LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ

Aachen, den 20.10.2007

Lie-Gruppen, Übungsblatt 1

Wird besprochen am Montag, den 27.10.2009, 9:45 Uhr

Aufgabe 1

Es sei M eine Menge, und $\mathcal{B}$ eine Menge von Teilmengen von M.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

  (i) $\mathcal{B}$ ist Basis einer Topologie.

  (ii) Für alle $A, B \in \mathcal{B}$, für alle $x \in A \cap B$ existiert ein $C \in \mathcal{B}$ mit $x \in C \subset A \cap B$.

(b) Unter allen Topologien auf M, die $\mathcal{B}$ enthalten, gibt es eine bezüglich Inklusion minimale Topologie, mit Basis

$$\mathcal{B}' = \{\bigcap \mathcal{N} : \mathcal{N} \subset \mathcal{B} \text{ endlich } \} .$$

Aufgabe 2

Es sei $M = \mathbb{R}$, mit der Standardtopologie $\mathcal{T}$ versehen. Zeigen Sie, daß die von den Atlanten $\{(\mathbb{R}, \mathrm{Id}_{\mathbb{R}})\}$ und $\{(\mathbb{R}, t \mapsto t^3)\}$ erzeugten differenzierbaren Strukturen $\mathcal{F}_0$ bzw. $\mathcal{F}_1$ verschieden sind. Zeigen Sie ferner, daß die Mannigfaltigkeiten $(M, \mathcal{T}, \mathcal{F}_0)$ und $(M, \mathcal{T}, \mathcal{F}_1)$ diffeomorph sind.

Aufgabe 3

Es sei M ein topologischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset M$ heißt **zusammenhängend** wenn für alle offenen $U, V \subset M$ gilt: Falls $A \cap U \cap V = \emptyset$ und $A \subset U \cup V$, so folgt bereits $A \subset U$ oder $A \subset V$.

Wir definieren eine binäre Relation Z auf M wie folgt (für $m, n \in M$):

$$mZn :\Leftrightarrow \exists A \subset M \text{ zusammenhängend, mit } \{m, n\} \subset A .$$

Zeigen Sie:

(a) Z ist eine Äquivalenzrelation. Die Äquivalenzklassen bezüglich Z heißen **Zusammenhangskomponenten**.

(b) Die Zusammenhangskomponente von $m \in M$ ist die bezüglich Inklusion maximale zusammenhängende Teilmenge von M, die m enthält.

(c) Zusammenhangskomponenten sind abgeschlossen.

Aufgabe 4

Es sei M ein topologischer Raum. Wir definieren die binäre Relation W auf M durch

$$mWn \Leftrightarrow \exists\gamma : [0,1] \to M \text{ stetig mit } \gamma(0) = m \text{ und } \gamma(1) = n \, .$$

Zeigen Sie:

(a) W ist eine Äquivalenzrelation auf M. Die Äquivalenzklassen bezüglich W heissen **Wegkomponenten von** M.

(b) Zeigen Sie: Jede Wegkomponente ist enthalten in einer Zusammenhangskomponente.

(c) Nun sei M eine Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie, daß die Wegkomponenten in M offen und abgeschlossen sind. Zeigen Sie ferner, daß Wegkomponenten und Zusammenhangskomponenten übereinstimmen.