Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ

Aachen, den 12.12.2008

Lie-Gruppen, Übungsblatt 8

Wird am Montag, dem 5.1.2009, 9:45 Uhr besprochen

Aufgabe 1

Es sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren $K_n \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ als

$$K_n = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} .$$

Die *symplektische Gruppe* $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ besteht aus denjenigen $p \in \mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$ mit

$$p^T K_n p = K_n .$$

Zeigen Sie: $\mathrm{Sp}(n, \mathbb{R})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(2n, \mathbb{R})$, und die zugehörige Lie-Unteralgebra von $\mathfrak{gl}(2n, \mathbb{R})$ ist gegeben durch

$$\mathfrak{sp}(n, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & A^T \end{pmatrix} : A, B, C, D \in \mathrm{gl}(n, \mathbb{R}) \text{ mit } C = -C^T, B = -B^T \right\} .$$

Aufgabe 2

Es sei

$$\mathrm{SU}(2) = \{ p \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C}) \ : \ p^* p = p p^* = I_2 \ , \ \det(p) = 1 \} .$$

(a) Zeigen Sie:

$$\mathrm{SU}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} a & -\overline{b} \\ b & \overline{a} \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbb{C} \ , |a|^2 + |b|^2 = 1 \right\} .$$

Folgern Sie: $\mathrm{SU}(2)$ ist homöomorph zur Einheitssphäre in $\mathbb{C}^2$, vermöge der Abbildung

$$\mathrm{SU}(2) \ni p \mapsto p \cdot (1, 0)^T .$$

(b) Es sei $\mathfrak{su}(2) = L(\mathrm{SU}(2))$. Für $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$ sei $\langle X, Y \rangle = -\mathrm{Spur}(XY)$. Zeigen Sie: $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein (reelles) Skalarprodukt auf $\mathfrak{su}(2)$.

(c) Zeigen Sie, für alle $p \in \mathrm{SU}(2)$ und alle $X, Y \in \mathfrak{su}(2)$, für das Skalarprodukt aus (b):

$$\langle Ad(p)(X), Ad(p)(Y) \rangle = \langle X, Y \rangle .$$

(d) Als Folge von (c) lässt sich, bei geeigneter Identifikation von $\mathfrak{su}(2)$ mit $\mathbb{R}^3$, die adjungierte Darstellung von $\mathrm{SU}(2)$ als Homomorphismus $\mathrm{SU}(2) \to \mathrm{O}(3)$ auffassen. Zeigen Sie: Ad bildet $SU(2)$ surjektiv auf $\mathrm{SO}(3)$ ab. Bestimmen Sie den Kern von Ad.

Aufgabe 3

Es sei G eine Lie-Gruppe mit Lie-Algebra $\mathfrak{g}$, $H \subset G$ eine zusammenhängende, abgeschlossene Untergruppe von G mit zugehöriger Lie-Unteralgebra $\mathfrak{h} = L(H) \subset \mathfrak{g}$.

(a) Es sei $Z(H) = \{p \in G : pq = qp, \forall q \in H\}$, der *Zentralisator von H in G*. Zeigen Sie, daß $Z(H)$ eine abgeschlossene Untergruppe ist, mit

$$L(Z(H)) = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [X, \mathfrak{h}] = \{0\}\} \ .$$

(b) Zeigen Sie, daß der *Normalisator von H in G*,

$$N(H) = \{p \in G \ : \ pHp^{-1} = H\}$$

eine abgeschlossene Untergruppe von G ist. Zeigen Sie ferner, daß

$$L(N(H)) = \{X \in \mathfrak{g} \ : \ [X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}\} \ .$$

Folgern Sie: H ist Normalteiler genau dann, wenn $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$.

Schöne Feiertage ![*]

[*] trotz Hausaufgaben