Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ

Aachen, den 30.10.2007

Lie-Gruppen, Übungsblatt 3

Wird besprochen am Montag, den 10.11.2009, 9:45 Uhr

Aufgabe 1

Es sei G eine Lie-Gruppe. Es sei $H \subset G$ die Zusammenhangskomponente des neutralen Elements in G. Zeigen Sie: H ist ein Normalteiler von G. Ist $x \in G$, so ist $xH = \{xh : h \in H\}$ die Zusammenhangskomponente von x in G.
(Zur Erinnerung: H heißt Normalteiler, wenn H eine Untergruppe ist mit $xhx^{-1} \in H$, für alle $x \in G$ und alle $h \in H$.)

Aufgabe 2

Sei G eine Lie-Gruppe, und H eine Untergruppe.

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

  (i) Die Relativtopologie auf H ist diskret, das heißt, jede Teilmenge von H ist offen in H.

  (ii) Es gibt $U \subset G$ offen mit $U \cap H = \{e\}$.

(b) Nun sei G zusammenhängend, und H ein Normalteiler mit diskreter Relativtopologie. Dann ist H zentral, d.h. für alle $x \in G$ und alle $h \in H$ gilt $xh = hx$. (Hinweis: Für festes $h \in H$, betrachten Sie die Abbildung $G \to H$, $x \mapsto xhx^{-1}$.)

Aufgabe 3

Beweisen Sie Lemma 4.13 aus der Vorlesung: Es sei $\varphi : G \to H$ ein glatter Homomorphismus zwischen Lie-Gruppen; die Lie-Algebren dazu seien mit $\mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ bezeichnet. Wir versehen die Tangentialräume T_eG und T_eH mit den von den Identifikationen $T_eG \cong \mathfrak{g}$ und $T_eH \cong \mathfrak{h}$ induzierten Lie-Algebren-Strukturen. Dann ist das Differential $d\varphi_e : T_eG \to T_eH$ ein Lie-Algebren-Homomorphismus.

Aufgabe 4

Es sei G eine Lie-Gruppe. Wir versehen den Tangentialraum T_eG mit der differenzierbaren Struktur, die von einem linearen Isomorphismus $T_eG \to \mathbb{R}^n$ induziert wird. Es sei $\varphi : TG \to T_eG$, definiert durch $\varphi(p, v) = d(\ell_p)|_e^{-1}(v)$. Zeigen Sie: φ ist glatt.