LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ

Aachen, den 30.10.2007

Lie-Gruppen, Übungsblatt 5

Wird besprochen am Montag, den 1.12.2008, 9:45 Uhr

Aufgabe 1

Es sei $n \in \mathbb{N}$.

(a) Zeigen Sie, für alle $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ und alle $B \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$, daß $\exp(ABA^{-1}) = A \exp(B) A^{-1}$.

(b) Es sei $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C})$ ein Jordanblock,

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & \mathbf{0} & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & \ddots & \\ & \mathbf{0} & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} .$$

Geben Sie $\exp(A)$ explizit an.

(c) Skizzieren Sie, für $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ beliebig, wie sich $\exp(A)$ anhand der Jordan-Normalform von A bestimmen läßt.

Aufgabe 2

Es sei G eine diskrete Untergruppe von $\mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, daß es linear unabhängige $g_1, \ldots, g_k \in G$ gibt mit

$$G = \{ \sum_{i=1}^{k} m_i g_i \ : \ m_i \in \mathbb{Z} \} .$$

Hinweis: Verwenden Sie Induktion nach n. Im Induktionsschritt nehmen Sie an, daß die diskrete Untergruppe G den $\mathbb{R}^{n+1}$ aufspannt, und zeigen Sie mittels Induktionsvoraussetzung die Existenz einer Basis $e_1, \ldots, e_n, f$, so dass $G \cap \mathrm{span}(e_1, \ldots, e_n)$ von $e_1, \ldots, e_n$ erzeugt wird. Wählen Sie $e_{n+1} \in G$ mit minimaler f-Koordinate.

Aufgabe 3

Es sei G eine zusammenhängende, kommutative Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$. Zeigen Sie:

(a) $\exp : \mathfrak{g} \to G$ ist ein surjektiver Gruppen-Homomorphismus. Dabei wird $\mathfrak{g}$ mit seiner additiven Struktur betrachtet.

(b) Es gibt einenGruppen-Isomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{T}^k \to G$, für k, ℓ geeignet.

Bemerkung: Der Isomorphismus $\mathbb{R}^\ell \times \mathbb{T}^k \to G$ kann glatt gewählt werden.

Aufgabe 4

Es sei G eine Lie-Gruppe. Zeigen Sie: G hat keine kleinen Untergruppen, d.h. es gibt eine e-Umgebung $U \subset G$ derart, daß $\{e\}$ die einzige in U enthaltene Untergruppe von G ist.
Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete exponentielle Umgebung.

Hinweis: In der Woche vom 24.-28. November fallen die Übung und beide Vorlesungstermine aus!