LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ

Aachen, den 20.10.2007

Lie-Gruppen, Übungsblatt 2

Wird besprochen am Montag, den 3.11.2009, 9:45 Uhr

Aufgabe 1

Es sei M eine zusammenhängende Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: Zu $m, n \in M$ existiert ein Diffeomorphismus $\psi : M \to M$ mit $\psi(m) = n$.
(Hinweis: Lösen Sie das Problem zunächst für m nahe n.)

Aufgabe 2

Es sei $M = S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, die n-dimensionale Einheitssphäre, mit der differenzierbaren Struktur aus Beispiel 1.9.

(a) Zu $m \in S^n$ definieren wir

$$\tilde{T}_m S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \ : \ \langle m, x \rangle = 0\} \ .$$

Zu $\gamma : I \to S^n$ glatt mit $0 \in I$ und $\gamma(0) = m$ sei

$$v_\gamma = \lim_{h \to 0} h^{-1}(\gamma(h) - m) \in \mathbb{R}^{n+1} \ .$$

Zeigen Sie, daß die Abbildung $\dot{\gamma}(0) \mapsto v_\gamma$ ein (wohldefinierter!) Vektorraum-Isomorphismus $\varphi_m : T_m S^n \to \tilde{T}_m S^n$ ist.

(b) Es sei

$$\tilde{T}S^n = \bigcup_{m \in S^n} \{m\} \times \tilde{T}_m S^n \subset \mathbb{R}^{2n+2} \ .$$

Wir versehen $\tilde{T}S^n$ mit der Relativtopologie, und TS^n mit der Topologie aus Proposition 3.2. Zeigen Sie, daß dann $\tilde{T}S^n$ und TS^n homöomorph sind, vermöge

$$\varphi : TS^n \to \tilde{T}S^n \ , \ \varphi(m, v) = (m, \varphi_m(v)) \ .$$

Aufgabe 3

Es seien $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig. Ferner sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ glatt, mit kompaktem Träger. Wir definieren

$$\psi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\psi(x - y) dy \ .$$

Zeigen Sie: $\psi * f$ ist glatt.
Hinweis: Zeigen Sie, für alle $i_1, \dots, i_k \in \{1, \dots, n\}$:

$$\partial_{i_1}\partial_{i_2}\dots\partial_{i_k}(\psi * f) = \left(\partial_{i_1}\partial_{i_2}\dots\partial_{i_k}\psi\right) * f \ .$$

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Für alle Null-Umgebungen U in $\mathbb{R}^n$ gibt es eine glatte Funktion ψ mit $\psi(x) \geq 0$ für alle x, $\psi = 0$ außerhalb U, und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1 \ .$$

Aufgabe 5

Es seien $A, B \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen mit $A \cap B = \emptyset$. Nach dem Lemma von Urysohn gibt es eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ mit $f|_A = 1$ und $f|_B = 0$. Zeigen Sie: Ist A oder B kompakt, so läßt sich f auch glatt wählen.