LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ

Aachen, den 30.10.2007

Lie-Gruppen, Übungsblatt 4

Wird am Montag, den 17.11.2009, 9:45 Uhr, besprochen

Aufgabe 1

Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe.

(a) Sei $U \in \mathcal{U}_e(G)$. Zeigen Sie: $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U^n$.

(b) Es seien $\varphi_1, \varphi_2 : G \to H$ stetige Gruppenhomomorphismen in eine Lie-Gruppe H. Es gebe $\emptyset \neq U \subset G$ offen mit $\varphi_1(p) = \varphi_2(p)$, für alle $p \in U$. Zeigen Sie $\varphi_1 = \varphi_2$.

Aufgabe 2

Es sei G eine Lie-Gruppe.

(a) Es sei $m : G \times G \to G$ die Multiplikationsabbildung, $m(p,q) = pq$. Wir identifizieren den Tangentialraum $T_{(e,e)}(G \times G)$ mit $T_eG \times T_eG$, durch $(v,w)(f) = v(f(\cdot,e)) + w(f(e,\cdot))$. Zeigen Sie, daß dann $dm_{(e,e)}(v,w) = v + w$.

(b) Es seien $\alpha, \beta : I \to G$ glatte Kurven mit $\alpha(0) = \beta(0) = e$. Zeigen Sie: Auch $\gamma : I \to G$, definiert durch $\gamma(t) = \alpha(t)\beta(t)$ ist glatt, und es gilt $\dot\gamma(0) = \dot\alpha(0) + \dot\beta(0)$.

(c) Es sei $j : G \to G$ die Inversenabbildung, $j(p) = p^{-1}$. Zeigen Sie: $dj_e(v) = -v$.

Aufgabe 3

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra der Dimension 2. Zeigen Sie: Entweder gilt $[X,Y] = 0$, für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$, oder es gibt $X, Y \in \mathfrak{g}$ mit $[X,Y] = X$.

Aufgabe 4

Es sei G eine zusammenhängende Lie-Gruppe.

(a) Es seien $\varphi, \psi : G \to H$ glatte Gruppenhomomorphismen in eine Lie-Gruppe H, mit $d\varphi_e = d\psi_e$. Zeigen Sie $\varphi = \psi$.

(b) Für $p \in G$ definieren wir den Diffeomorphismus $\varphi_p : G \to G$ durch $\varphi_p(q) = pqp^{-1}$. Zeigen Sie: Genau dann ist G kommutativ, wenn für alle $p \in G$ gilt: $d(\varphi_p)_e = \mathrm{Id}$.