\limits_0^\infty F(e^{-t})t^{s-1}dt$$

für $s\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s)>0$ verknüpft. ◇

Beweis
Für $\sigma > 0$ gilt mit der Darstellung der Gammafunktion aus (2.12)

$$\begin{aligned}\int\limits_0^\infty t^{s-1}e^{-nt}dt &\overset{u=nt}{=} \int\limits_0^\infty \left(\frac{u}{n}\right)^{s-1} e^{-u}\frac{1}{n}du\\ &= n^{-s}\int\limits_0^\infty u^{s-1}e^{-u}du\\ &= \Gamma(s)\cdot n^{-s}.\end{aligned}$$

Damit erhalten wir nun

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} t^{s-1} e^{-nt} dt \right).$$

Sei nun $s \in \mathbb{C}$ und $\sigma > \max\{\sigma_1, 0\}$, wobei σ_1 unsere absolute Konvergenzabszisse bezeichnet. Dann gilt

$$\left| \sum_{n=1}^{N} a_n \, e^{-nt} t^{s-1} \right| \leq \sum_{n=1}^{N} |a_n| \; e^{-nt} \, t^{\sigma-1} \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \; e^{-nt} \, t^{\sigma-1}$$

für alle $N \in \mathbb{N}$ und $t > 0$. Da $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \; e^{-nt} \, t^{\sigma-1}$ für jedes t monoton wachsend gegen $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \; e^{-nt} \, t^{\sigma-1}$ strebt, falls man $N \to \infty$ betrachtet, gilt weiter

$$\int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \; e^{-nt} \, t^{\sigma-1} d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} |a_n| \; e^{-nt} \, t^{\sigma-1} d\lambda(t) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \; \Gamma(\sigma) \, n^{-\sigma} < \infty,$$

da $\sigma > \sigma_1$ und folglich $\sum_{n=1}^{\infty} |a_N| n^{-\sigma} < \infty$ gilt. Somit ist $t \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \; e^{-nt} \, t^{\sigma-1}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ eine integrierbare Majorante von $t \mapsto \sum_{n=1}^{N} |a_n| \; e^{-nt} \, t^{\sigma-1}$, also dürfen wir Summation und Integration vertauschen und erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-nt} \right) t^{s-1} dt.$$

Für $z = e^{-t}$ ist $f(s)$ also durch die Integraltransformation

$$f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} F(e^{-t}) t^{s-1} dt$$

darstellbar. □

Diese Darstellung ermöglicht es, von Eigenschaften von Potenzreihen auf Eigenschaften von Dirichletreihen zu schließen und umgekehrt.

Der Satz gilt auch für nicht-gewöhnliche Dirichletreihen, nämlich

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \lambda_n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \, e^{-\lambda_n t} \right) t^{s-1} dt.$$

Nun verwenden wir als Beispiele uns schon wohlbekannte Funktionen.

(2.14) Beispiel

(i) Wir betrachten die Dirichletreihe $\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}} = \frac{1}{e^t - 1} \quad \text{für } t > 0,$$

also erhalten wir mit Satz (2.13)

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt$$

für $\sigma > 1$.

(ii) Wir betrachten die Dirichletreihe $\psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s} = (1 - 2^{1-s}) \cdot \zeta(s)$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-nt} = \frac{e^{-t}}{1+e^{-t}} = \frac{1}{e^t + 1} \quad \text{für } t > 0,$$

also erhalten wir nach (2.13)

$$(1 - 2^{1-s}) \cdot \zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t + 1} dt$$

für $\sigma > 1$. Nun wenden wir den Identitätssatz an. Wir wissen, dass $\psi(s)$ und $\Gamma(s)$ holomorph sind für $\sigma > 0$. Weiterhin ist auch das Integral holomorph für $\sigma > 0$, was man analog zu [Kr]XVIII(5.4) zeigen kann, also erhalten wir sogar die Gleichheit für $\sigma > 0$.

Insbesondere die Darstellung von $\zeta(s)$ in (i) wird uns im folgenden Vortrag über die Riemannsche Zetafunktion helfen, diese auf ganz $\mathbb{C}$ meromorph fortzusetzen. $\diamond$

Literatur

[Kö] Königsberger, Analysis I, Springer 1995.

[Kr] Krieg, Analysis I–IV, Höhere Funktionentheorie I, 2005–2007.

[Za] Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper, Springer 1981.