LEHRSTUHL A FÜR MATHEMATIK
Prof. Dr. H. Führ

Aachen, den 19.1.2009

Lie-Gruppen, Übungsblatt 11

Wird am Montag, dem 26.1.2009, 9:45 Uhr besprochen

Aufgabe 1

Es sei $V(n,k)$ die Menge der k-dimensionalen Teilräume von $\mathbb{R}^n$. Geben Sie eine Bijektion zwischen $V(n,k)$ und dem Quotienten $O(n)/(O(k) \times O(n-k))$ an. Dabei wird $O(k) \times O(n-k)$ kanonisch mit der Untergruppe

$$\left\{ \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & q \end{pmatrix} : p \in O(k), q \in O(n-k) \right\} \subset O(n)$$

identifiziert.
(Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Operation von $O(n)$ auf $V(n,k)$.)
Bemerkung: Durch die Bijektion wird $V(n,k)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k(n-k)$, die sogenannte **Graßmann-Mannigfaltigkeit**.

Aufgabe 2

Zeigen Sie: Es gibt keinen stetigen Schnitt $\sigma : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Es sei $p : G \to K$ ein stetiger und surjektiver Homomorphismus zwischen Lie-Gruppen, mit diskretem Kern. Zeigen Sie: p ist Überlagerung, mit abzählbar vielen Blättern.

Aufgabe 4

Es seien M, N wegzusammenhängende topologische Räume. Zeigen Sie: $\pi_1(M \times N) \cong \pi_1(M) \times \pi_1(N)$.

Aufgabe 5

Bestimmen Sie für die folgenden Lie-Gruppen G die erste Fundamentalgruppe bis auf Isomorphie: $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, $\mathrm{GL}(2,\mathbb{R})$, $SO(2)$, $SU(2)$.
(Hinweis: Verwenden Sie Bemerkung 11.10 aus der Vorlesung.)