LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ

Aachen, den 5.12.10.2008

Lie-Gruppen, Übungsblatt 7

Wird am Montag, dem 15.12.2008, 9:45 Uhr besprochen

Aufgabe 1

Sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Zeigen Sie: Auf $\mathfrak{g}$ existiert eine Norm $\|\cdot\|$ mit $\|[X,Y]\| \le \|X\|\,\|Y\|$, für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$.
(Hinweis: Zeigen Sie zunächst, mit einer beliebigen Norm $|\cdot|$ auf $\mathfrak{g}$ und geeigneter Konstante $C > 0$, daß $|[X,Y]| \le C|X|\,|Y|$.)

Aufgabe 2

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathfrak{g}$ wie in Aufgabe 1. Zeigen Sie, daß dann für $\|X\| + \|Y\| < \ln(2)$ die Campbell-Baker-Hausdorff-Reihe

$$X * Y = X + \\ + \sum_{k,m\ge 0, p,q\in\mathbb{N}_0^k, p_i+q_i>0} \frac{(-1)^k}{(k+1)(1+|q|)} \frac{(adX)^{p_1}(adY)^{q_1}\cdots(adX)^{p_k}(adY)^{q_k}(adX)^m}{p!q!m!} Y$$

absolut bezüglich $\|\cdot\|$ konvergiert.
Hinweis: Zeigen Sie die Abschätzung

$$\|X * Y\| \le \|X\| + \|Y\| e^{\|X\|} \sum_{k>0} \frac{1}{k+1} (e^{\|X\|+\|Y\|} - 1)^k .$$

Aufgabe 3

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Es gelte, für alle $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, daß $[X,[Y,Z]] = 0$. Zeigen Sie, daß dann durch

$$X * Y = X + Y + \frac{1}{2}[X,Y]$$

eine Gruppenstruktur auf $\mathfrak{g}$ definiert wird.
Bemerkung: Ein Beispiel für eine solche Lie-Algebra ist die **Heisenberg-Algebra**

$$\mathfrak{g} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ : \ x, y, z \in \mathbb{R} \right\} .$$

Aufgabe 4

Es sei G eine Gruppe und $\mathcal{T}$ eine lokalkompakte Topologie, bezüglich der die Gruppenoperationen stetig sind. Ferner sei G zusammenhängend.

(a) Zeigen Sie: G ist Vereinigung abzählbar vieler kompakter Mengen.

(b) Wir nehmen zusätzlich an, daß es eine abzählbare Basis $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der e-Umgebungen gibt. Das heißt, zu $W \in \mathcal{T}$ mit $e \in W$ gibt es $n \in \mathbb{N}$ mit $e \in V_n \subset W$. Zeigen Sie, daß dann jede kompakte Teilmenge separabel ist. Folgern Sie, daß G separabel ist.

(c) Zeigen Sie unter der Zusatzannahme in (b), daß G ein A_2-Raum ist.