
Die Riemannsche Zetafunktion

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 21.01.2008

Michael Hoschek

Mit meinem Vortrag möchte ich die wichtigste Dirichletsche Reihe, die Riemannsche Zetafunktion mit einigen besonderen Eigenschaften vorstellen. Diese Funktion ist nach dem deutschen Mathematiker Bernhard Riemann (1826–1866) benannt und spielt eine wichtige Rolle in der Zahlentheorie. In den Nullstellen dieser Funktion stecken wichtige Informationen über die Verteilung der Primzahlen. Der Zusammenhang der Zetafunktion mit den Primzahlen bildet den Ausgangspunkt der *Riemannschen Vermutung*: Sie besagt, dass alle komplexen Nullstellen den Realteil $1/2$ besitzen. Die bis heute unbewiesene Behauptung ist eines der bedeutendsten ungelösten Probleme der Mathematik. Die im vorherigen Vortrag eingeführte Gammafunktion ist das wichtigste Hilfsmittel im Umgang mit der Zetafunktion. Es gibt sehr viele nützliche Zusammenhänge der beiden Funktionen, die auch in den Beweisen immer wieder auftauchen.

§1 Einführung

— Darstellungen der Riemannschen Zetafunktion —

(1.1) Definition

Die *Riemannsche Zetafunktion* ist eine komplexwertige Funktion, die durch folgende Dirichlet-Reihe definiert ist:

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} \quad \text{für alle } s = \sigma + it \text{ mit } \sigma > 1, \quad (1)$$

wobei s eine komplexe Zahl mit Realteil σ und Imaginärteil t ist. \diamond

Im folgendem Satz sind zwei wichtige Eigenschaften von Dirichlet-Reihen zusammengefasst, mit deren Hilfe man zwei weitere Darstellungen der ζ -Funktion erhält.

(1.2) Satz

(i) Sei $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ eine multiplikative Funktion und sei die Reihe $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) n^{-s}$ absolut konvergent. Dann ist $F(s)$ gleich dem Eulerprodukt

$$F(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \frac{f(p)}{p^s} + \frac{f(p^2)}{p^{2s}} + \dots \right), \quad (2)$$

wo das Produkt über alle Primzahlen p läuft und auch absolut konvergiert.

(ii) Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ eine Dirichlet-Reihe. Dann hat die Reihe im Bereich der absoluten Konvergenz die Darstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt} \right) t^{s-1} dt. \quad (3)$$

Beweis

Siehe die Vorträge „Dirichlet-Reihen II“ und „Die Gammafunktion“.

(1.3) Korollar

(i) Für $\sigma > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}}. \quad (4)$$

(ii) Für $\sigma > 1$ gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt. \quad (5)$$

Beweis

Siehe die Vorträge „Dirichlet-Reihen II“ und „Die Gammafunktion“.

(1.4) Bemerkung

Mit Hilfe der eulerschen Produktentwicklung ergibt sich

$$\lim_{s \rightarrow 1} \zeta(s) = \lim_{s \rightarrow 1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \infty,$$

das heißt, das Produkt

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}}$$

divergiert, was die Unendlichkeit der Primzahlen beweist.

§2 Eigenschaften der Riemannschen Zetafunktion

Bevor man die wichtigsten Eigenschaften der ζ -Funktion formulieren kann, braucht man ein Hilfsmittel, die sogenannten Bernoulli-Zahlen.

(2.1) Definition

Sei

$$f(t) = \frac{t}{e^t - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k \quad \text{für alle } t \text{ mit } 0 < |t| < 2\pi. \quad (6)$$

Dann heißen die B_k , $k \in \mathbb{N}_0$, *Bernoulli-Zahlen*. \diamond

(2.2) Lemma

Es gilt

(i) $B_1 = -1/2$ und $B_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $B_k \in \mathbb{Q}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Speziell ist $B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$. \diamond

Beweis

Betrachte zunächst

$$-\frac{t}{2!} - \frac{t^2}{3!} - \dots = -\sum_{k=2}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{k!} = -\frac{e^t}{t} + \frac{1}{t} + 1 < 1 \quad \text{für alle } t \text{ mit } 0 < |t| < 2\pi, \quad (*)$$

denn es ist

$$\begin{aligned} -\frac{e^t}{t} + \frac{1}{t} + 1 < 1 &\Leftrightarrow -\frac{e^t}{t} + \frac{1}{t} < 0 \Leftrightarrow \\ 1 < e^t \quad \text{für } t > 0 &\quad \text{und } 1 > e^t \quad \text{für } t < 0. \end{aligned}$$

Damit können wir die geometrische Reihe anwenden:

$$\begin{aligned} \frac{t}{e^t - 1} &= \frac{t}{t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots} = \frac{1}{1 + \frac{t}{2!} + \frac{t^2}{3!} + \dots} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{t}{2!} - \frac{t^2}{3!} - \dots\right)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{t}{2!} - \frac{t^2}{3!} - \dots\right)^n = 1 + \left(-\frac{t}{2} - \frac{t^2}{6} - \frac{t^3}{24} - \frac{t^4}{120} - \dots\right) \\ &\quad + \left(\frac{t^2}{4} + \frac{t^3}{6} + \frac{5t^4}{72} + \dots\right) + \left(-\frac{t^3}{8} - \frac{t^4}{8} - \dots\right) + \frac{t^4}{16} + \dots \\ &= 1 - \frac{t}{2} + \frac{t^2}{12} + 0t^3 - \frac{t^4}{720} + \dots \end{aligned}$$

Jetzt kann man die B_n definieren als $n!$ mal den Koeffizienten von t^n auf der rechten Seite. Damit ist auch leicht einzusehen, dass alle Bernoulli-Zahlen rational sind und man erhält für die ersten fünf Bernoulli-Zahlen die Werte

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{12} \cdot 2! = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{720} \cdot 4! = -\frac{1}{30}.$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass abgesehen von B_1 alle B_n mit n ungerade Null sind. Dazu betrachte die Umformung

$$\begin{aligned} \frac{t}{e^t - 1} - \frac{-t}{e^{-t} - 1} &= \frac{(e^{-t} - 1)t + (e^t - 1)t}{(e^t - 1)(e^{-t} - 1)} = -t \cdot \frac{(-e^t - e^{-t} + 2)}{(-e^t - e^{-t} + 2)} = -t \\ \implies -t &= f(t) - f(-t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} (-t)^k = 2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k+1}}{(2k+1)!} t^{2k+1} \\ &\implies -t = 2 \cdot \left(B_1 t + \frac{B_3 t^3}{3!} + \frac{B_5 t^5}{5!} + \dots \right). \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert $B_1 = -1/2$ und $B_{2k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Damit sind alle Behauptungen bewiesen. □

(2.3) Satz

Die in (1) definierte Funktion ζ lässt sich meromorph in die ganze komplexe Ebene fortsetzen. Sie hat einen einfachen Pol vom Residuum 1 an der Stelle $s = 1$ und ist ansonsten holomorph. ◇

Beweis

Gehe von der Integraldarstellung

$$\zeta(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt, \quad \text{wobei} \quad \Gamma(s) = \int_0^{\infty} \frac{t^{s-1}}{e^t} dt \quad \text{ist,}$$

aus. Sei $n > 0$ fest; dann definiere

$$f_n(t) := \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{B_k}{k!} t^k = 1 + \frac{t}{2} + \frac{B_2}{2!} t^2 + \dots + \frac{B_n}{n!} t^n.$$

(Da alle B_n mit n ungerade Null sind, ist $(-1)^n B_n = B_n$ für $n > 1$.) Für $\sigma > 1$ ist dann

$$\begin{aligned} \Gamma(s) \cdot \zeta(s) &= \Gamma(s) \cdot \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^\infty \frac{t^{s-1}}{e^t - 1} dt = \int_0^\infty \frac{t e^t}{e^t - 1} e^{-t} t^{s-2} dt \\ &= \underbrace{\int_0^\infty \left(\frac{t e^t}{e^t - 1} - f_n(t) \right) e^{-t} t^{s-2} dt}_{=: I_1(s)} + \underbrace{\int_0^\infty f_n(t) e^{-t} t^{s-2} dt}_{=: I_2(s)} \\ &= I_1(s) + I_2(s). \end{aligned} \quad (7)$$

Die Funktion

$$t \mapsto \frac{t e^t}{e^t - 1} = \frac{-t}{e^{-t} - 1} \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} B_k t^k$$

ist holomorph bei $t = 0$, denn mit der Regel von L'Hospital ist

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{-t}{e^{-t} - 1} \stackrel{„0/0“}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-1}{e^{-t}(-1)} = 1.$$

Somit ist

$$\frac{t e^t}{e^t - 1} - f_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} B_k t^k - \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} B_k t^k = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} B_k t^k = \mathcal{O}(t^{n+1})$$

für $t \rightarrow 0$. (Dies folgt aus $t^{n+1} > t^{n+2} > t^{n+3} > \dots$ für $t \rightarrow 0$)

Für $t \rightarrow 0$ ist nach der obigen Überlegung der Integrand von $I_1(s)$ eine Funktion vom Wachstumsverhalten $\mathcal{O}(t^{n+1} \cdot t^{\sigma-2}) = \mathcal{O}(t^{n+\sigma-1})$. Bilden der Stammfunktion ergibt die Größenordnung $\mathcal{O}(t^{n+\sigma})$. Dies konvergiert, wenn der Exponent $n + \sigma > 0$ ist, also für alle s mit $\sigma > -n$. Für $t \rightarrow \infty$ ist der Integrand von $I_1(s)$ exponentiell klein. Insgesamt stellt $I_1(s)$ im Bereich $\sigma > -n$ eine holomorphe Funktion dar.

Das zweite Integral $I_2(s)$ lässt sich mit Hilfe der Γ -Funktion und der Tatsache, dass f_n ein Polynom ist, explizit ausrechnen:

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \int_0^\infty \left[1 + \frac{t}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} t^k \right] e^{-t} t^{s-2} dt \\ &= \int_0^\infty e^{-t} t^{s-2} dt + \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} \int_0^\infty e^{-t} t^{s+k-2} dt \\ &= \Gamma(s-1) + \frac{1}{2} \Gamma(s) + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} \Gamma(s+k-1) \end{aligned} \quad (8)$$

Dies ist eine endliche Linearkombination von meromorphen Funktionen. Somit haben wir gezeigt das ζ sich in die Halbebene $\sigma > -n$ meromorph fortsetzen lässt. Da n beliebig war, gilt dies in ganz \mathbb{C} .

Nun erinnern wir uns noch an folgende Eigenschaft der Γ -Funktion: Für alle s mit $s \notin -\mathbb{N}_0$ gilt

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{und} \quad \Gamma(s+N) = s(s+1)\dots(s+N-1)\Gamma(s) \quad \forall N \in \mathbb{N}. \quad (*)$$

Setzen wir nun (8) in (7) ein, so bekommen wir für $\sigma > -n$ die Darstellung

$$\begin{aligned} \zeta(s) &= \frac{1}{\Gamma(s)} I_1(s) + \frac{1}{\Gamma(s)} I_2(s) \\ &= \frac{1}{\Gamma(s)} I_1(s) + \frac{\Gamma(s-1)}{\Gamma(s)} + \frac{1}{2} \frac{\Gamma(s)}{\Gamma(s)} + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} \frac{\Gamma(s+k-1)}{\Gamma(s)} \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{1}{\Gamma(s)} I_1(s) + \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \sum_{k=2}^n \frac{B_k}{k!} s(s+1)\dots(s+k-2). \end{aligned} \quad (9)$$

Die Funktion $\frac{1}{\Gamma}$ ist überall holomorph, also zeigt (9), dass $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ in $\sigma > -n$ holomorph ist. Da n beliebig war, haben wir gezeigt, dass ζ bis auf die Polstelle bei $s = 1$ eine in ganz \mathbb{C} holomorphe Funktion darstellt. Es bleibt noch zu zeigen, dass das Residuum der Polstelle gleich eins ist. Dies kann man direkt am Koeffizienten von $(s-1)^{-1}$ ablesen, da alle anderen Summanden holomorph sind.

Damit ist der Satz vollständig bewiesen. \square

Zum Abschluss des zweiten Abschnitts interessieren wir uns für die Funktionswerte von ζ an bestimmten Stellen.

(2.4) Satz

Es gilt

- (i) $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$,
- (ii) $\zeta(-2n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (iii) $\zeta(1-2n) = -\frac{B_{2n}}{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$,
- (iv) $\zeta(2n) = \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. \diamond

Beweis

Sei $n \in \mathbb{N}$. Wähle eine feste ganze Zahl s mit $-n < s \leq 0$. Dann ist $\frac{1}{\Gamma(s)} I_1(s) = 0$, da der Kehrwert von Γ an der Stelle s eine Nullstelle besitzt. Mit (2.2) und aus (9) erhält man

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \frac{1}{2} + \frac{s}{12} - \frac{s(s+1)(s+2)}{720} + \frac{B_6}{720} s(s+1)(s+2)(s+3)(s+4) \\ - \dots + \frac{B_n}{n!} s(s+1) \dots (s+n-2) \quad \text{für } s = 0, -1, -2, \dots, -n+1. \quad (10)$$

Diese Darstellung zeigt, dass

$$\begin{aligned} \zeta(0) &= \frac{1}{-1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ \zeta(-1) &= \frac{1}{-2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12} = -\frac{1}{12} \\ \zeta(-2) &= \frac{1}{-3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = 0 \\ \zeta(-3) &= \frac{1}{-4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{120} = \frac{1}{120} \\ \zeta(-4) &= \frac{1}{-5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{30} = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

gilt. Dies könnte man jetzt fortführen, um den ζ -Wert jeder beliebigen negativen ganzen Zahl auszurechnen. Man sieht, dass die Werte alle rational sind. Versuchen wir das allgemein zu beweisen. Zunächst betrachten wir folgende Tatsache:

$$(-k)(-k+1)\dots(-k+r-2) = (-1)^{r-1} (k)(k-1)\dots(k-r+2) = \frac{(-1)^{r-1} k!}{(k-r+1)!}. \quad (*)$$

Für $k \in \mathbb{N}_0$ mit $k < n$ erhalten wir aus (10)

$$\begin{aligned} \zeta(-k) &= \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{2} + \sum_{r=2}^n \frac{B_r}{r!} (-k)(-k+1)\dots(-k+r-2) \\ &\stackrel{(*)}{=} \frac{-1}{k+1} + \frac{1}{2} + \sum_{r=2}^{k+1} \frac{B_r}{r!} (-1)^{r-1} \frac{k!}{(k+1-r)!}. \end{aligned}$$

(Die Summe läuft nur bis $k+1$, da die nachfolgenden Glieder alle verschwinden.)

Ersetze nun $(-1)^{r-1}$ durch (-1) ; dies ändert den Wert der Summe nicht, da alle ungeraden Summanden für $r \geq 3$ gleich Null sind. Dann erweitere mit $(k+1)$ um

einen Binomialkoeffizienten zu bekommen. Aus der obigen Gleichung wird dann:

$$\begin{aligned}\zeta(-k) &= -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{k+1} \sum_{r=2}^{k+1} \frac{B_r}{r!} (-1)^r \frac{(k+1)k!}{(k+1-r)!} \\ &= -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{k+1} \sum_{r=2}^{k+1} \binom{k+1}{r} B_r.\end{aligned}$$

Für $r = 0$ der obigen Summe gilt
$$-\frac{1}{k+1} \cdot \underbrace{\binom{k+1}{0}}_{=1} \underbrace{B_0}_{=1} = -\frac{1}{k+1}$$

und für $r = 1$ gilt
$$-\frac{1}{k+1} \cdot \underbrace{\binom{k+1}{1}}_{=k+1} \underbrace{B_1}_{=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}.$$

Daher lässt sich die obige Formel schreiben als

$$\zeta(-k) = -\frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} B_r.$$

Nun wird in (ii) und (iii) behauptet, dass diese Summe für $k > 0$ immer gleich ihrem letzten Glied ist.

Es muss folgende Beziehung gelten:

$$\zeta(-k) = -\frac{1}{k+1} \sum_{r=0}^{k+1} \binom{k+1}{r} B_r \stackrel{!}{=} -\frac{B_{k+1}}{k+1},$$

das heißt es ist zu zeigen, dass die Bernoulli-Zahlen die Eigenschaft

$$\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r = (-1)^n B_n \tag{12}$$

besitzen. Betrachte in der folgenden Rechnung die Indexsubstitution (**) $n = r + k$ mit $n \geq 0$, $r \geq 0$ und $r \leq n$, also äquivalent dazu $r + k \geq 0$, $r \geq 0$ und $r \leq r + k$ beziehungsweise $r \geq 0$ und $k \geq 0$.

Damit gilt

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{r=0}^n \binom{n}{r} B_r \right] \frac{t^n}{n!} &= \sum_{\substack{n,r \in \mathbb{N}_0 \\ r \leq n}} \frac{B_r t^n}{r!(n-r)!} \\
 &\stackrel{(**)}{=} \sum_{r,k \in \mathbb{N}_0} \frac{B_r t^{r+k}}{r!k!} = \underbrace{\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{B_r}{r!} t^r \right)}_{= \frac{t}{e^t-1}} \underbrace{\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \right)}_{= e^t} \\
 &= \frac{t}{e^t-1} \cdot e^t = \frac{-t}{e^{-t}-1} = \sum_{n=0}^{\infty} [(-1)^n B_n] \frac{t^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich liefert nun die Behauptung.

Zusammenfassend ist

$$\begin{aligned}
 \zeta(-2k) &= -\frac{B_{2k+1}}{2k+1} = 0 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \text{ nach (2.2) (i),} \\
 \zeta(1-2k) &= -\frac{B_{2k}}{2k} \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N}.
 \end{aligned}$$

Damit sind (ii) und (iii) gezeigt. Schließlich bleibt noch die Behauptung (iv) über die Werte der Zetafunktion an positiven geraden ganzen Zahlen zu beweisen. Dazu braucht man ein paar Hilfseigenschaften, die im Folgenden kurz dargestellt werden.

Es gilt:

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n!)} t^{2n} = \frac{t}{e^t-1} - \left(1 - \frac{t}{2}\right)$. (Der nullte und erste Summand muss abgezogen werden, da die Summe hier erst mit dem zweiten Glied beginnt.)
- (b) $\cos(s) = \frac{1}{2}(e^{is} + e^{-is})$, $\sin(s) = \frac{1}{2i}(e^{is} - e^{-is})$ für alle $s \in \mathbb{C}$.
- (c) $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}$ für alle $s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
- (d) Sei $0 < \varepsilon < 1$ gegeben, so dass für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $|s| < \varepsilon$ gilt

$$\begin{aligned}
 \log \Gamma(1+s) &= -\gamma s + \frac{\zeta(2)}{2} s^2 - \frac{\zeta(3)}{3} s^3 + \frac{\zeta(4)}{4} s^4 - \dots, \\
 \log \Gamma(1-s) &= +\gamma s + \frac{\zeta(2)}{2} s^2 + \frac{\zeta(3)}{3} s^3 + \frac{\zeta(4)}{4} s^4 + \dots,
 \end{aligned}$$

wobei γ die Eulersche Konstante ist (siehe letzten Vortrag).

Mit diesen Hilfsmitteln kann man Teil (iv) jetzt beweisen. Betrachte für $0 < |s| < \varepsilon$ die Summe

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!} s^{2n} &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{\frac{2n}{2}} 2^{2n} \pi^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!} s^{2n} \\
&= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (2\pi i s)^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!} \\
\stackrel{(a)}{=} &-\frac{1}{2} \left[\frac{2\pi i s}{e^{2\pi i s} - 1} - 1 + \frac{2\pi i s}{2} \right] \\
&= -\frac{\pi i s}{e^{2\pi i s} - 1} + \frac{1}{2} - \frac{\pi i s}{2} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\pi i s}{2} - \frac{\pi i s e^{-\pi i s}}{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\pi i s}{2} \left(1 + \frac{2e^{-\pi i s}}{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}} \right) \\
&= \frac{1}{2} - \frac{\pi i s}{2} \left(\frac{e^{\pi i s} + e^{-\pi i s}}{e^{\pi i s} - e^{-\pi i s}} \right) \\
\stackrel{(b)}{=} &\frac{1}{2} - \frac{\pi s}{2} \left(\frac{\cos(\pi s)}{\sin(\pi s)} \right) \\
&= \frac{s}{2} \left(\frac{1}{s} - \pi \frac{\cos(\pi s)}{\sin(\pi s)} \right) \\
&= \frac{s}{2} \frac{d}{ds} [\log \pi s - \log \sin(\pi s)] \\
&= \frac{s}{2} \frac{d}{ds} \left[\log \frac{\pi s}{\sin(\pi s)} \right] \\
\stackrel{(c)}{=} &\frac{s}{2} \frac{d}{ds} [\log [s \Gamma(s) \Gamma(1-s)]] \\
&= \frac{s}{2} \frac{d}{ds} [\log \Gamma(1+s) + \log \Gamma(1-s)] \\
\stackrel{(d)}{=} &\frac{s}{2} \frac{d}{ds} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{n} s^{2n} \right] \\
&= \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d}{ds} \left[\frac{\zeta(2n)}{n} s^{2n} \right] \\
&= \frac{s}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{n} 2n s^{2n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \zeta(2n) s^{2n}.
\end{aligned}$$

Das gliedweise Differenzieren im vorletzten Umformungsschritt ist legitim, da $\zeta(2n) \leq \zeta(2) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und man so die geometrische Reihe in s^2 (mit $|s^2| < 1$ wegen $0 < s < \varepsilon < 1$) als absolut konvergente Majorante erhält, womit die gegebene Reihe ebenfalls absolut konvergiert. Koeffizientenvergleich liefert nun

$$(-1)^{n-1} 2^{2n-1} \pi^{2n} \frac{B_{2n}}{(2n)!} = \zeta(2n),$$

was die Behauptung zeigt. \square

(2.5) Korollar

Es gilt

$$\begin{aligned} \zeta(2) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, & \zeta(4) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, & \zeta(6) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}, \\ \zeta(8) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^8} = \frac{\pi^8}{9450}, & \zeta(10) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{10}} = \frac{\pi^{10}}{93555}, & \zeta(12) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{12}} = \frac{691 \pi^{12}}{638512875}. \end{aligned}$$

\diamond

(2.6) Bemerkung

Über die Werte der Zetafunktion an positiven ungeraden ganzen Zahlen ist nicht viel bekannt. Man weiß, dass $\zeta(3)$ irrational ist. \diamond

§3 Die Riemannsche Vermutung

Die Ergebnisse aus §2 lassen vermuten, dass es eine Beziehung zwischen $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$ gibt. Betrachtet man nämlich die aus (2.4) (iii) und (iv) geltenden Werte

$$\begin{aligned} (1) \quad \zeta(1-2n) &= -\frac{B_{2n}}{2n} \\ (2) \quad \zeta(2n) &= \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n-1} B_{2n}}{(2n)!} \pi^{2n}, \end{aligned}$$

sieht man, dass die Werte dieselben Bernoulli-Zahlen enthalten. Schaut man sich das genauer an, indem man (1) in (2) einsetzt, so bekommt man

$$\begin{aligned} \zeta(2n) &= \frac{(-1)^n 2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n-1)!} \zeta(1-2n) \\ \iff (-1)^n \zeta(2n) &= \frac{2^{2n-1} \pi^{2n}}{(2n-1)!} \zeta(1-2n). \end{aligned}$$

Berücksichtigt man noch die ungeraden Zahlen, so erhält man die Darstellung

$$\frac{2^{k-1} \pi^k}{(k-1)!} \zeta(1-k) = \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}} \zeta(k), & \text{falls } k > 0 \text{ mit } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k > 1 \text{ mit } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Nun kann man die Abbildungen

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N}, & k &\mapsto (k-1)! && \text{und} \\ \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{R}, & k &\mapsto \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

durch folgende Funktionen interpolieren:

$$\begin{aligned} \Gamma(k) &= (k-1)! && \text{für alle } k \in \mathbb{N}, \\ \cos\left(\frac{\pi k}{2}\right) &= \begin{cases} (-1)^{\frac{k}{2}}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

So liegt es nahe, die im folgendem Satz beschriebene Funktionalgleichung zu vermuten.

(3.1) Satz

Für alle $s \in \mathbb{C}$ gilt die Identität

$$\frac{2^{s-1} \pi^s}{\Gamma(s)} \zeta(1-s) = \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right) \zeta(s). \quad (13)$$

◇

Das ist die berühmte *Funktionalgleichung der ζ -Funktion*, die 1859 von Riemann in seiner Arbeit „Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe“ bewiesen wurde. Sie setzt also die Werte $\zeta(s)$ und $\zeta(1-s)$ miteinander in Verbindung.

(3.2) Korollar

Aus der Funktionalgleichung (13) ergibt sich die symmetrische Darstellung

$$\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s) = \pi^{-\left(\frac{1-s}{2}\right)} \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right) \zeta(1-s), \quad (14)$$

das heißt die meromorphe Funktion $s \mapsto \pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right) \zeta(s)$ ist symmetrisch bezüglich der Achse $\operatorname{Re}(s) = 1/2$, ist also invariant, wenn man s durch $1-s$ ersetzt. ◇

Beweis

Für den Nachweis brauchen wir nochmal zwei Eigenschaften der Γ -Funktion, die im letztem Vortrag bewiesen wurden.

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}, \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}. \quad (*)$$

$$\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right) = 2^{1-s}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(s), \quad \text{für alle } s \in \mathbb{C} \setminus (-\mathbb{N}_0). \quad (**)$$

Beachte außerdem die Beziehung $\cos(s) = \sin(\pi/2 - s)$.

Dann gilt mit (3.1)

$$\begin{aligned} \cos\left(\frac{\pi s}{2}\right)\zeta(s) &= \frac{2^{s-1}\pi^s}{\Gamma(s)}\zeta(1-s) \\ \iff \sin\left(\pi\frac{(1-s)}{2}\right)\zeta(s) &= \frac{2^{s-1}\pi^s}{\Gamma(s)}\zeta(1-s) \\ \stackrel{(*)}{\iff} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}\zeta(s) &= \frac{2^{s-1}\pi^s}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)2^{s-1}\pi^{-\frac{1}{2}}}\zeta(1-s) \\ \stackrel{(**)}{\iff} \frac{\pi}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\zeta(s) &= \frac{\pi^{s+\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}\zeta(1-s) \\ \iff \pi\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \pi^{s+\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s) \\ \iff \pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) &= \pi^{-(\frac{1-s}{2})}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s). \quad \square \end{aligned}$$

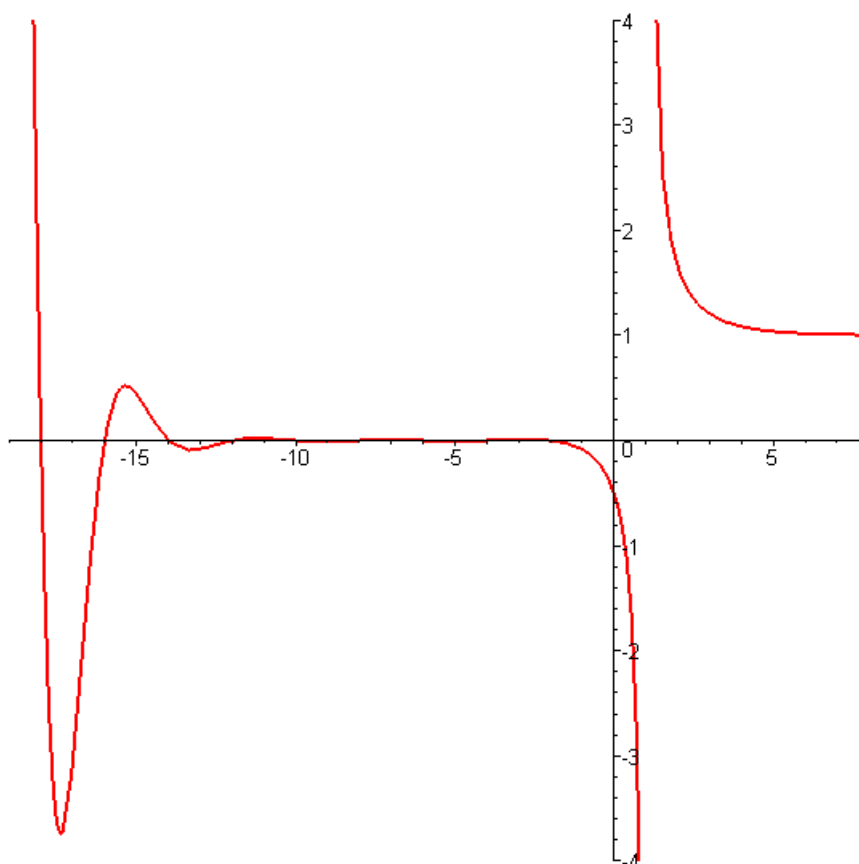
An der Darstellung (14) kann man jetzt abschließend die Nullstellen der ζ -Funktion untersuchen.

1.Fall: $\sigma > 1$.

Ist der Realteil größer eins, so ist $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1-p^{-s}}$ nach (1.3). Die Funktion verschwindet nicht, da das Produkt konvergent ist und seine einzelnen Glieder nicht null sind. Damit existieren keine Nullstellen für $\sigma > 1$.

2.Fall: $\sigma < 0$.

Die Funktion $s \mapsto \Gamma(s/2)$ hat Polstellen bei $s = -2, -4, -6, \dots$. An diesen Stellen muss ζ Nullstellen haben um die Polstellen zu kompensieren, da die rechte Seite der Gleichung (14) dort endliche Werte annimmt. (Folgt auch direkt aus (2.4) (ii))

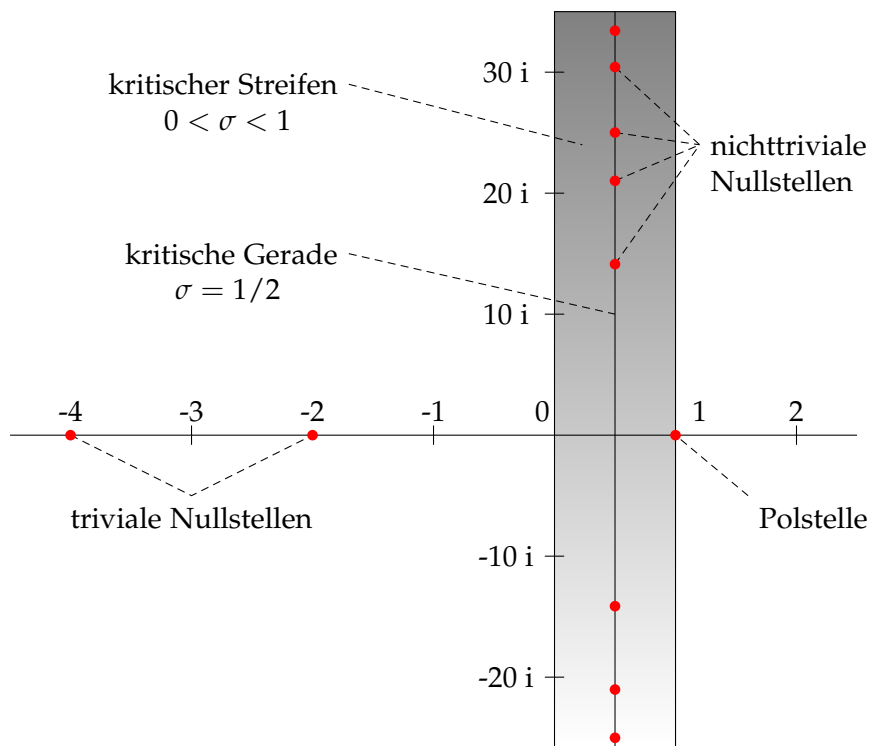
 ζ auf der reellen Achse

Zusammenfassend hat die ζ -Funktion

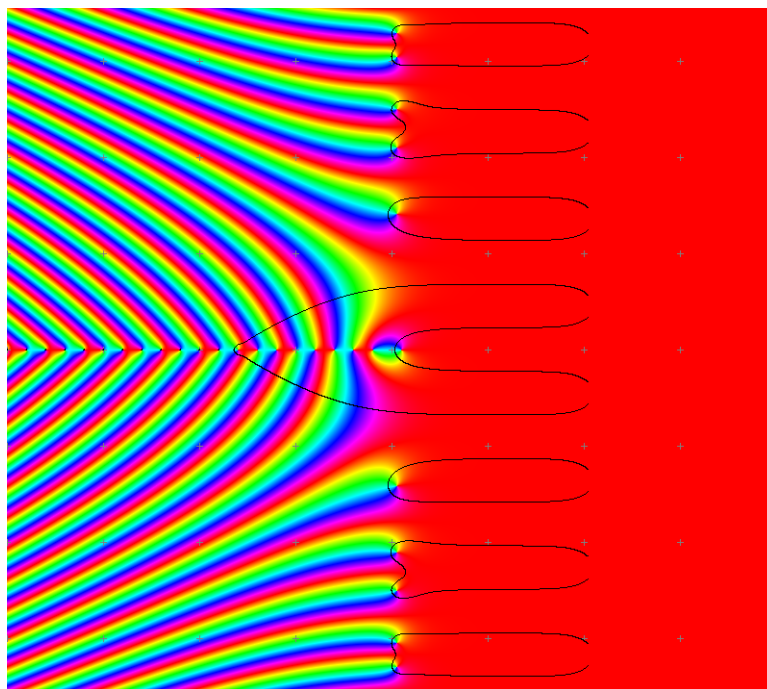
- eine einfache Polstelle bei $s = 1$,
- einfache Nullstellen bei $s = -2, -4, -6, \dots$ (die sog. „trivialen Nullstellen“),
- und sonst Nullstellen höchstens in dem „kritischen Streifen“ $0 < \sigma < 1$, wo sie in der Tat unendlich viele besitzt. (G. Hardy 1914)

Die dem Absolutbetrag nach kleinsten Nullstellen in dem kritischen Streifen sind

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \pm 14,134725 \dots i, \\ & \frac{1}{2} \pm 21,022040 \dots i, \\ & \frac{1}{2} \pm 25,010856 \dots i, \\ & \frac{1}{2} \pm 30,424878 \dots i. \end{aligned}$$



Offensichtlich haben die hier dargestellten Nullstellen in dem kritischen Streifen alle den Realteil $1/2$.



Die zuletzt gezeigte Grafik stellt die Zetafunktion auf $[-40, 40] \times [-40i, 40i]$ dar. Die Farben geben dabei das Argument von ζ an, das heißt die Phase φ der komplexen Zahl $\zeta(s) = r \cdot e^{i\varphi}$, wobei $r = |s| = \sqrt{\sigma^2 + t^2}$ ist. (Rot-Gelb $\hat{=}$ $0^\circ - 90^\circ$, Gelb-Grün $\hat{=}$ $90^\circ - 180^\circ$, Grün-Blau $\hat{=}$ $180^\circ - 270^\circ$, Blau-Rot $\hat{=}$ $270^\circ - 360^\circ$) Die Nullstellen kann man am Farbverlauf erkennen. Da wo sich das komplette Farbspektrum trifft (außer in 1), befinden sich die Nullstellen von ζ . Alle in dieser Grafik erkennbaren Nullstellen liegen auf der reellen negativen Achse und auf der senkrechten kritischen Linie $\sigma = 1/2$. Die schwarzen Linien zeigen, wo $|\zeta(s)| = 1$ gilt.

Die Vermutung von Bernhard Riemann 1859:

Alle nicht-trivialen Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion liegen auf der Geraden

$$\mathcal{G} = \left\{ \sigma + it \mid \sigma = \frac{1}{2} \right\}.$$

„... Hieron wäre allerdings ein strenger Beweis zu wünschen; ich habe indess die Aufsuchung desselben nach einigen flüchtigen vergeblichen Versuchen vorläufig bei Seite gelassen, da er für den nächsten Zweck meiner Untersuchung entbehrlich schien. ...“
Riemann¹

Bis heute sind etwa 10^{13} Nullstellen im kritischen Streifen berechnet worden. Alle haben den Realteil $1/2$. Die Vermutung ist weder bewiesen noch widerlegt worden und ist eines der bedeutendsten ungelösten Probleme der Mathematik. Es ist sogar ein Preisgeld des Clay Mathematics Institute in Höhe von 1 Million Dollar auf den Beweis ausgesetzt. Viele Resultate der Mathematik können heute nur aufgrund der Riemannhypothese bewiesen werden. Das wohl bekannteste Resultat kommt aus dem Bereich der Zahlentheorie.

— Die Riemannsche Vermutung im Zusammenhang mit den Primzahlen —

Die Primzahlfunktion ist definiert durch

$$\pi(x) := \#\{p \in \mathbb{P} \mid p \leq x\}.$$

¹Bernhard Riemann: Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe, Berlin 1859 S.4

Die Funktion gibt die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe x an. Desweiteren wird mit

$$Li(x) := \int_2^x \frac{dt}{\log(t)},$$

der sogenannte *Integrallogarithmus* bezeichnet, der die beste Approximation für $\pi(x)$ liefert. Es gilt der Primzahlsatz (verbesserte Version)

$$\pi(x) \sim Li(x) \quad \text{für } x \rightarrow \infty.$$

Die Güte der Approximation			
x	$\pi(x)$	$[Li(x)]$	$[Li(x)] / \pi(x) - 1$
10	4	5	0.25
10^2	25	29	0.16
10^3	168	176	0.048
10^4	1 229	1 245	0.013
10^5	9 592	9 628	$3.8 \cdot 10^{-3}$
10^6	78 498	78 626	$1.6 \cdot 10^{-3}$
10^8	5 761 455	5 762 208	$1.3 \cdot 10^{-4}$
10^{10}	455 052 511	455 055 613	$6.8 \cdot 10^{-6}$
10^{12}	37 607 912 018	37 607 950 279	$1.0 \cdot 10^{-6}$

Die Riemannsche Vermutung liefert die folgende Abschätzung für den Primzahlsatz: (H. von Koch 1901)

$$|\pi(x) - Li(x)| \leq C \sqrt{x} \log(x) \quad \text{mit } C > 0.$$

Genauer:

(3.3) Satz

Folgende Aussagen sind äquivalent:

- (i) $\pi(x) = Li(x) + \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2}} \log x)$
- (ii) $\zeta(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\sigma > 1/2$. ◇

Literatur

- [1] P. Basieux: *Die Top Seven der mathematischen Vermutungen*, Rowohlt 2004
- [2] H.E. Edwards: *Riemann's zeta function*, Dover 1991
- [3] B. Klopsch: *Primzahlen und die riemannsche Vermutung*, Düsseldorf 2005
- [4] A. Krieg: *Analysis IV*, Aachen 2005
- [5] B. Riemann: *Über die Anzahl der Primzahlen unter einer gegebenen Größe*, Berliner Akademie 1859
- [6] D.B. Zagier: *Zetafunktionen und quadratische Körper*, Springer 1981