# Werte von Dirichlet-Reihen

Vortrag zum Seminar zur Funktionentheorie, 12.02.2008

Andrea Schmitz

In einem der vorhergehenden Vorträge zur Riemannschen Zetafunktion $\zeta$ wurde festgestellt, dass diese Funktion für alle geraden Argumente $s > 1$ und für alle ganzzahligen Argumente $s < 1$ Werte annimmt, die man in geschlossener Gestalt angeben kann. Für $s < 1$ sind diese Werte stets rational und in der Hälfte der Fälle gleich Null.

Dieser Vortrag geht nun der Frage nach, ob sich ähnliche Eigenschaften nicht auch bei den Dirichletschen L-Reihen feststellen lassen. Tatsächlich ist es so, dass diese Reihen für gewisse $s \in \mathbb{C}$ einer Funktionalgleichung der Form

$$A(s) \cdot \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) \cdot L(s,\chi) = B(s) \cdot \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right) \cdot L(1-s,\overline{\chi}) \quad \text{für ein } \delta \in \{0,1\}$$

genügen, falls $\chi$ ein primitiver Dirichletscher Charakter mod $N$ ist. (Diese Funktionalgleichung wird in diesem Vortrag zwar später angegeben, aber nicht bewiesen.) Möchte man die Werte einer solchen L-Reihe für ganzzahlige Argumente bestimmen, genügt es daher, entweder die entsprechenden Funktionswerte nur für $s \geq 1$ oder für $s \leq 0$ zu berechnen. Die jeweils übrigen Werte ergeben sich dann aus der Funktionalgleichung, falls sie an den entsprechenden Stellen definiert ist. Wie man sehen wird, sind die Werte an den negativen ganzzahligen Stellen grundsätzlich einfacher auszurechnen als an positiven ganzen Stellen, selbst wenn die L-Reihe an den jeweiligen negativen ganzzahligen Stellen gar nicht konvergiert.

Im ersten Teil des Vortrages wird daher zunächst ein Satz bewiesen, der es möglich macht, unter sehr allgemeinen Voraussetzungen Werte von beliebigen Dirichletschen Reihen für ganzzahlige negative Argumente zu bestimmen. Im zweiten Teil wird dieser Satz für den Spezialfall der Dirichletschen L-Reihen konkretisiert. Man erhält eine Formel zur Bestimmung der negativen ganzzahligen Argumente von L-Reihen sowie das Ergebnis, dass diese in der Hälfte der Fälle verschwinden, und zwar entweder an den ungeraden oder an den geraden negativen Stellen.

Im Folgenden werden die Bezeichnungen der vorherigen Vorträge beibehalten, insbesondere bezeichnet $s = \sigma + it$ immer eine komplexe Zahl sowie $\sigma$ und $t$ reelle Zahlen. Außerdem bezeichnet $L(s,\chi)$ die dem Dirichletschen Charakter $\chi$ (mod $N$) zugeordnete Dirichletsche L-Reihe.

# §1 Werte an negativen ganzen Stellen

**(1.1) Satz**
Sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ eine gewöhnliche Dirichletsche Reihe, die für mindestens einen (komplexen) Wert von $s$ konvergiert, und sei $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-nt}$, $t \in \mathbb{R}$ die entsprechende Exponentialreihe (welche für alle $t > 0$ konvergiert). Hat $F$ für $t \to 0$ die asymptotische Entwicklung

$$F(t) \sim b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots ,$$

$$\text{also} \quad F(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n \text{ für } t \to 0, \text{ wobei } b_n \in \mathbb{C},$$

so lässt sich $f$ holomorph in die ganze komplexe Ebene fortsetzen und es gilt

$$f(-n) = (-1)^n n! b_n \quad \text{für } n = 0, 1, \dots .$$

Allgemeiner, wenn $F$ für $t \to 0$ die asymptotische Entwicklung

$$F(t) \sim \frac{b_{-1}}{t} + b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots ,$$

$$\text{also} \quad F(t) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} b_n t^n \quad \text{für } t \to 0$$

besitzt, so hat $f$ eine meromorphe Fortsetzung, die Funktion $s \mapsto f(s) - \frac{b_{-1}}{s-1}$ ist ganz, und die Werte $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2), \dots$ werden nach wie vor durch die Formel

$$f(-n) = (-1)^n n! b_n \quad \text{für } n = 0, 1, \dots$$

gegeben. ◇

**(1.2) Bemerkung**
„Asymptotische Entwicklung" bedeutet, dass ein $C_1 > 0$ existiert, so dass für jede natürliche Zahl $N$ die Abschätzung

$$\left| F(t) - \sum_{n<N} b_n t^n \right| \leq C_1 t^N$$

für $0 < t < t_0$ gilt. Insbesondere findet sich eine wie im Satz geforderte asymptotische Entwicklung, falls $F$ im Punkt $t = 0$ eine konvergente Taylorentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ mit $c_n = \frac{1}{n!} F^{(n)}(0)$ hat. Es wird aber im Allgemeinen weder gefordert, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ konvergiert, noch, falls sie das tut, dass ihr Wert gleich $F(t)$ ist.◇

**Beweis**
Nach Voraussetzung konvergiert die gewöhnliche Dirichletsche Reihe $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ für ein $s_0 \in \mathbb{C}$. Damit konvergiert sie auch für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$ nach [Za], §1 Satz 1, und sie konvergiert absolut für mindestens alle $s$ mit $\operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0) + 1$ nach [Za], §1 Satz 3. Betrachten wir daher o.B.d.A. die entsprechende Reihe über die Absolutbeträge $f_1(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| n^{-s}$. Zu zeigen ist zunächst, dass die $a_n$ höchstens polynomial wachsen und damit $F$ für alle $t > 0$ absolut konvergiert.

**1. Fall:** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Dann ist die Folge $(|a_n|)_{n \geq 1}$ eine Nullfolge und für $t > 0$ erhalten wir die folgende Abschätzung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-nt} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-nt} \underset{t>0}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

In diesem Fall konvergiert $F$ also absolut für alle $t > 0$.

**2. Fall:** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert. Damit divergiert auch $f_1(0)$ und es folgt, dass somit $\sigma_1 > 0$ für die Konvergenzabszisse $\sigma_1$ von $f_1$ gilt. Nach [Za], §1 Satz 2, gilt für $\sigma_1$ überdies

$$\sigma_1 = \inf \{\alpha | A(N) = \mathcal{O}(N^{\alpha})\} \ , \quad \text{wobei } A(N) := \sum_{n=1}^{N} |a_n|,$$

also gibt es ein $\alpha > 0$ mit $A(N) = \mathcal{O}(N^{\alpha})$. Die Gleichung $A(N) = \mathcal{O}(N^{\alpha})$ bedeutet dann, dass es eine Zahl $B_1 > 0$ gibt mit $|A(N)| \leq B_1 N^{\alpha}$ für alle $N$, das heißt $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq B_1 N^{\alpha}$. Nehmen wir nun an, dass $(|a_n|)_{n \geq 1}$ stärker wächst als $\mathcal{O}(n^{\alpha})$. Das heißt, für alle $B \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_0}| > B n_0^{\alpha}$. Dann folgt aber

$$|A(n_0)| = \sum_{n=1}^{n_0} |a_n| \geq |a_{n_0}| > B n_0^{\alpha} \ ,$$

was im Widerspruch dazu steht, dass es ein $B_1$ gibt, so dass $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq B_1 N^{\alpha}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Daher wachsen die $a_n$ höchstens polynomial, und zwar mit der Ordnung $a_n = \mathcal{O}(n^{\alpha})$.

Für $\alpha > 0$ und ein festes $t > 0$ existiert stets ein $N_0 \in \mathbb{N}$, so dass $n^{2+\alpha} \leq e^{nt}$ für alle $n \geq N_0$ gilt. Wähle daher $N_0$ entsprechend. Das Majorantenkriterium liefert dann für $t > 0$ die absolute Konvergenz von $F$ aufgrund der folgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned}\left|\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{-nt}-\sum_{n=1}^{N_0-1}|a_n|e^{-nt}\right| &= \left|\sum_{n=N_0}^{\infty}|a_n|e^{-nt}\right| \\ &\leq \sum_{n=N_0}^{\infty}|a_n|e^{-nt} \\ &\leq B_1\sum_{n=N_0}^{\infty}n^{\alpha}e^{-nt} \\ &\leq B_1\sum_{n=N_0}^{\infty}\frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

In beiden Fällen erhalten wir also die absolute Konvergenz von $F$ für $t > 0$.

Nach [Za], §3 (16) gilt im Bereich der absoluten Konvergenz die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^s} = \frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty}F(t)t^{s-1}dt\ ,$$

$$\text{also}\quad \Gamma(s)f(s) = \int_0^{\infty}F(t)t^{s-1}dt =: I(s).$$

Man zerlege das Integral als $I_1(s) + I_2(s) = I(s)$ mit $I_1(s) = \int_0^1 F(t)t^{s-1}dt$ und $I_2(s) = \int_1^{\infty} F(t)t^{s-1}dt$. Betrachte nun zunächst das Integral $I_2$. Es gilt

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-nt} = e^{-t}\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(n-1)t}\ ,$$

wobei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(n-1)t}$ ebenfalls noch absolut konvergent ist für alle $t > 0$. Zu einem festen $t_0 > 0$ gibt es also ein $C_2 > 0$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{-(n-1)t_0} < C_2$. Für alle $t > t_0$ gilt somit aber

$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(n-1)t}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{-(n-1)t} \leq \sum_{n=1}^{\infty}|a_n|e^{-(n-1)t_0} < C_2$$

und damit

$$|F(t)| = \left|e^{-t}\right|\cdot\left|\sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{-(n-1)t}\right| < C_2 e^{-t}\ ,$$

also $F(t) = \mathcal{O}(e^{-t})$.

Somit können wir im Folgenden zeigen, dass $I_2$ absolut und gleichmäßig auf kompakten Mengen konvergiert. Sei dazu $M_1 \subset \mathbb{C}$ kompakt. Dann gibt es ein $b_0 > 0$, so dass für alle $s \in M_1$ gilt $\mathrm{Re}(s) \leq b_0$. Wähle $b_0$ entsprechend. Für ein beliebiges $s \in M_1$ und $b > 1$ gilt dann

$$\begin{aligned}\left|\int_1^\infty \left|F(t)t^{s-1}\right| dt - \int_1^b \left|F(t)t^{s-1}\right| dt\right| &= \left|\int_b^\infty \left|F(t)t^{s-1}dt\right|\right| \\ &\leq \int_b^\infty |F(t)| \cdot |t^{s-1}| dt \\ &\leq C_2 \int_b^\infty e^{-t} t^{\mathrm{Re}(s)-1} dt \\ &\leq C_2 \int_b^\infty e^{-t} t^{b_0-1} dt =: D_1(b) \ .\end{aligned}$$

Da auch $\Gamma(b_0) = \int_0^\infty e^{-t} t^{b_0-1} dt$ konvergiert, muss $D_1(b)$ für $b \to \infty$ gegen Null konvergieren. Also ist $I_2$ eine ganze Funktion von $s$.

Für $\mathrm{Re}(s) = \sigma > 1$ gilt weiterhin

$$\int_0^1 \left(\sum_{n<N} b_n t^n\right) t^{s-1} dt = \left[\sum_{n<N} b_n \frac{t^{n+s}}{n+s}\right]_0^1 = \sum_{n<N} \frac{b_n}{n+s}$$

und damit können wir $I_1$ schreiben als

$$\begin{aligned} I_1(s) &= \int_0^1 \left(F(t) - \sum_{n<N} b_n t^n + \sum_{n<N} b_n t^n\right) t^{s-1} dt \\ &= \sum_{n<N} \frac{b_n}{n+s} + \underbrace{\int_0^1 \left(F(t) - \sum_{n<N} b_n t^n\right) t^{s-1} dt}_{=:I_3(s)} \quad \text{für } \sigma > 1. \end{aligned}$$

Sei $M_2 \subset \mathbb{C}$ kompakt. Dann gibt es ein $c_0 > 0$, so dass für alle $s \in M_2$ gilt $\mathrm{Re}(s) \leq c_0$. Wähle $c_0$ entsprechend. Für ein beliebiges $s \in M_2$ und $a > 0$ gilt dann nach Voraussetzung

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^1 |F(t) - \sum_{n<N} b_n t^n| \cdot |t^{s-1}| dt - \int_a^1 |F(t) - \sum_{n<N} b_n t^n| |t^{s-1}| dt \right| \\
=& \left| \int_0^a |F(t) - \sum_{n<N} b_n t^n| \cdot |t^{s-1}| dt \right| \\
\leq& \int_0^a \left| F(t) - \sum_{n<N} b_n t^n \right| \cdot \left| t^{s-1} \right| dt \\
\leq& \int_0^a C_1 t^N t^{\mathrm{Re}(s)-1} dt \\
\leq& C_1 \int_0^a t^{N+c_0-1} dt =: D_2(a).
\end{aligned}$$

Das heißt, $I_3$ konvergiert absolut für alle $s$ mit $\mathrm{Re}(s) + N - 1 > -1$, also mit $\mathrm{Re}(s) > -N$, und zwar gleichmäßig auf kompakten Mengen, da $D_2(a)$ unabhängig von $s$ ist und $D(a) \to 0$ für $a \to 0$. Damit stellt $I_3$ für $\mathrm{Re}(s) > -N$ eine holomorphe Funktion dar, weswegen man die Funktion $s \mapsto \Gamma(s) f(s) - \sum_{n<N} \frac{b_n}{n+s}$ holomorph in die Halbebene $\mathrm{Re}(s) > -N$ fortsetzen kann. Da man $N$ beliebig groß wählen kann, folgt damit, dass $\Gamma f$ eine meromorphe Fortsetzung auf ganz $\mathbb{C}$ hat, die bis auf einfache Pole bei $s = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, mit Residuen $b_n$ und bis auf einen eventuellen einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum $b_{-1}$ holomorph ist. Da die Funktion $\frac{1}{\Gamma}$ ganz ist und für $s = -n$, $n \in \mathbb{N}_0$, Nullstellen hat, ist $f$ also bis auf einen (eventuellen) einfachen Pol bei $s = 1$ mit Residuum $b_{-1}$ holomorph.

Für das Residuum in einer Polstelle $-n$ mit $n \in \mathbb{N}_0$ gilt nach Satz (1.6) im Vortrag über die Gammafunktion

$$\mathrm{Res}_{-n} \Gamma(s) = \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Da $\mathrm{Res}_{-n} \Gamma(s) f(s) = b_n$, folgt mit [Kr] Kapitel XXI (1.4)

$$f(-n) = \frac{\mathrm{Res}_{-n}(\Gamma(s) f(s))}{\mathrm{Res}_{-n} \Gamma(s)} = \frac{b_n \cdot n!}{(-1)^n} = (-1)^n n! b_n \quad (n \in \mathbb{N}_0). \qquad \square$$

**(1.3) Bemerkung**
Man kann den Satz auch für allgemeine Dirichletsche Reihen formulieren und beweisen.

Sei $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n s}$ mit $\lambda_n \in \mathbb{R}$, $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \infty$ eine Dirichletsche Reihe, die für mindestens einen (komplexen) Wert von $s$ absolut konvergiert, und sei $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{e^{-\lambda_n t}}$ die entsprechende Exponentialreihe (welche für alle $t > 0$ konvergiert). Hat $F$ für $t \to 0$ die asymptotische Entwicklung

$$F(t) \sim \sum_{n=-1}^{\infty} b_n t^n \ ,$$

so hat $f$ eine meromorphe Fortsetzung, die Funktion $s \mapsto f(s) - \frac{b_{-1}}{s-1}$ ist ganz, und es gilt

$$f(-n) = (-1)^n n! b_n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

**Beweis**
Der Beweis verläuft analog zum bereits gezeigten. Man substituiere $\mu_n := e^{\lambda_n}$ und betrachte also die beiden Reihen $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\mu_n^s}$ und $F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\mu_n t}$, beziehungsweise anstelle von $f$ direkt die entsprechende Reihe über die Absolutbeträge $f_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\mu_n^s}$, da diese nach Voraussetzung ebenfalls für ein $s \in \mathbb{C}$ konvergiert. Zunächst ist also wieder zu zeigen, dass $F$ für $t > 0$ absolut konvergiert.

**1. Fall:** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert. Dann erhalten wir wie zuvor für $t > 0$ wegen $\mu_n > 0$ die Abschätzung

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\mu_n t} \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\mu_n t} \underset{t>0}{\leq} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$$

und damit die absolute Konvergenz von $F$ für $t > 0$.

**2. Fall:** Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergiert. Damit gilt für die absolute Konvergenzabszisse $\sigma_2$ von $f_2(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a_n|}{\mu_n^s}$ wieder $\sigma_2 > 0$ und zudem nach [Za], §1 Satz 1,

$$\sigma_2 = \inf \left\{ \alpha | A(N) = \mathcal{O}(e^{\lambda_N \alpha}) \right\} = \inf \left\{ \alpha | A(N) = \mathcal{O}(\mu_N^{\alpha}) \right\}.$$

Es gibt also ein $\beta > 0$ mit $A(N) = \mathcal{O}(\mu_N^{\beta})$. Die Gleichung $A(N) = \mathcal{O}(\mu_N^{\beta})$ bedeutet dann, dass es eine Zahl $B_2 > 0$ gibt mit $|A(N)| \leq B_2 \mu_N^{\beta}$ für alle $N \in \mathbb{N}$.

Nehmen wir nun an, dass $(|a_n|)_{n \geq 1}$ stärker wächst als $\mathcal{O}(\mu_n^{\beta})$. Das heißt, für alle $B \in \mathbb{R}$ gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{n_1}| > B \mu_{n_1}^{\beta}$. Dann folgt aber

$$|A(n_1)| = \sum_{n=1}^{n_1} |a_n| \geq |a_{n_1}| > B \mu_{n_1}^{\beta} \ ,$$

was im Widerspruch dazu steht, dass es ein $B_2$ gibt, so dass $\sum_{n=1}^{N} |a_n| \leq B_2 \mu_N^{\beta}$ für alle $N \in \mathbb{N}$ gilt. Daher wachsen die $a_n$ höchstens polynomial, und zwar mit der Ordnung $a_n = \mathcal{O}(\mu_n^{\beta})$.

Nach Voraussetzung gilt $0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \infty$ mit $\mu_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Für $\beta > 0$ und ein festes $t > 0$ existiert daher stets ein $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $\mu_n^{2+\beta} \leq e^{\mu_n t}$ für alle $n \geq N_1$ gilt. Wähle daher $N_1$ entsprechend. Das Majorantenkriterium liefert dann für $t > 0$ die absolute Konvergenz von $F$ aufgrund der folgenden Abschätzung:

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| e^{-\mu_n t} - \sum_{n=1}^{N_1 - 1} |a_n| e^{-\mu_n t} \right| &= \left| \sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| e^{-\mu_n t} \right| \\ &\leq \sum_{n=N_1}^{\infty} |a_n| e^{-\mu_n t} \\ &\leq B_2 \sum_{n=N_1}^{\infty} \mu_n^{\beta} e^{-\mu_n t} \\ &\leq B_2 \sum_{n=N_1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.\end{aligned}$$

In beiden Fällen erhalten wir also die absolute Konvergenz von $F$ für $t > 0$.

Man betrachte nun im Bereich der absoluten Konvergenz die Gleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \mu_n^{-s} = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n e^{-\mu_n t} \right) t^{s-1} dt$$

(vergleiche [Za], §3 (18)) und zerlege das Intervall wiederum in $I_1(s) = \int_0^1 F(t) t^{s-1} dt$ und $I_2(s) = \int_1^{\infty} F(t) t^{s-1} dt$. Es ist nun $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\mu_n t} = e^{-\mu_1 t} \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-(\mu_n - \mu_1)t}$, wobei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{(\mu_1 - \mu_n)t}$ ebenfalls noch absolut konvergent ist für $t > 0$. Damit erhalten wir $F(t) = \mathcal{O}(e^{-\mu_1 t})$ und können ganz analog zum ersten Beweis auf die absolute und auf kompakten Mengen gleichmäßige Konvergenz von $I_2$ schließen. Die Abschätzung von $I_1$ und der Rest des Beweises erfolgen dann ganz genauso wie im ersten Beweis. □

**(1.4) Beispiel**
Betrachten wir als ein Beispiel die Riemannsche Zetafunktion $\zeta$.

$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$, also gilt hier $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Mit Hilfe der geometrischen Reihe und der Gleichung (7) aus [Za], §4, erhalten wir bezüglich der entsprechenden Exponentialreihe $F$ für $0 < |t| < 2\pi$ die folgende Darstellung

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-nt} = \frac{1}{1-e^{-t}} - 1 = \frac{1}{e^t - 1} = \frac{1}{t} \cdot \frac{t}{e^t - 1} \underset{\substack{|t|<2\pi \\ \text{[Za], §4(7)}}}{=} \frac{1}{t} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} t^k$$
$$= \frac{1}{t} \cdot \left( B_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} t^{k+1} \right) \underset{B_0=1}{=} \frac{1}{t} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{k+1}}{(k+1)!} t^k , \qquad \diamond$$

wobei die $B_n$, $n \in \mathbb{N}$, gerade die durch diese Darstellung definierten Bernoullischen Zahlen sind (vergleiche [Za], § 4).

Damit haben wir also für $t \to 0$ die folgende asymptotische Entwicklung für $F$ gefunden:

$$F(t) \sim \frac{1}{t} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} t^n.$$

Hier ist $b_{-1} = 1$, und der gerade bewiesene Satz liefert uns die holomorphe Fortsetzbarkeit von $s \mapsto \zeta(s) - \frac{1}{s-1}$ auf die ganze komplexe Ebene sowie die bereits in [Za], § 4, ermittelten Werte

$$\zeta(-n) = (-1)^n \frac{B_{n+1}}{n+1} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, & \text{falls } n = 0, \\ -\frac{B_{n+1}}{n+1}, & \text{falls } n \geq 1 \text{ und } n \text{ ungerade,} \\ 0, & \text{falls } n \geq 2 \text{ und } n \text{ gerade.} \end{cases}$$

## § 2 Werte von L-Reihen

Nun wollen wir uns die Dirichletschen L-Reihen noch einmal genauer ansehen. Es zeigt sich, dass wir auch hier mit Hilfe der Bernoullischen Zahlen für $F$ eine relativ handliche asymptotische Entwicklung angeben können. Sei also $\chi$ ein Dirichletscher Charakter modulo $N$ für $N \in \mathbb{N}$, $a_n = \chi(n)$ und $f(s) = L(s, \chi)$ die zugehörige Dirichletsche L-Reihe. Da die Koeffizienten $a_n$ periodisch sind, gilt

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \chi(n) e^{-nt} = \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \left( e^{-mt} + e^{-(m+N)t} + e^{-(m+2N)t} + \dots \right)$$
$$= \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \cdot \left( \sum_{j=0}^{\infty} e^{-(m+jN)t} \right) = \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \cdot e^{-mt} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \left( e^{-Nt} \right)^j \right)$$
$$= \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \cdot \frac{e^{-mt}}{1 - e^{-Nt}}.$$

Die Funktion $t \mapsto e^{-mt}$ hat dabei für alle $m \in \mathbb{N}$ die auf $\mathbb{R}$ absolut konvergente Reihendarstellung

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-m)^k}{k!} t^k$$

und die Funktion $t \mapsto \frac{1}{1-e^{-Nt}}$ die für $0 < |t| < N^{-1}2\pi$ absolut konvergente Reihendarstellung

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r B_r}{r!} (Nt)^{r-1}$$

nach [Za], §4 (7), wobei die $B_r$ Bernoullische Zahlen sind. Betrachten wir nun das absolut konvergente Cauchy-Produkt der beiden für $0 < |t| < N^{-1}2\pi$ absolut konvergenten Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!}|t|^k$ und $\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|B_r|}{r!}(N|t|)^{r-1}$. Dieses können wir, da hier alle Summanden der beiden Reihen nicht negativ sind, auf die folgende Weise umordnen:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{m^k}{k!}|t|^k\right)\left(\sum_{r=0}^{\infty} \frac{|B_r|}{r!}(N|t|)^{r-1}\right) &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{k} \frac{m^{k-r}}{(k-r)!}|t|^{k-r}\frac{|B_r|}{r!}(N|t|)^{r-1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{m^k N^{r-1}|B_r|}{r!k!}|t|^{r+k-1}.\end{aligned}$$

Somit ist aber auch das umgeordnete Cauchyprodukt

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+r} m^k N^{r-1} B_r}{r!k!} t^{r+k-1}$$

der beiden ursprünglichen Reihen für $0 < |t| < N^{-1}2\pi$ absolut konvergent. Für $t \to 0$ erhalten wir daher für $F$ die folgende asymptotische Entwicklung:

$$F(t) \sim \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+r} m^k N^{r-1} B_r}{r!k!} t^{r+k-1}$$

$$\text{mit } b_n = \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \sum_{\substack{k+r=n+1 \\ k,r\geq 0}} \frac{(-1)^{k+r} B_r m^k N^{r-1}}{k!r!} \qquad \text{für } n \geq -1.$$

Für $n = -1$ reduziert sich diese Summe auf

$$b_{-1} = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} \chi(m) \cdot B_0 = \frac{1}{N}\sum_{m=1}^{N} \chi(m) \,,$$

und somit gilt $b_{-1} = 0$ nach [Za], §5 Satz 2, falls $\chi \neq \chi_0$. Nach (1.1) lässt sich also $L(s,\chi)$ für $\chi \neq \chi_0$ zu einer auf ganz $\mathbb{C}$ holomorphen Funktion fortsetzen. Für $\chi = \chi_0$ ist dann ebenfalls nach [Za], §5 Satz 2,

$$b_{-1} = \frac{1}{N} \sum_{\substack{m=1 \\ \mathrm{ggT}(m,N)=1}}^{N} \chi_0(m) = \frac{1}{N} \sum_{\substack{m=1 \\ \mathrm{ggT}(m,N)=1}}^{N} 1 = \frac{\varphi(N)}{N},$$

wobei

$$\varphi(N) = N \prod_{p|N} (1 - \frac{1}{p})$$

für $p \in \mathbb{P}$ die uns bereits bekannte Eulersche Funktion bezeichnet. Daraus folgt, dass $L(s,\chi_0)$ einen einfachen Pol mit Residuum $\frac{\varphi(N)}{N}$ bei $s = 1$ hat, was wir bereits in [Za], §6 (3), festgestellt haben.

Wir können nun die Formel für die $b_n$ noch etwas bequemer schreiben, wenn wir die durch $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k$ für alle $n \geq 0$, definierten Bernoullischen Polynome einführen (wobei die $B_n$ die Bernoulli-Zahlen sind). Die ersten vier Bernoullischen Polynome lauten

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= B_0 = 1, \\
B_1(x) &= B_0 x + B_1 = x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= B_0 x^2 + 2B_1 x + B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= B_0 x^3 + 3B_1 x^2 + 3B_2 x + B_3 = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x.
\end{aligned}$$

Dann gilt nämlich

$$\begin{aligned}
B_{n+1}\left(\frac{m}{N}\right) &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_{n+1-k} \left(\frac{m}{N}\right)^k = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \cdot \frac{m^k}{N^k} \cdot B_{n+1-k} \\
&= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{N^n} \cdot \sum_{k=0}^{n+1} \frac{(-1)^{n+1} \cdot m^k \cdot N^{n-k}}{k!(n+1-k)!} B_{n+1-k} \\
&\underset{\substack{k+r=n+1 \\ r=n-k+1}}{=} \frac{(-1)^{n+1}(n+1)!}{N^n} \sum_{\substack{k,r \geq 0 \\ k+r=n+1}} \frac{(-1)^{k+r} \cdot m^k \cdot N^{r-1}}{k!r!} B_r
\end{aligned}$$

und deshalb

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} N^n \sum_{m=1}^{N} \chi(m) B_{n+1}\left(\frac{m}{N}\right).$$

Damit erhalten wir aus Satz (1.1) den spezielleren

**(2.1) Satz**
Sei $\chi$ ein Dirichletscher Charakter modulo $N$ und $L(s,\chi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi(n)}{n^s}$ für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$ die entsprechende L-Reihe. Dann lässt sich $L(s,\chi)$ meromorph auf die ganze komplexe Ebene fortsetzen, und zwar holomorph bis auf einen einfachen Pol mit Residuum $\frac{\varphi(N)}{N}$ bei $s = 1$ für $\chi = \chi_0$, und es gilt

$$L(-n,\chi) = (-1)^n n! b_n = -\frac{N^n}{n+1} \sum_{m=1}^{N} \chi(m) B_{n+1}\left(\frac{m}{N}\right) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

**(2.2) Beispiel**
Als Beispiel des Satzes hat man

$$\begin{aligned} L(0,\chi) &= -\sum_{m=1}^{N} \chi(m) B_1\left(\frac{m}{N}\right) \\ &= -\sum_{m=1}^{N} \chi(m) \left(\frac{m}{N} - \frac{1}{2}\right) \\ &= -\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \cdot m + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{N} \chi(m)\ , \end{aligned}$$

wobei für $\chi \neq \chi_0$ die zweite Summe nach [Za], §5 Satz 2, verschwindet und nur

$$L(0,\chi) = -\frac{1}{N} \sum_{m=1}^{N} \chi(m) \cdot m$$

übrig bleibt. ◇

**(2.3) Eigenschaften der Bernoullischen Polynome**
Seien $B_i$ die Bernoullischen Zahlen für $i \in \mathbb{N}_0$. Die durch $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k$ für $n \geq 0$ definierten Bernoullischen Polynome kommen in vielen mathematischen Zusammenhängen vor und haben angenehmen Eigenschaften, die auch in diesem Vortrag ausgenutzt werden sollen.

Aus der Definition erhält man sofort die folgenden Aussagen:

(1) $B_n(0) = B_n$.

(2) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} B_n(x) &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} k \cdot x^{k-1} \\ &= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} B_{n-k} \cdot x^{k-1} \\ &\underset{l=k-1}{=} n \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} B_{n-1-l} x^l \\ &= n B_{n-1}(x). \end{aligned}$$

(1) und (2) zusammen liefern eine zweite, induktive Definition der Polynome $B_n(x)$.

(3) Nach Anwendung von [Za], § 4 (7), und dem Cauchy-Produkt ([Kr], Kapitel IV (2.13)) erhält man die erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \cdot \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k \right) \cdot \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!(n-k)!} B_{n-k} x^k t^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} B_{n-k} t^{n-k} \cdot \frac{(tx)^k}{k!} \right) \\ &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} t^n \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(tx)^n}{n!} \right) \quad \text{(Cauchy-Produkt)} \\ &= \frac{t}{e^t - 1} \cdot e^{xt} = \frac{te^{xt}}{e^t - 1} \quad \text{für } |t| < 2\pi. \end{aligned}$$

Aus der erzeugenden Funktion (3) erhält man wiederum zwei weitere Eigenschaften der Polynome $B_n(x)$.

(4) Symmetrie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x).$$

Dies ergibt sich durch Koeffizientenvergleich bei der folgenden Umformung:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n B_n(x) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{(-t)^n}{n!} = \frac{(-t)e^{-xt}}{e^{-t} - 1} = \frac{(-t)e^{-xt}e^t}{1 - e^t} = \frac{te^{t(1-x)}}{e^t - 1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-x) \frac{t^n}{n!} \quad \text{für } |t| < 2\pi. \end{aligned}$$

(5) Rekursion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$B_n(x+1) = B_n(x) + nx^{n-1}.$$

Auch diese Gleichung erhält man durch Einsetzen in die erzeugende Funktion:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \left(B_n(x) + nx^{n-1}\right) \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}t^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} + t\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}t^n = \frac{te^{xt}}{e^t-1} + te^{xt} = \frac{te^{(x+1)t}}{e^t-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x+1)\frac{t^n}{n!} \quad \text{für } |t| < 2\pi.\end{aligned}$$

◇

**(2.4) Bemerkung**
Aus der Rekursion (5) erhält man die folgende Formel für Potenzsummen, wegen der Jakob Bernoulli die nach ihm benannten Zahlen $B_k$ überhaupt erst eingeführt hat (vergleiche [Za], §7 (14)):

$$1^n + 2^n + \ldots + N^n \underset{(5)}{=} \frac{B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0)}{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} B_k \frac{N^{n+1-k}}{n+1-k}.$$

Die letzte Gleichung ergibt sich wie folgt:

$$\begin{aligned}B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0) &\underset{(4)}{=} (-1)^{n+1}B_{n+1}(-N) - B_{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1}\binom{n+1}{k} B_{n+1-k}(-N)^k - B_{n+1} \\ &= (-1)^{n+1}B_{n+1} - B_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k}\binom{n+1}{k} N^k B_{n+1-k}.\end{aligned}$$

Hierbei ist $(-1)^{n+1}B_{n+1} - B_{n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Falls nämlich $n$ ungerade ist, gilt $(-1)^{n+1}B_{n+1} - B_{n+1} = B_{n+1} - B_{n+1} = 0$. Falls $n > 0$ gerade ist, ist $B_{n+1} = 0$ gemäß

[Za],§4 Satz 1. Also erhalten wir

$$\begin{aligned} B_{n+1}(N+1) - B_{n+1}(0) &= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} N^k B_{n+1-k} \\ &\underset{l=n+1-k}{=} \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n+1}{n+1-l} N^{n+1-l} B_l \\ &= \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \frac{(n+1)n!}{(n+1-l)!l!} N^{n+1-l} B_l \\ &= (n+1) \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{n}{l} B_l \frac{N^{n+1-l}}{(n+1-l)}. \end{aligned}$$ ◇

Wegen seiner strengen Multiplikativität gilt für jeden Dirichletschen Charakter $\chi$ (modulo $N$)

$$\chi(N-1)^2 = \chi(-1)^2 = \chi(1) = 1$$

und deshalb stets entweder $\chi(-1) = 1$ oder $\chi(-1) = -1$.

**(2.5) Definition**
Ein Dirichletscher Charakter $\chi$ modulo $N$ heißt *gerade*, falls $\chi(-1) = 1$ und *ungerade*, falls $\chi(-1) = -1$ ist. ◇

Mit Hilfe dieser Definition und der Symmetrie (4) der Bernoullischen Polynome kann man nun das folgende Korollar zeigen.

**(2.6) Korollar**
Außer im Fall $N = 1$, $n = 0$ gilt für alle $\chi$ und alle $n \geq 0$ die Folgerung

$$\chi(-1) = (-1)^n \quad \Rightarrow \quad L(-n, \chi) = 0\,,$$

das heißt, die L-Reihe von einem geraden beziehungsweise ungeraden Charakter verschwindet an den negativen geraden beziehungsweise ungeraden Stellen. ◇

**Beweis**
Zum Beweis der Aussage zeige man, dass $L(-n, \chi) = -L(-n, \chi)$ unter der Voraus-

setzung $\chi(-1) = (-1)^n$ gilt. Außer im Fall $N = 1$ und $n = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
L(-n,\chi) &\underset{(2.1)}{=} -\frac{N^n}{n+1}\sum_{m=1}^{N}\chi(m)B_{n+1}\left(\frac{m}{N}\right)\\
&\underset{(4)}{=} -\frac{N^n}{n+1}\sum_{m=1}^{N}\chi(m)B_{n+1}\left(1-\frac{m}{N}\right)\cdot(-1)^{n+1}\\
&= -\frac{N^n}{n+1}\sum_{m=1}^{N}\chi(m)B_{n+1}\left(\frac{N-m}{N}\right)(-1)^{n+1}\\
&= -\frac{N^n}{n+1}\sum_{m=0}^{N-1}\chi(N-m)B_{n+1}\left(\frac{m}{N}\right)(-1)^{n+1}\\
&\underset{\mathrm{mod} N}{=} -\frac{N^n}{n+1}\sum_{m=0}^{N-1}\chi(-m)B_{n+1}\left(\frac{m}{N}\right)(-1)^{n+1}\\
&= -\frac{N^n}{n+1}\sum_{m=0}^{N-1}\chi(-1)\chi(m)B_{n+1}\left(\frac{m}{N}\right)(-1)^{n+1}\\
&\underset{\chi(-1)=(-1)^n}{=} -\frac{N^n}{n+1}\sum_{m=0}^{N-1}(-1)^n\chi(m)B_{n+1}\left(\frac{m}{N}\right)(-1)^{n+1}\\
&= -\left(-\frac{N^n}{n+1}\right)\sum_{m=1}^{N}\chi(m)B_{n+1}\left(\frac{m}{N}\right)\\
&= -L(-n,\chi)
\end{aligned}$$

□

Das Korollar sowie seine Umkehrung können auch aus der Funktionalgleichung der L-Reihe $L(s,\chi)$ abgeleitet werden. Diese hat eine große Bedeutung für die analytische Zahlentheorie und wird in diesem Vortrag angegeben, jedoch nicht bewiesen. Man kann sich dabei auf primitive Dirichletsche Charaktere beschränken, da für einen von einem Charakter $\chi_1$ induzierten Charakter $\chi(\mathrm{mod}\ N)$ die elementare Beziehung

$$L(s,\chi) = \prod_{p|N}\left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right)\cdot L(s,\chi_1)$$

zwischen den L-Reihen besteht:

Es ist bekannt, dass für alle $p$ mit $p \mid N$ gilt, dass $\chi(p) = 0$ und damit $\frac{1}{1-\chi(p)p^{-s}} = 1$ ist. Ferner gilt, falls $\chi_1$ ein primitiver Dirichletscher Charakter modulo $N_1$ ist, der den Dirichletschen Charakter $\chi$ modulo $N$ induziert, dass $\chi(p) = \chi_1(p)$ (modulo $N_1$) ist für $p \nmid N$. Daher gilt insgesamt nach [Za], §6 (2), und [Za], §2 Satz 1,

$$\begin{aligned}
L(s,\chi) &= \prod_p \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \\
&= \prod_{p\nmid N} \frac{1}{1-\frac{\chi(p)}{p^s}} \\
&= \prod_{p\nmid N} \frac{1}{1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}} \\
&= \prod_p \frac{1}{1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}} \cdot \prod_{p|N} \left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right) \\
&= L(s,\chi_1) \cdot \prod_{p|N} \left(1-\frac{\chi_1(p)}{p^s}\right).
\end{aligned}$$

Die Funktionalgleichung für $\chi$ primitiv lautet

$$\pi^{-\frac{s}{2}} N^{\frac{s}{2}} \Gamma\left(\frac{s+\delta}{2}\right) L(s,\chi) = \frac{\mathcal{G}}{i^\delta \sqrt{N}} \pi^{-\frac{1-s}{2}} N^{\frac{1-s}{2}} \Gamma\left(\frac{1-s+\delta}{2}\right) L(1-s,\overline{\chi}),$$

dabei ist $\overline{\chi}$ der zu $\chi$ konjugierte Charakter, $\delta$ gleich 0 beziehungsweise 1 für $\chi$ gerade beziehungsweise ungerade und $\mathcal{G}$ die Gaußsche Summe $\sum_{n=1}^N \chi(n) e^{\frac{2\pi i n}{N}}$. Der Faktor $\frac{\mathcal{G}}{i^\delta \sqrt{N}}$ hat dabei stets den Absolutbetrag 1.

Aus der Funktionalgleichung und (2.1) erhält man die Werte von $L(n,\chi)$ für $n \geq 1$, $\chi(-1) = (-1)^n$. So erhält man etwa mit dem Beispiel zu Satz (2.1)

$$L(0,\chi) = -\frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \chi(m) m \quad \text{für } \chi \neq \chi_0$$

und der Funktionalgleichung den Wert an der Stelle 1 für $\chi$ primitiv und ungerade

$$L(1,\chi) = -\frac{\pi i \mathcal{G}}{N^2} \sum_{m=1}^N \overline{\chi}(m) m.$$

Den Wert an der Stelle 1 für $\chi$ primitiv und gerade kann man beispielsweise so nicht berechnen, da die Gammafunktion an der Stelle 0 eine Polstelle hat und daher die Funktionalgleichung für $\chi$ gerade an der Stelle 0 nicht definiert ist. Man kann daher mit Hilfe der Funktionalgleichung nur die Hälfte der Werte errechnen, die eine L-Reihe an positiven ganzen Stellen annimmt. Für $\chi$ ungerade sind dies jeweils die

Werte an den ungeraden und $\chi$ gerade sind dies jeweils die Werte an den geraden positiven Stellen.

Der Vortrag schließt ab mit einer kleinen Tabelle von Werten von L-Reihen an negativen ganzen Stellen für die in [Za], §5, bestimmten primitiven reellen Charaktere $\chi_D$.

| $D$ | $-3$ | $-4$ | $-7$ | $-8$ | $-11$ | $-15$ | $-19$ | $-20$ | $-23$ | $-24$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $L(0,\chi_D)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | 1 | 2 | 1 | 2 | 3 | 2 |
| $-\frac{1}{2}L(-2,\chi_D)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{8}{7}$ | $\frac{3}{2}$ | 3 | 8 | 11 | 15 | 24 | 23 |
| $\frac{1}{2}L(-4,\chi_D)$ | $\frac{1}{3}$ | $\frac{5}{4}$ | 16 | $\frac{57}{2}$ | $\frac{1275}{11}$ | 496 | 1345 | 1761 | 3408 | 3985 |

| $D$ | 1 | 5 | 8 | 12 | 13 | 17 | 21 | 24 | 28 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{1}{2}L(-1,\chi_D)$ | $\frac{1}{24}$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | 1 | 2 | 2 | 3 | 4 |
| $\frac{1}{2}L(-3,\chi_D)$ | $\frac{1}{240}$ | 1 | $\frac{11}{2}$ | 23 | 29 | 82 | 154 | 261 | 452 |
| $-\frac{1}{2}L(-5,\chi_D)$ | $\frac{1}{504}$ | $\frac{67}{5}$ | $\frac{361}{2}$ | 1681 | $\frac{33463}{13}$ | 11582 | 35942 | 76083 | 177844 |

# §3 Literatur


[Kr] Krieg, Analysis I–IV, Höhere Funktionentheorie I, 2003–2007

[Za] Zagier, Zetafunktionen und quadratische Körper, Springer 1981