Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. H. Führ

Aachen, den 26.1.2009

Lie-Gruppen, Übungsblatt 12

Wird am Montag, dem 2.2.2009, 9:45 Uhr besprochen

Aufgabe 1

Beweisen Sie Satz 13.4 aus der Vorlesung.
(Hinweis: Zu zeigen ist die Injektivität von p. Dazu betrachte man eine Hochhebung $g : M \to N$ von $\mathrm{Id}_M : M \to M$, und zeige, daß g surjektiv ist.)

Aufgabe 2

Es seien G_1, G_2 n-dimensionale zusammenhängende kommutative Lie-Gruppen. Nach Übungsblatt 5, Aufgabe 3 ist dann $G_1 \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{T}^{n-k}$ und $G_2 \cong \mathbb{R}^\ell \times \mathbb{T}^{n-\ell}$, mit geeigneten $k, \ell \in \mathbb{N}_0$.
Es sei $\varphi : G_1 \to G_2$ ein surjektiver glatter Homomorphismus. Zeigen Sie $k \geq \ell$.
(Hinweis: Betrachten Sie $\varphi_\natural : \pi_1(G_1) \to \pi_1(G_2)$.)

Aufgabe 3

Es sei $n \geq 1$. Der **n-dimensionale projektive Raum** $\mathbb{RP}^n$ ist definiert als $\mathbb{RP}^n = S^n / \sim$, dabei ist die Äquivalenzrelation $\sim$ auf S^n definiert durch

$$u \sim v \Leftrightarrow u = v \text{ oder } u = -v \; .$$

Sei $p : S^n \to \mathbb{RP}^n$ die Projektionsabbildung, $p(v) = \{v, -v\}$. $\mathbb{RP}^n$ wird mit der Quotiententopologie versehen: $A \subset \mathbb{RP}^n$ ist offen genau dann, wenn $p^{-1}(A) \subset S^n$ offen ist.

(a) Zeigen Sie: p ist Überlagerung.

(b) Zeigen Sie: Ist $n \geq 2$, so ist $\pi_1(\mathbb{RP}^n) \cong \{\pm 1\}$. Geben Sie explizit Vertreter der Homotopie-Klassen an.

(c) Was passiert im Fall $n = 1$?

Bemerkung: $\mathbb{RP}^n$ läßt sich kanonisch mit der Menge aller Ursprungsgeraden im $\mathbb{R}^{n+1}$ identifizieren.

Aufgabe 4

Es sei $\mathfrak{g}$ eine Lie-Algebra. Wir schreiben $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ für die Gruppe aller Vektorraumautomorphismen von $\mathfrak{g}$, und $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ für die Gruppe aller Lie-Algebrenautomorphismen. Offensichtlich gilt $\mathrm{GL}(\mathfrak{g}) \cong \mathrm{GL}(\dim(\mathfrak{g}), \mathbb{R})$; speziell ist $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ eine Lie-Gruppe, deren Lie-Algebra durch den Raum der Vektorraum-Endomorphismen von $\mathfrak{g}$ gegeben ist. Zeigen Sie:

(a) $\mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ ist eine abgeschlossene Untergruppe von $\mathrm{GL}(\mathfrak{g})$.

(b) Für $T : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ linear gilt: $T \in L(\mathrm{Aut}(\mathfrak{g}))$ genau dann, wenn für alle $X, Y \in \mathfrak{g}$ gilt

$$(*) \quad T([X,Y]) = [T(X),Y] + [X,T(Y)] \ .$$

Bemerkung: Lineare Abbildungen mit Eigenschaft $(*)$ heißen auch *Derivationen* von $\mathfrak{g}$. Als Folgerung aus (b) erhält man, daß der Kommutator zweier Derivationen wieder eine Derivation ist.