Dirichletsche L-Reihen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 12.02.2008

Till Dieckmann

Der nachfolgende Text soll eine Einführung in die Theorie der Dirichletschen *L-Reihen* geben. Hauptergebnis wird ein Beweis des berühmten Dirichletschen Primzahlsatzes sein.

§ 0 Vorbereitungen

- Es sei
$$\mathbb{P} := \{p \in \mathbb{N} : p \text{ prim}\} \subset \mathbb{N}$$
die Menge der Primzahlen.
- Für $\sigma_0 \in \mathbb{R}$ bezeichnen wir mit $\sigma > \sigma_0$ die Halbebene
$$\{z \in \mathbb{C}, \mathrm{Re}(z) > \sigma_0\}.$$
- Satz von der Eulerschen Produktdarstellung Dirichletscher Reihen:

  Sei $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ eine zahlentheoretische Funktion und D_f die zugehörige Dirichletreihe mit absoluter Konvergenzabzisse $\sigma_\mathrm{a} < \infty$. Dann gilt
$$f \text{ ist multiplikativ } \Longleftrightarrow D_f(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{f(p^r)}{p^{rs}} \text{ auf } \sigma > \sigma_\mathrm{a}.$$
  In diesem Fall konvergiert das Produkt absolut lokal gleichmäßig auf $\sigma > \sigma_\mathrm{a}$.
- Für $N \in \mathbb{N}$ definiert man
$$\widehat{\mathbb{Z}_N^\times} := \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_N^\times, \mathbb{C}^\times).$$
  Elemente aus $\widehat{\mathbb{Z}_N^\times}$ heissen *Dirichletsche Charaktere* modulo N.

  Für den Rest des Textes fassen wir einen Dirichletschen Charakter modulo N allerdings als Abbildung
$$\chi : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$
  auf, welche die drei Eigenschaften

1. $\chi(n) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{ggT}(n, N) > 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$,
2. $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$,
3. $\chi(n) = \chi(m)$ für alle $m, n \in \mathbb{Z}$ mit $n \equiv_N m$

erfüllt. Man überzeugt sich, dass die Menge dieser Abbildungen unter punktweiser Multiplikation eine Gruppe bildet, welche isomorph zu $\widehat{\mathbb{Z}_N^\times}$ ist. Speziell bezeichnen wir mit χ_0 den sogenannten Hauptcharakter

$$\begin{aligned}\chi_0 : \mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{C},\\ n &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathrm{ggT}(n, N) = 1,\\ 0, & \text{falls } \mathrm{ggT}(n, N) > 1.\end{cases}\end{aligned}$$

Insbesondere gilt für $p \in \mathbb{P}$:

$$\chi_0(p) = \begin{cases} 0, & \text{falls } p \mid N,\\ 1, & \text{falls } p \nmid N.\end{cases}$$

- Produktdarstellung der Eulerschen φ-Funktion:

  Für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt
  $$\varphi(N) = N \cdot \prod_{\substack{p \in \mathbb{P}\\ p \mid N}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Wir wiederholen noch einige Eigenschaften von Dirichletschen Charakteren, die wir im Verlaufe des Textes benutzen werden:

- $|\chi(n)| \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, wobei Gleichheit genau dann, wenn $\mathrm{ggT}(n, N) = 1$.
- Ist χ ein Dirichletscher Charakter modulo N und $j \in \mathbb{Z}$, dann gilt
  $$\sum_{n=j}^{j-1+N} \chi(n) = \begin{cases} \varphi(N), & \text{falls } \chi = \chi_0,\\ 0, & \text{falls } \chi \neq \chi_0.\end{cases} \tag{C1}$$
- Die Orthogonalitätsrelationen:

  Sind χ_1, χ_2 Dirichletsche Charaktere modulo N und $j \in \mathbb{Z}$, so hat man
  $$\frac{1}{\varphi(N)} \cdot \sum_{n=j}^{j-1+N} \chi_1(n)\overline{\chi_2(n)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } \chi_1 = \chi_2,\\ 0, & \text{falls } \chi_1 \neq \chi_2.\end{cases} \tag{C2}$$

Sind $a, b \in \mathbb{Z}$ mit $\operatorname{ggT}(b, N) = 1$, dann gilt

$$\frac{1}{\varphi(N)} \cdot \sum_{\chi} \chi(a)\overline{\chi(b)} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a \equiv_N b, \\ 0, & \text{falls } a \not\equiv_N b. \end{cases} \tag{C3}$$

Hier und im Folgenden bedeutet $\sum_\chi$ Summation über alle Dirichletschen Charaktere bezüglich eines fest gewählten Moduls N, analog für $\prod_\chi$. (vergleiche auch Vortrag 13 *„Charaktere"*)

§1 Konvergenzbereiche und meromorphe Fortsetzung

In diesem Abschnitt werden wir die einem Dirichletschen Charakter zugeordnete L-Reihe definieren und eine Produktentwicklung derselben angeben. Dabei sei ab jetzt $N \in \mathbb{N}$ fest gewählt, und χ ein Dirichletscher Charakter modulo N.

— *Definition und Beispiel* —

(1.1) Definition (L-Reihe)
Die formal definierte Reihe

$$L_\chi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}, \quad s \in \mathbb{C} \tag{1}$$

nennt man die *L-Reihe* zu χ. Im Konvergenzfall nennt man die durch diese Reihe dargestellte Funktion L_χ auch *L-Funktion* zu χ. ◇

(1.2) Bemerkungen
Wegen $|\chi| \leq 1$ (vergleiche Paragraph 0) konvergiert die Reihe in (1) wegen des Weierstraß'schen Majorantenkriteriums absolut lokal gleichmäßig mindestens auf $\sigma > 1$ mit der Zetareihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ als konvergenter Majorante und definiert dort somit nach dem Satz von Weierstraß eine holomorphe Funktion. In der Notation aus Vortrag 8 *„Dirichletreihen I"* ist (1) also die der Folge $(\chi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ zugeordnete Dirichletreihe, das heißt $L_\chi = D_\chi$. Speziell für $N = 1$ und $\chi \equiv 1$ ergibt sich

$$L_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \zeta(s).$$

Man erhält also als Spezialfall die *Riemannsche Zetafunktion*. ◇

Aus einem früheren Vortrag kennen wir bereits eine interessante L-Reihe, welche in Beziehung zu der Anzahl der Darstellungen natürlicher Zahlen als Summe zweier Quadratzahlen steht:

(1.3) Beispiel
Wir definieren

$$\chi_4 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C},$$
$$n \mapsto \begin{cases} 1, & \text{falls } n \equiv_4 1, \\ -1, & \text{falls } n \equiv_4 -1, \\ 0, & \text{falls } n \equiv_2 0. \end{cases}$$

Die L-Reihe zu χ_4 ist dann

$$L_{\chi_4}(s) = 1 - \frac{1}{3^s} + \frac{1}{5^s} - \frac{1}{7^s} + \ldots .$$

◇

— Produktentwicklung —

In diesem Abschnitt wollen wir nun Produktentwicklungen für L_χ studieren. Für die Riemannsche Zetafunktion kennen wir auf $\sigma > 1$ bereits die absolut konvergente Produktdarstellung

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} (1 - p^{-s})^{-1}.$$

(vergleiche auch Vortrag 9 *„Dirichletreihen II"*)

Wir erhalten folgendes Lemma:

(1.4) Lemma
Auf $\sigma > 1$ gilt

$$L_\chi(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}. \tag{2}$$

Inbesondere für χ_0 hat man

$$L_{\chi_0}(s) = \zeta(s) \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid N}} (1 - p^{-s}). \tag{3}$$

Die Produkte konvergieren jeweils absolut lokal gleichmäßig auf $\sigma > 1$. ◇

Beweis
Da χ sogar vollständig multiplikativ ist, besitzt L_χ nach Vortrag 9 *„Dirichletreihen II"* wegen der absoluten Konvergenz auf $\sigma > 1$ die Eulersche Produktdarstellung

$$\begin{aligned} L_\chi(s) &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi(p^r)}{p^{rs}} \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\chi(p)^r}{p^{rs}} \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \sum_{r=0}^{\infty} \left(\frac{\chi(p)}{p^s}\right)^r \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}}, \end{aligned}$$

wenn man

$$\chi(p^r) = \chi(p)^r$$

sowie

$$\left|\frac{\chi(p)}{p^s}\right| \leq \frac{1}{p^{\mathrm{Re}(s)}} \leq \frac{1}{2}$$

für alle $p \in \mathbb{P}, r \in \mathbb{N}_0$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ beachtet und die geometrische Reihe verwendet. Weiter gilt:

$$\begin{aligned} L_{\chi_0}(s) &= \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-\chi_0(p)p^{-s})^{-1} \\ &= \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid N}} (1-\underbrace{\chi_0(p)}_{=1}p^{-s})^{-1} \cdot \underbrace{\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\mid N}} (1-\underbrace{\chi_0(p)}_{=0}p^{-s})^{-1}}_{=1} \\ &= \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid N}} (1-p^{-s})^{-1} \cdot \underbrace{\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\mid N}} (1-p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\mid N}} (1-p^{-s})}_{=1} \\ &= \prod_{p\in\mathbb{P}} (1-p^{-s})^{-1} \cdot \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\mid N}} (1-p^{-s}) \\ &= \zeta(s) \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\mid N}} (1-p^{-s}). \end{aligned}$$

Die Umordnung ist wegen der absoluten Konvergenz der Produkte erlaubt. □

Inbesondere sieht man also an der Produktdarstellung, dass L_χ immer nullstellenfrei auf $\sigma > 1$ ist, denn jeder Faktor im Produkt ist von 0 verschieden und das Produkt konvergiert.

— *Meromorphe Fortsetzung von L_{χ_0} auf $\mathbb{C}$* —

Wir untersuchen L_{χ_0} nun genauer:

(1.5) Korollar
Es existiert eine meromorphe Fortsetzung von L_{χ_0} auf ganz $\mathbb{C}$. Diese ist holomorph bis auf einen einfachem Pol in $s = 1$ mit Residuum

$$\operatorname{Res}_{s=1} L_{\chi_0} = \frac{\varphi(N)}{N}. \qquad \diamond$$

Beweis
Nach Vortrag 12 *„Riemannsche Zetafunktion"* hat ζ in $\mathbb{C}$ genau einen Pol in $s = 1$ mit Residuum 1. Da

$$s \mapsto \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p|N}} (1 - p^{-s})$$

eine ganze Funktion ist, definiert die rechte Seite von (3) eine meromorphe Fortsetzung von L_{χ_0}. Wegen

$$\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p|N}} (1 - p^{-1}) \neq 0$$

hat L_{χ_0} also auch genau einen Pol in $s = 1$. Um das Residuum an dieser Stelle zu bestimmen, beachte man noch die Produktdarstellung der Eulerschen φ-Funktion:

$$\varphi(N) = N \cdot \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p|N}} (1 - p^{-1}).$$

Dann folgt zusammen mit 1.4 und der Residuenregel für einfache Pole

$$\operatorname{Res}_{s=1} L_{\chi_0} = \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p|N}} (1 - p^{-1}) \cdot \underbrace{\operatorname{Res}_{s=1} \zeta}_{=1} = \frac{\varphi(N)}{N}.$$

□

— *Holomorphe Fortsetzung von L_χ auf die rechte Halbebene* —

Wir wollen nun zeigen, dass für $\chi \neq \chi_0$ die Dirichletreihe L_χ sogar auf $\sigma > 0$ konvergiert.

(1.6) Satz
Die Funktion L_χ ist für $\chi \neq \chi_0$ holomorph auf $\sigma > 0$. ◇

Beweis
Sei zunächst $M \in \mathbb{N}, M \geq N$. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=1}^{M} \chi(n)\right| &= \left|\sum_{n=1}^{N\lfloor \frac{M}{N} \rfloor} \chi(n) + \sum_{n=N\lfloor \frac{M}{N} \rfloor+1}^{M} \chi(n)\right| \\
&= \left|\sum_{j=1}^{\lfloor \frac{M}{N} \rfloor} \underbrace{\sum_{n=(j-1)N+1}^{jN} \chi(n)}_{=0 \text{ nach (C1)}} + \sum_{n=N\lfloor \frac{M}{N} \rfloor+1}^{M} \chi(n)\right| \\
&= \left|\sum_{n=N\lfloor \frac{M}{N} \rfloor+1}^{M} \chi(n)\right| \\
&\leq \sum_{n=N\lfloor \frac{M}{N} \rfloor+1}^{M} |\chi(n)| \\
&\leq \sum_{n=N\lfloor \frac{M}{N} \rfloor+1}^{M} 1 \\
&= M - N\left\lfloor \frac{M}{N} \right\rfloor \\
&\leq M - N\left(\frac{M}{N} - 1\right) \\
&= N.
\end{aligned}$$

Die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \chi(n)$$

divergiert, denn wegen $|\chi(p)| = 1$ für alle $p \in \mathbb{P}, p \nmid N$ ist $(\chi(n))_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge. Wir können also die Formel für die Konvergenzabzisse σ_b Dirichletscher Reihen anwenden (vergleiche *„Dirichletreihen I“*) und erhalten mit dem oben Gezeigten

$$\sigma_b = \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln \left| \sum_{j=1}^{n} \chi(j) \right|}{\ln n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln N}{\ln n} = 0,$$

also $\sigma_b \le 0$.
Die Holomorphie auf $\sigma > 0$ ist bereits im Vortrag 8 *„Dirichletreihen I“* bewiesen worden. □

Für $a \in (0,1]$ definiert man auf $\sigma > 1$ die *Hurwitz'sche Zetafunktion* durch

$$\zeta(s,a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+a)^s}.$$

Nach *„Apostol, Introduction to Analytic Number Theory“* besitzt sie eine meromorphe Fortsetzung auf $\mathbb{C}$ mit einem einfachen Pol in $s = 1$ mit Residuum 1. Mit dieser Kenntnis erhalten wir folgenden

(1.7) Satz
Die Funktion L_χ besitzt eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$, und für $\chi \neq \chi_0$ stellt diese sogar eine ganze Funktion dar. Genauer gilt

$$L_\chi(s) = N^{-s} \sum_{r=1}^{N} \chi(r)\zeta(s, \frac{r}{N})$$

auf der gesamten Ebene. ◇

Beweis
Jedes $n \in \mathbb{N}$ besitzt eine eindeutige Darstellung der Form $n = qN + r$ für $r, q \in \mathbb{N}_0$, wobei $0 \le r < N$. Da $L_\chi(s)$ für $\sigma > 1$ absolut konvergiert, erhalten wir nach einer Umordnung der Summation:

$$\begin{aligned} L_\chi(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s} \\ &= \sum_{r=1}^{N} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\chi(qN+r)}{(qN+r)^s} \\ &= N^{-s} \sum_{r=1}^{N} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{\chi(r)}{(q+\frac{r}{N})^s} \\ &= N^{-s} \sum_{r=1}^{N} \chi(r)\zeta(s, \frac{r}{N}). \end{aligned}$$

Aus der meromorphen Fortsetzbarkeit von $\zeta(\cdot, \frac{r}{N})$ folgt die von L_χ. Speziell für $\chi \neq \chi_0$ erhält man noch

$$\operatorname{Res}_{s=1} L_\chi = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} \chi(r) \operatorname{Res}_{s=1} \zeta(\cdot, \frac{r}{N}) = \frac{1}{N} \sum_{r=1}^{N} \chi(r) = 0$$

wegen (C1). Das heißt, L_χ ist eine ganze Funktion. □

§2 Der Dirichletsche Primzahlsatz

Der Dirichletsche Primzahlsatz besagt, dass in jeder arithmetischen Folge

$$(Nk + a)_{k \in \mathbb{N}} \ \text{ mit } \ \operatorname{ggT}(a, N) = 1$$

unendlich viele Primzahlen auftreten. Obwohl die Formulierung einfach erscheint, benötigen wir für den Beweis jedoch noch einige Vorarbeit.

Nach 1.6 ist L_χ für $\chi \neq \chi_0$ holomorph auf der rechten Halbebene, inbesondere existiert also $L_\chi(1)$. Im Beweis des Primzahlsatzes wird wesentlich verwendet werden, dass dieser Wert von 0 verschieden ist. Wir zeigen nun, dass man sich für den Beweis dieser Aussage auf reelle Charaktere beschränken kann. Ausgangspunkt unserer Überlegungen wird die auf $\sigma > 0$ meromorphe Funktion

$$s \mapsto F(s) = \prod_{\chi} L_\chi(s)$$

sein, wobei sich das Produkt über die $\varphi(N)$ verschiedenen Dirichletschen Charaktere modulo N erstreckt. Man beachte hierbei den einfachen Pol von L_{χ_0} an der Stelle $s = 1$.

(2.1) Lemma
Ist $L_\chi(1) = 0$ für $\chi \neq \chi_0$, so ist χ reell. ◇

Beweis
Sei F die zuvor definierte Funktion. Ersetzen wir die auftretenden Faktoren durch ihre Produktentwicklung gemäß 1.4, so erhalten wir auf $\sigma > 1$

$$\begin{aligned} F(s) &= \prod_{\chi} \prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}} \\ &= \prod_{p \in \mathbb{P}} \prod_{\chi} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}, \end{aligned}$$

da die Anzahl der Charaktere modulo N nur endlich ist. Nach der Bemerkung zu 1.4 ist L_χ für jeden Charakter χ auf $\sigma > 1$ nullstellenfrei. Es bezeichne im folgenden Log den Hauptzweig des Logarithmus auf $\mathbb{C}$. Man hat

$$\frac{1}{1-z} \in \mathbb{C}_- \text{ für } |z| < 1.$$

Somit ist $z \mapsto \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right)$ holomorph auf $K_1(0)$ und man hat dort die Potenzreihendarstellung

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-z}\right) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{z^j}{j}.$$

Da für beliebiges χ das Produkt

$$\prod_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{1 - \frac{\chi(p)}{p^s}}$$

nach 1.4 auf $\sigma > 1$ absolut lokal gleichmäßig gegen eine nullstellenfreie Funktion konvergiert, konvergiert somit nach einem Satz aus der Höheren Funktionentheorie auch

$$\sum_{p \in \mathbb{P}} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\right)$$

absolut lokal gleichmäßig auf $\sigma > 1$ und ist somit ein holomorpher Logarithmus g_χ zu L_χ und $g_F := \sum_\chi g_\chi$ ein holomorpher Logarithmus zu F. Wir erhalten damit

$$\begin{aligned}
g_F(s) = \;& \sum_\chi \sum_{p \in \mathbb{P}} \operatorname{Log}\left(\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}}\right) \\
= \;& \sum_\chi \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\chi(p)^r}{p^{rs}} \\
= \;& \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rp^{rs}} \sum_\chi \chi(p^r) \\
= \;& \sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{rp^{rs}} \sum_\chi \chi(p^r) \underbrace{\overline{\chi(1)}}_{=1} \\
\overset{(C3)}{=} \;& \underbrace{\sum_{\substack{(p,r) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N} \\ p^r \equiv_N 1}} \frac{\varphi(N)}{rp^{rs}}}_{\geq 0 \text{ für } s > 1}.
\end{aligned}$$

Für $s > 1$ ist also $F(s) = \exp g_F(s) \geq \exp(0) = 1$ und im Falle der Existenz somit $\lim_{s\to 1} F(s) \geq 1$. Nach 1.5 und 1.6 ist F holomorph auf $\sigma > 0$ mit eventueller Ausnahme von $s = 1$, denn wie oben bereits erwähnt, hat L_{χ_0} hier einen einfachen Pol. Wäre nun $L_{\chi_1}(1) = 0 = L_{\chi_2}(1)$ für zwei verschiedene Charaktere $\chi_1, \chi_2 \neq \chi_0$, so wäre die Singularität in $s = 1$ hebbar mit $F(1) = 0$. Dies ist ein Widerspruch zu $\lim_{s\to 1} F(s) \geq 1$. Es kann also nur höchstens ein $\chi \neq \chi_0$ mit $L_\chi(1) = 0$ geben. Im Falle der Existenz eines solchen χ ist also auch wegen der Stetigkeit der komplexen Konjugation

$$L_{\overline{\chi}}(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\frac{\chi(n)}{n}} = \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n}} = \overline{0} = 0,$$

das heißt $\chi = \overline{\chi}$ und somit reell. □

Nachdem wir das Problem nun auf den Fall eines reellen Charakters reduziert haben, können wir nun folgenden Satz beweisen:

(2.2) Satz
Ist $\chi \neq \chi_0$ reell, so ist $L_\chi(1) \neq 0$. ◇

Beweis
Weil dieser Satz so wichtig ist, geben wir drei verschiedene Beweisvarianten an.

Angenommen, es existiert ein $\chi \neq \chi_0$ mit $L_\chi(1) = 0$. Da χ reell ist, folgt insbesondere $\chi(\mathbb{N}) \subseteq \{-1, 0, 1\}$, da Charaktere auf endlichen abelschen Gruppen auf Einheitswurzeln abbilden. (vergleiche auch Vortrag 13 *„Charaktere“*)

— *Variante I* —

Die Funktion $s \mapsto L_{\chi_0}(2s)$ ist auf $\sigma > \frac{1}{2}$ nullstellenfrei, wie bereits aus der Bemerkung nach 1.4 im Abschnitt über Produktentwicklung folgt. Wegen des einfachen Pols von L_{χ_0} und der Nullstelle von L_χ ist $L_\chi L_{\chi_0}$ noch holomorph fortsetzbar in $s = 1$. Die Abbildung Φ definiert durch

$$s \mapsto \Phi(s) = \frac{L_\chi(s) L_{\chi_0}(s)}{L_{\chi_0}(2s)}$$

ist also holomorph auf $\sigma > \frac{1}{2}$. Indem man die in Φ auftretenden Faktoren durch ihre Produktentwicklung gemäß 1.4 ersetzt, so erhält man auf $\sigma > 1$ unter Beachtung von $\chi(p) = \chi_0(p) = 0$ für $p \in \mathbb{P}$ mit $p|N$ sowie $\chi_0(p) = 1$ für $p \in \mathbb{P}$ mit $p \not| N$ die Identität

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1-\chi_0(p)p^{-2s}}{(1-\chi(p)p^{-s})(1-\chi_0(p)p^{-s})} \\
&= \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\not| N}} \frac{1-p^{-2s}}{(1-\chi(p)p^{-s})(1-p^{-s})} \\
&= \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\not| N}} \frac{1+p^{-s}}{1-\chi(p)p^{-s}} \\
&= \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=1}} \frac{1+p^{-s}}{1-p^{-s}} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=-1}} \frac{1+p^{-s}}{1+p^{-s}} \\
&= \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=1}} (1+p^{-s}) \sum_{j=0}^{\infty} p^{-js} \\
&= \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=1}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} p^{-js} + \sum_{j=0}^{\infty} p^{-(j+1)s} \right) \\
&= \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=1}} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{2}{p^{js}} \right).
\end{aligned}$$

Wir definieren nun die multiplikative Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$\begin{aligned}
a_1 &= 1, \\
a_{p^j} &= \begin{cases} 2, & \text{falls } \chi(p) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}
\end{aligned}$$

für $p \in \mathbb{P}, j \in \mathbb{N}$. Nach dem Satz über die Eulersche Produktdarstellung gilt also

$$\Phi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

auf $\sigma > 1$. Wegen der Holomorphie auf $\sigma > \frac{1}{2}$ kann man Φ in eine Potenzreihe um $s_0 = 2$ mit Konvergenzradius mindestens $\frac{3}{2}$ entwickeln, da $K_{3/2}(2)$ im Holomorphiegebiet von Φ enthalten ist.

Es ergibt sich (unter Beachtung gliedweiser Differentiation Dirichletscher Reihen)

$$\Phi(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi^{(k)}(2)\frac{(s-2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-s)^k}{k!} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n(\ln n)^k}{n^2} \text{ für alle } s \in K_{\frac{3}{2}}(2).$$

Wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ stellt Φ auf dem Intervall $(\frac{1}{2}, 2) \subseteq \mathbb{R}$ eine monoton fallende Funktion dar, auf das wir vorher noch nicht schliessen konnten, da die Dirichletreihe zu Φ nur auf $\sigma > 1$ gegeben war. Dort ist also

$$\Phi(s) \geq \Phi(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \geq a_1 = 1,$$

inbesondere also (im Falle der Existenz) $\lim_{s\to\frac{1}{2}} \Phi(s) \geq 1$.

Im Widerspruch dazu steht aber

$$\lim_{s\to\frac{1}{2}} \Phi(s) = \lim_{s\to\frac{1}{2}} \frac{L_\chi(s)L_{\chi_0}(s)}{L_{\chi_0}(2s)} = 0,$$

wegen des Pols von $s \mapsto L_{\chi_0}(2s)$ an der Stelle $s = \frac{1}{2}$.

— *Variante II* —

Wir wollen den Satz von Landau aus dem Vortrag *„Dirichletreihen II“* zur Beweisführung anwenden. Wir definieren die auf $\sigma > 0$ meromorphe Funktion ψ durch

$$\psi(s) = L_\chi(s)\zeta(s).$$

Aufgrund der Faltungsformel kann man auf $\sigma > 1$ die Dirichletreihe zu ψ direkt angeben, weil L_χ und ζ dort absolut konvergieren. Man erhält

$$\psi(s) = D_\rho(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(n)}{n^s} \text{ mit } \rho(n) = \sum_{\substack{d\in\mathbb{N} \\ d|n}} \chi(d) \text{ für alle } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Wir wollen mehr über die Koeffizientenfolge $(\rho(n))_{n\in\mathbb{N}}$ erfahren. Dazu setzen wir die für L_χ und ζ aus 1.4 bekannten, auf $\sigma > 1$ konvergenten, Produktentwicklungen ein und erhalten schließlich nach einer wegen der absoluten Konvergenz des

Produktes erlaubten Umordnung

$$
\begin{aligned}
\psi(s) &= \prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{(1-\chi(p)p^{-s})(1-p^{-s})} \\
&= \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=1}} \frac{1}{(1-p^{-s})^2} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=0}} \frac{1}{1-p^{-s}} \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=-1}} \frac{1}{1-p^{-2s}} \\
&= \left(\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{j+1}{p^{js}} \right) \left(\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=0}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{js}} \right) \left(\prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ \chi(p)=-1}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{p^{2js}} \right)
\end{aligned}
$$

Wir definieren die multiplikative Folge $(\tilde{\rho}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$
\begin{aligned}
\tilde{\rho}_1 &= 1, \\
\tilde{\rho}_{p^j} &= \begin{cases} j+1, & \text{falls } \chi(p)=1, \\ 1, & \text{falls } \chi(p)=0, \\ 0, & \text{falls } \chi(p)=-1, \text{ und } j \text{ ungerade} \\ 1, & \text{falls } \chi(p)=-1 \text{ und } j \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

für $p \in \mathbb{P}, j \in \mathbb{N}$. Wieder erhalten wir mit dem Satz über die Eulersche Produktdarstellung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(n)}{n^s} = \psi(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{\rho}(n)}{n^s}$$

auf $\sigma > 1$. Mit dem Eindeutigkeitssatz folgt $\rho_n = \tilde{\rho}_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, woraus sich sofort

$$\rho(n) \geq 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

ergibt. Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{e_i}$ die Primfaktorzerlegung mit paarweise verschiedenen Primzahlen $p_i, 1 \leq i \leq k$, und natürlichen Zahlen $e_i, 1 \leq i \leq k$, dann erhält man

$$\rho(n^2) = \rho\left(\prod_{i=1}^{k} p_i^{2e_i}\right) = \prod_{i=1}^{k} \rho(p_i^{2e_i}) \geq 1.$$

Wegen $L_\chi(1) = 0$ hat ψ in $s = 1$ eine hebbare Singularität, da der Pol von ζ dort nur einfach ist. Deshalb ist ψ holomorph auf $\sigma > 0$. Es bezeichne σ_b die Abzisse der bedingten Konvergenz der Reihe aus (4). Wir nehmen $\sigma_\mathrm{b} > 0$ an. Dann wäre nach dem Identitätssatz für holomorphe Funktionen

$$\psi(s) = D_\rho(s)$$

auf $\sigma > \sigma_\mathrm{b}$. Da die Koeffizienten der Reihe aus (4) nicht negativ sind, folgt aus dem Satz von Landau, dass D_ρ keine holomorphe Fortsetzung in $s = \sigma_\mathrm{b}$ besitzt. Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass ψ eine holomorphe Fortsetzung von D_ρ auf $\sigma > 0$ ist, und somit ergibt sich schliesslich $\sigma_\mathrm{b} \leq 0$. Es folgt, dass die Reihe (4) sogar auf der ganzen rechten Halbebene konvergent ist. Wegen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(n)}{n^{\frac{1}{2}}} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\rho(n^2)}{n} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$$

ist das aber ein Widerspruch.

— *Variante III* —

Die dritte Variante kommt ohne die Reduktion auf den Fall eines reellen χ aus. Wir knüpfen an die im Beweis zu 2.1 bereits gezeigte auf $\sigma > 1$ gültige Identität

$$g_F(s) = \sum_{\substack{(p,r) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N} \\ p^r \equiv_N 1}} \frac{\varphi(N)}{r p^{rs}} \tag{5}$$

an. Stetigkeit der Exponentialfunktion liefert

$$\begin{aligned}
F(s) &= \exp\left(\sum_{\substack{(p,r) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N} \\ p^r \equiv_N 1}} \frac{\varphi(N)}{r p^{rs}} \right) \\
&= \prod_{p \in \mathbb{P}} \exp\left(\sum_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ p^r \equiv_N 1}} \frac{\varphi(N)}{r p^{rs}} \right) \\
&= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\sum_{\substack{r \in \mathbb{N} \\ p^r \equiv_N 1}} \frac{\varphi(N)}{r p^{rs}} \right)^j \right) \\
&= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{l=1}^{\infty} \frac{c_{jlp}}{p^{ls}} \right) \\
&= \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{jlp}}{j!} \right) \frac{1}{p^{ls}} \right)
\end{aligned}$$

für nichtnegative $c_{jlp} \in \mathbb{R}$ und $l, j \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$. Dabei beachte man noch, dass wegen der absoluten Konvergenz von $\sum_{r\in\mathbb{N}, p^r \equiv_N 1} \frac{\varphi(N)}{rp^{rs}}$ die Cauchy'sche Produktformel angewandt werden kann und man beliebig umordnen darf. Definiert man nun wiederum die multiplikative Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch

$$a_1 = 1,$$
$$a_{p^l} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c_{jlp}}{j!}$$

für $k \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}$, dann lässt sich aus dem Satz über die Eulersche Produktdarstellung folgern, dass

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{6}$$

auf $\sigma > 1$ gilt. Ist nun $L_\chi(1) = 0$, so hat F noch eine hebbare Singularität in $s = 1$ und ist somit nach 1.5 und 1.6 holomorph auf der rechten Halbebene. Wäre die Abzisse der bedingten Konvergenz σ_b der Reihe auf der rechten Seite (6) nun größer als 0, so wäre F eine echte holomorphe Fortsetzung von (6) auf $\sigma > 0$, was aber im Widerspruch dazu steht, dass (6) nach dem Satz von Landau in $s = \sigma_\mathrm{b}$ keine holomorphe Fortsetzung mehr besitzt, da die Koeffizienten a_n größer gleich 0 sind für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist $\sigma_\mathrm{a} = \sigma_\mathrm{b} \leq 0$, da wegen der Nichtnegativität der Koeffizienten bedingte und absolute Konvergenzabzisse σ_a übereinstimmen. Inbesondere konvergiert das obige Eulerprodukt von F auch auf $\sigma > 0$, wodurch sich nun die Konvergenz der Reihe auf der rechten Seite in (5) auf $\sigma > 0$ ergibt. Nach dem Satz von Euler-Fermat gilt

$$a^{\varphi(N)} \equiv_N 1 \text{ für alle } a \in \mathbb{N} \text{ mit } \operatorname{ggT}(a, N) = 1, \tag{7}$$

also auch $p^{j\varphi(N)} \equiv_N 1$ für alle $j \in \mathbb{N}, p \in \mathbb{P}, p \nmid N$. Für $s > 0$ folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(p,r)\in\mathbb{P}\times\mathbb{N}\\ p^r\equiv_N 1}} \frac{\varphi(N)}{rp^{rs}} &\geq \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid N}} \sum_{\substack{r=1\\ \varphi(N)\mid r}}^{\infty} \frac{\varphi(N)}{rp^{rs}} \\
&= \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid N}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi(N)}{k\varphi(N)p^{k\varphi(N)s}} \\
&= \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid N}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kp^{k\varphi(N)s}} \\
&= \sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid N}} \ln \frac{1}{1-p^{-s\varphi(N)}} \\
&= \ln \prod_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\nmid N}} \frac{1}{1-p^{-s\varphi(N)}} \\
&= \ln L_{\chi_0}(s\varphi(N)) \qquad \square
\end{aligned}$$

nach 1.4 und der Stetigkeit des reellen Logarithmus ln. Wegen des Pols von L_{χ_0} in $s = 1$ konvergiert diese Reihe also für $s = \frac{1}{\varphi(N)}$ sicherlich nicht. Dies ist der gesuchte Widerspruch.

— *Der Dirichletsche Primzahlsatz* —

Nun können wir den Dirichletschen Primzahlsatz formulieren und beweisen:

(2.3) Satz (Dirichletscher Primzahlsatz)
Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, N) = 1$. Dann ist

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\equiv_N a}} \frac{1}{p} = \infty.$$

Insbesondere enthält die Folge $(Nk + a)_{k\in\mathbb{N}}$ also unendlich viele Primzahlen. $\diamond$

Beweis
Seien g_χ die holomorphen Logarithmen zu L_χ aus dem Beweis zu 2.1. Auf $\sigma > 1$ gilt

$$
\begin{aligned}
\sum_{\substack{(p,r)\in\mathbb{P}\times\mathbb{N}\\ p^r\equiv_N a}} \frac{1}{rp^{rs}} &= \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{r=1}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{\varphi(N)}\sum_\chi \overline{\chi(a)}\chi(p^r)\right)}_{=1 \text{ für } p^r\equiv_N a \text{ (C3)}} \frac{1}{rp^{rs}} \\
&= \frac{1}{\varphi(N)}\sum_\chi \overline{\chi(a)} \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{r=1}^{\infty} \frac{\chi(p)^r}{rp^{rs}} \\
&= \frac{1}{\varphi(N)}\sum_\chi \overline{\chi(a)} g_\chi(s) \\
&= \frac{1}{\varphi(N)}\left[g_{\chi_0}(s) + \sum_{\chi\neq\chi_0} \overline{\chi(a)} g_\chi(s)\right].
\end{aligned}
$$

Wäre nun die Reihe

$$\sum_{\substack{(p,r)\in\mathbb{P}\times\mathbb{N}\\ p^r\equiv_N a}} \frac{1}{rp^{r}}$$

konvergent, dann folgte, wegen $\left|(rp^{rs})^{-1}\right| \leq (rp^r)^{-1}$ für alle $s\in\mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s)\geq 1$, dass die linke Seite gleichmäßig auf $\sigma \geq 1$ konvergiert. Inbesondere wäre dann die linke Seite stetig und somit beschränkt auf jedem Kompaktum

$$K_\delta := \{s\in\mathbb{C} : |s-1|\leq\delta \text{ und } \mathrm{Re}(s)\geq 1\}, \quad \delta>0.$$

Nach 2.3 ist $L_\chi(1)\neq 0$ für beliebiges $\chi\neq\chi_0$, also existiert wegen der Stetigkeit ein $0<\delta<1$ hinreichend klein, so dass $L_\chi(s)\neq 0$ für alle $s\in K_\delta(1)$. Da das Gebiet

$$G_\delta := \{s\in\mathbb{C} : \mathrm{Re}(s)>1 \text{ oder } |s-1|<\delta\}$$

einfach zusammenhängt und L_χ dort nullstellenfrei ist (vergleiche zusätzlich die Bemerkung nach 1.4), existiert dort also ein holomorpher Logarithmus $\tilde{g_\chi}$ zu L_χ. Da sich holomorphe Logarithmen einer Funktion auf dem selben Gebiet bekanntlich um ein additives Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden, existiert mithin ein $k_\chi\in\mathbb{Z}$, so dass

$$g_\chi = \tilde{g_\chi} + 2\pi k_\chi i$$

auf $\sigma>1$. Als stetige Funktion ist $\tilde{g_\chi}$ beschränkt auf dem Kompaktum $\overline{K_{\delta/2}(1)}\subset G_\delta$ und somit hat man, wegen

$$|g_\chi| \leq |\tilde{g_\chi}| + 2\pi|k| \text{ für alle } s\in \mathring{K}_{\delta/2}\subset\overline{K_{\delta/2}(1)},$$

auch die Beschränktheit von g_χ auf $\overset{\circ}{K}_{\delta/2}$. Das ist aber ein Widerspruch, da wegen des Pols von L_{χ_0} in $s = 1$ somit auch g_{χ_0} unbeschränkt in $\overset{\circ}{K}_{\delta/2}$ ist. Da alle Summanden positiv sind, folgt schließlich

$$\sum_{\substack{(p,r)\in\mathbb{P}\times\mathbb{N}\\ p^r\equiv_N a}} \frac{1}{rp^r} = \infty.$$

Beachtet man hingegen

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{(p,r)\in\mathbb{P}\times\mathbb{N}\\ p^r\equiv_N a\\ r\geq 2}} \frac{1}{rp^r} &\leq \sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{rp^r}\\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{P}}\sum_{r=2}^{\infty}\frac{1}{p^r}\\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{1-p^{-1}}-\frac{1}{p}-1\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{p\in\mathbb{P}}\frac{1}{p(p-1)}\\
&\leq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(n-1)}\\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

so muss folglich

$$\sum_{\substack{p\in\mathbb{P}\\ p\equiv_N a}} \frac{1}{p} = \infty$$

gelten. Inbesondere enthält die Folge $(Nk + a)_{k\in\mathbb{N}}$ also unendlich viele Primzahlen.□

Für $a = 1$ und $N = 1$ erhält man noch das interessante

(2.4) Korollar

$$\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p} = \infty$$

◇

In der Höheren Funktionentheorie wurde das asymtotische Verhalten der Primzahlzählfunktion $\pi(x)$ untersucht. Wir bewiesen

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\ln x} \text{ für } x \to \infty.$$

Satz 2.3 ist sogar äquivalent zum folgenden Ergebnis:

(2.5) Satz
Sei $a \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(a, N) = 1$, $\pi_a(x) := |\{p \in \mathbb{P}, p \leq x, p \equiv_N a\}|$. Dann gilt die asymtotische Äquivalenz

$$\pi_a(x) \sim \frac{x}{\varphi(N) \ln x} \text{ für } x \to \infty.$$

$\diamond$

Beweis
Brüdern, Einführung in die Analytische Zahlentheorie $\square$