Toeplitz-Operatoren I

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 08.01.2009

Matthias Deipenbrock

In diesem Vortrag wollen wir Toeplitz-Operatoren definieren und einige erste Eigenschaften herleiten.

§1 Hardy-Räume und Laurent-Operatoren

Wir betrachten den Torus $\mathbb{T} = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$, mit dem normierten Bogenmaß, bezeichnet mit $d\lambda$, und schreiben $L^p(\mathbb{T})$ für $L^p(\mathbb{T}, d\lambda)$. D.h. ist $f \in L^1(\mathbb{T})$, so gilt

$$\int f(\lambda) d\lambda = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) dt$$

Für eine ganze Zahl n ist die Funktion $\varepsilon_n : \mathbb{T} \to \mathbb{T}, \lambda \mapsto \lambda^n$ stetig.
Wir bezeichnen mit Γ den linearen Aufspann der ε_n mit $n \in \mathbb{Z}$. Die Elemente von Γ werden *Trigonometrische Polynome* genannt.

(1.1) Lemma
Die Menge Γ ist eine $*$-Unteralgebra von $C(\mathbb{T})$ und Γ ist dicht in $C(\mathbb{T})$. $\diamond$

Beweis
Γ ist nach Definition ein Unterraum von $C(\mathbb{T})$. Da mit ε_n und ε_m auch $\varepsilon_m \cdot \varepsilon_n = \varepsilon_{m+n}$ in Γ liegt, ist Γ eine Unteralgebra von $C(\mathbb{T})$. Ebenso bleibt die $*$-Eigenschaft erhalten, da $\varepsilon_m^* = \varepsilon_{-m}$ gilt.
Zur Dichtheit: $\mathbb{T}$ ist ein kompakter Raum, und $\Gamma \subset C(\mathbb{T})$ ist eine Algebra mit folgenden Eigenschaften:

1. Γ enthält die konstanten Funktionen, da $\lambda \mapsto \lambda^0 \in \Gamma$.
2. Γ ist punktetrennend, d.h. zu $\lambda, \mu \in \mathbb{T}$, mit $\lambda \neq \mu$ existiert $\varepsilon_n \in \Gamma$ mit $\varepsilon_n(\lambda) \neq \varepsilon_n(\mu)$. (Wähle z.B. $n = 1$.) und
3. Γ ist selbstadjungiert.

Dann folgt mit dem Satz von Stone-Weierstraß, dass Γ dicht liegt in $C(\mathbb{T})$ bezüglich der Supremumsnorm. $\square$

Wir wissen, dass $C(\mathbb{T})$ für $1 \leq p < \infty$ dicht in $L^p(\mathbb{T})$ liegt, bezüglich der L^p-Norm. Damit liegt dann auch Γ dicht in $L^p(\mathbb{T})$ bezüglich der L^p-Norm. Somit ist $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ eine Orthonormalbasis des Hilbertraums $L^2(\mathbb{T})$.

Wir erinnern an einige Resultate aus der Funktionalanalysis:
Für $f \in L^1(\mathbb{T})$ ist der n-te *Fourier-Koeffizient* von f definiert durch

$$\hat{f}(n) = \int f(\lambda)\overline{\lambda^n}d\lambda$$

und die Funktion

$$\hat{f} : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, \quad n \mapsto \hat{f}(n)$$

ist die *Fourier-Transformierte* von f.
Gilt $\hat{f} = 0$, dann ist $f = 0$ fast überall, denn in diesem Fall gilt $\int g(\lambda)f(\lambda)d\lambda = 0$ für alle $g \in \Gamma$ und daher für alle $g \in C(\mathbb{T})$, da Γ dicht liegt in $C(\mathbb{T})$ bezüglich der Supremumsnorm. Dann ist das Maß $fd\lambda$ Null und damit ist $f = 0$ fast überall.

(1.2) Definition (Hardy-Raum)
Für $p \in [1, \infty]$ setze

$$H^p = \left\{ f \in L^p(\mathbb{T}); \hat{f}(n) = 0 \text{ für } n < 0 \right\}.$$

Dann ist H^p ein L^p-Norm abgeschlossener Unterraum von $L^p(\mathbb{T})$, ein *Hardy-Raum*.$\diamond$

Beweis
Zur Abgeschlossenheit:
Betrachtet man die Fourier-Koeffizienten als lineare Funktionale, so ist H^p abgeschlossen als Schnitt über Kerne von linearen Funktionalen. $\square$

Wir schreiben Γ_+ für den Aufspann der ε_n mit $n \in \mathbb{N}$ und nennen die Elemente von Γ_+ die *analytischen trigonometrischen Polynome*.
Γ_+ ist L^2-Norm dicht in H^2 und $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis von H^2.

(1.3) Lemma
Für $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ ist äquivalent:

a) $\varphi H^2 \subseteq H^2$

b) $\varphi \in H^\infty$ $\diamond$

Beweis
a) $\Rightarrow$ b)
Sei $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ und $\varphi f \in H^2$ für alle $f \in H^2$. Dann gilt dies insbesondere für $f \equiv 1$, denn $1 \in H^2$, da $\int \overline{\lambda^n} d\lambda = 0$ für alle $n < 0$ gilt. Daraus folgt

$$0 = \int \varphi(\lambda) f(\lambda) \overline{\lambda^n} d\lambda = \int \varphi(\lambda) \overline{\lambda^n} d\lambda = \widehat{\varphi}(n), \text{ für alle } n < 0.$$

Also haben wir $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T})$.

b)$\Rightarrow$ a)
Gelte $\widehat{\varphi}(k) = 0$ für alle $k < 0$, d.h. $\int \varphi(\lambda)\overline{\lambda^n} d\lambda = 0$ für alle $k < 0$.
Wir betrachten zunächst ε_n für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi\varepsilon_n}(k) &= \int \varphi\varepsilon_n \overline{\lambda^k} d\lambda \\
&= \int \varphi(\lambda)\lambda^n \overline{\lambda^k} d\lambda \ = \int \varphi(\lambda)\overline{\lambda^{-n}} \cdot \overline{\lambda^k} d\lambda \\
&= \int \varphi(\lambda) \overline{\lambda^{k-n}} d\lambda \\
&= 0, \text{ da } k - n < 0.
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \varphi \cdot \varepsilon_n \in H^2 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Insbesondere ist dann auch $\varphi f \in H^2$ für alle $f \in \Gamma_+$. Sei nun $f \in H^2$ beliebig, dann existiert eine Folge $f_n \in \Gamma_+$, die f approximiert. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi f}(k) &= \int \varphi(\lambda) \cdot f(\lambda) \overline{\lambda^k} d\lambda \\
&= \underbrace{\int \varphi(\lambda) \cdot (f(\lambda) - f_n(\lambda)) \overline{\lambda^k} d\lambda}_{\text{bel. klein für } n \text{ hinreichend groß}} + \underbrace{\int \varphi(\lambda) \cdot f_n(\lambda) \overline{\lambda^k} d\lambda}_{=0, \text{ da } f_n \in \Gamma_+, k<0}
\end{aligned}$$

Damit folgt die Behauptung. $\square$

(1.4) Bemerkung
H^∞ ist eine Unteralgebra von L^∞. $\diamond$

Beweis
Wir wissen schon, dass H^∞ ein Unterraum von L^∞ ist. Zeige noch, mit φ und $\psi \in H^\infty$ ist auch $\varphi \cdot \psi \in H^\infty$.
Wegen $\psi \in H^\infty \subset H^2$ folgt $\varphi \cdot \psi \in H^2$ aus dem vorherigen Lemma, d.h. $\widehat{\varphi\psi}(k) = 0$ für alle $k < 0$. $\square$

Elemente der Hardy-Räume können als analytische Funktionen interpretiert werden, da die Fourierkoeffizienten für negative Zahlen Null sind. Konkret gilt für $f \in H^2$ $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(z)z^n$ also ist auf dem offenen Einheitskreis eine holomorphe Funktion definiert. Daher erhält man ein „analytisches" Verhalten, in Form von folgendem Resultat:

(1.5) Lemma
Ist mit f auch $\overline{f}$ in $H^1(\mathbb{T})$, so existiert ein Skalar $\alpha \in \mathbb{C}$, so dass $f = \alpha$ fast überall gilt. ◇

Beweis
Betrachte zunächst den Fall $f = \overline{f}$ fast überall. Setze $\alpha = \int f(\lambda)d\lambda$, dann gilt

$$\overline{\alpha} = \int \overline{f(\lambda)}d\lambda = \int f(\lambda)d\lambda = \alpha.$$

Für $n \leq 0$ gilt

$$\begin{aligned}
(\widehat{f - \alpha\varepsilon_0})(n) &= \int (f - \alpha\varepsilon_0)(\lambda)\overline{\lambda^n}d\lambda \\
&= \int (f(\lambda) - \alpha\varepsilon_0(\lambda))\overline{\lambda^n}d\lambda \\
&= \int (f(\lambda) - \alpha)\overline{\varepsilon_n(\lambda)}d\lambda \\
&= \int f(\lambda)\overline{\varepsilon_n(\lambda)}d\lambda - \alpha \int \overline{\varepsilon_n(\lambda)}d\lambda \\
&= 0
\end{aligned}$$

für $n < 0$ da $f, \alpha \in H^1(\mathbb{T})$und für $n = 0$, nach Definition von α, da $\varepsilon_0(\lambda) = 1$. Außerdem gilt $(\widehat{f - \alpha\varepsilon_0})(n) = 0$ für $n > 0$, denn

$$(f - \alpha\varepsilon_0) = (\overline{f} - \overline{\alpha}\varepsilon_0) = \overline{(f - \alpha\varepsilon_0)}$$

und damit folgt

$$\int (\overline{f} - \overline{\alpha})\overline{\lambda^n}d\lambda = \overline{\int (f - \alpha)\overline{\lambda^{-n}}d\lambda} = 0.$$

Also hat $f - \alpha\varepsilon_0$ als Fouriertransformierte Null und damit folgt $f = \alpha$ fast überall. Im allgemeinen Fall nehmen wir nur an, dass f und $\overline{f} \in H^1(\mathbb{T})$. Dann gilt:

$$\widehat{f}(n) = \int f(\lambda)\overline{\lambda^n}d\lambda = 0 \text{ und } \widehat{\overline{f}}(n) = \int \overline{f(\lambda)}\overline{\lambda^n}d\lambda = 0 \text{ für alle n < 0.}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\widehat{\mathrm{Re}(f)}(n) &= \frac{1}{2}\widehat{(f+\overline{f})}(n)\\ &= \frac{1}{2}\int f(\lambda)\overline{\lambda^n}d\lambda + \int \overline{f(\lambda)}\overline{\lambda^n}d\lambda\\ &= 0 \text{ für alle } n<0\end{aligned}$$

Und analog folgt

$$\widehat{\mathrm{Im}(f)}(n) = \frac{1}{2i}\widehat{(f-\overline{f})}(n) = 0 \text{ für alle } n<0.$$

Damit sind auch $\mathrm{Re}(f)$ und $\mathrm{Im}(f) \in H^1(\mathbb{T})$. Also gilt $\mathrm{Re}(f) = a$ und $\mathrm{Im}(f) = b$ fast überall für reelle Konstanten a und b. Insgesamt gilt $f = a + ib$ fast überall, somit ist f fast überall konstant. □

(1.6) Definition (Laurent-Operatoren)
Für $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ definieren wir den Multiplikationsoperator

$$M_\varphi : \quad L^2(\mathbb{T}) \to L^2(\mathbb{T}), \quad f \mapsto \varphi \cdot f$$

M_φ heißt *Laurent-Operator*. ◇

(1.7) Bemerkung
$M_\varphi \in B(L^2(\mathbb{T}))$ und die Abbildung

$$L^\infty(\mathbb{T}) \to B(L^2(\mathbb{T})), \quad \varphi \mapsto M_\varphi$$

ist ein isometrischer $*$-Homomorphismus. ◇

Beweis
Die Linearität von M_φ ist klar und es gilt

$$\begin{aligned}\|M_\varphi(f)\|_{L^2}^2 &= \int |\varphi(\lambda)f(\lambda)|^2 d\lambda\\ &\leq \|\varphi\|_\infty^2 \cdot \int |f(\lambda)|^2 d\lambda\\ &= \|\varphi\|_\infty^2 \cdot \|f\|_{L^2}^2\end{aligned}$$

Also ist M_φ beschränkt. Die Homomorphismuseigenschaft ist klar und es gilt

$$\begin{aligned}\left\langle M_\varphi^*(f), g\right\rangle &= \langle f, M_\varphi(g)\rangle \\ &= \int f\overline{\varphi g}d\lambda \\ &= \int \overline{\varphi}f\overline{g}d\lambda \\ &= \langle M_{\overline{\varphi}}f, g\rangle\end{aligned}$$

für alle $f, g \in L^2$. Also ist die Abbildung ein $*$-Homomorphismus. Zur Isometrie: Wir hatten bereits gesehen, dass $\|M_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$ gilt. Nehme nun an, es gelte $\|\varphi\|_\infty > \|M_\varphi\|$. Dann existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $\|\varphi\|_\infty - \varepsilon > \|M_\varphi\|$ gilt. Somit existiert eine messbare Menge $S \subset \mathbb{T}$, so dass $d\lambda(S) > 0$ und $|\varphi(w)| > \|M_\varphi\| + \varepsilon$ für alle $w \in S$ gilt. Nun ist $d\lambda$ regulär und daher gilt $d\lambda(S) = \sup\{d\lambda(K); K \text{ ist kompakt und } K \subseteq S\}$. Also können wir S als kompakt voraussetzen, und $d\lambda(S) < \infty$ da der Torus endliches Maß hat. Wir erhalten

$$\begin{aligned}\|M_\varphi\|^2 d\lambda(S) &= \|M_\varphi(\chi_S)\|_{L^2}^2 \\ &= \int |\varphi(w)\chi_S(w)|^2 d\lambda \\ &\geq \int (\|M_\varphi\| + \varepsilon)^2\chi_S d\lambda \\ &= (\|M_\varphi\| + \varepsilon)^2 d\lambda(S)\end{aligned}$$

Daraus folgt der Widerspruch $\|M_\varphi\| \geq \|M_\varphi\| + \varepsilon$ und wir erhalten insgesamt $\|M_\varphi\| = \|\varphi\|_\infty$. Somit ist die Abbildung eine Isometrie. □

(1.8) Bemerkung

Wir setzen $v = M_{\varepsilon_1}$, also $v(f) = M_{\varepsilon_1}(f)$, dann ist v der Shift auf der Basis $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ von $L^2(\mathbb{T})$, da $v(\varepsilon_n) = \varepsilon_{n+1}$. v ist invertierbar.
Die Einschränkung u, von v auf $H^2(\mathbb{T})$ ist der Shift auf der Basis $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $H^2(\mathbb{T})$. u ist nicht mehr invertierbar. ◇

Wir werden nun die unter v invarianten Unterräume charakterisieren und dazu zunächst diejenigen Operatoren bestimmen, die mit v kommutieren.

(1.9) Satz

Ist w ein beschränkter Operator auf $L^2(\mathbb{T})$, dann kommutiert w mit v genau dann, wenn $w = M_\varphi$ für ein $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt. ◇

Beweis
Die Rückrichtung folgt sofort, denn

$$\begin{aligned} M_\varphi M_\psi(f) &= M_\varphi(\psi f) = \varphi\psi f \\ &= \psi\varphi f = M_\psi(\varphi f) \\ &= M_\psi M_\varphi(f) \quad \text{für alle } f \in L^2(\mathbb{T}). \end{aligned}$$

Für die Hinrichtung sei w ein beschränkter Operator auf $L^2(\mathbb{T})$, mit $wv = vw$. Zu zeigen ist, $w = M_\varphi$ für ein $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.
Wir betrachten zunächst ein $\psi \in \Gamma$, dann ist M_ψ im Aufspann der v^n für $n \in \mathbb{Z}$, da $\varepsilon_n = \varepsilon_1^n = v^n$ gilt. Also kommutiert auch M_ψ mit w.
Sei nun $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ beliebig, dann existiert eine Folge $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Gamma$, so dass

$$\|\psi_n - \psi\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Daraus folgt nun wegen $\|w(\psi_n) - w(\psi)\|_{L^2} \leq \|w\| \cdot \|\psi_n - \psi\|_{L^2}$ auch

$$\|w(\psi_n) - w(\psi)\|_{L^2} \longrightarrow 0.$$

Indem wir gegebenenfalls zu einer Teilfolge übergehen, können wir annehmen, dass $\psi_n \to \psi$ fast überall und $w(\psi_n) \to w(\psi)$ fast überall gilt.
Nun setzen wir $\varphi = w(\varepsilon_0)$. Dann gilt

$$w(\psi_n) = w(M_{\psi_n}(\varepsilon_0)) = M_{\psi_n} w(\varepsilon_0) = \psi_n \varphi$$

fast überall. Damit gilt dann auch $w(\psi) = \psi\varphi$ fast überall. Zu zeigen ist nun noch $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$.
Setze dazu $E_n = \left\{\lambda \in \mathbb{T}; |\varphi(\lambda)| > \|w\| + \frac{1}{n}\right\}$. Dann ist E_n eine meßbare Menge und wegen

$$\begin{aligned} \|w\|^2 \|\chi_{E_n}\|_{L^2}^2 &\geq \|w(\chi_{E_n})\|_{L^2}^2 \\ &= \int |\varphi(\lambda)|^2 \chi_{E_n}(\lambda) d\lambda \\ &\geq \int (\|w\| + \frac{1}{n})^2 \chi_{E_n}(\lambda) d\lambda \\ &= (\|w\| + \frac{1}{n})^2 \|\chi_{E_n}\|_{L^2}^2 \end{aligned}$$

ist E_n eine Nullmenge. Dann ist aber auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \{\lambda \in \mathbb{T}; |\varphi(\lambda)| > \|w\|\}$ eine Nullmenge. Wir erhalten also $|\varphi(\lambda)| \leq \|w\|$ fast überall also ist φ wesentlich beschränkt und somit gilt $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Wir haben also $w = M_\varphi$ auf $L^\infty(\mathbb{T})$ und daher auch auf $L^2(\mathbb{T})$. □

§2 Wiener- und Beurling-Räume

Wir kommen zur Charakterisierung der invarianten Unterräume von H^2. Ist E eine Borelmenge auf $\mathbb{T}$, so ist M_{χ_E} eine Projektion auf $L^2(\mathbb{T})$, da $M_{\chi_E}^2 = M_{\chi_E}$ gilt.

(2.1) Definition (Wiener-Unterraum)
$K := \text{Range}(M_{\chi_E})$ heißt *Wiener-Unterraum* von $L^2(\mathbb{T})$. ◇

(2.2) Bemerkung
Es gilt $v(K) = K$. ◇

Beweis
Da $\chi_E \in L^\infty$, vertauscht M_{χ_E} mit v. Also hat man

$$v(M_{\chi_E}(f)) = M_{\varepsilon_1} M_{\chi_E}(f) = M_{\chi_E}(\underbrace{M_{\varepsilon_1} f}_{\in L^2(\mathbb{T})}) \in K$$

also $v(K) \subset K$. Sei nun $g \in K$, dann existiert ein $f \in L^2$ mit $g = M_{\chi_E} f$. Mit f ist auch $M_{\varepsilon_{-1}} f$ in L^2 und daher ist $M_{\chi_E} M_{\varepsilon_{-1}} f \in K$. Nun gilt

$$v(M_{\chi_E} M_{\varepsilon_{-1}} f) = M_{\chi_E} M_{\varepsilon_1} M_{\varepsilon_{-1}} f = M_{\chi_E} f = g.$$

Also haben wir $g \in v(K)$ und daher $K \subset v(K)$. □

(2.3) Definition (Beurling-Unterraum)
Ist φ eine unitäres Element von $L^\infty(\mathbb{T})$,so ist der Operator M_φ unitär. Dann ist $\varphi H^2(\mathbb{T})$ ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\mathbb{T})$, den man *Beurling-Unterraum* nennt. ◇

(2.4) Bemerkung
$\varphi H^2(\mathbb{T})$ ist ebenfalls v-invariant aber $v(\varphi H^2) \subsetneq \varphi H^2$. ◇

Beweis
Angenommen doch, so folgt $\varphi H^2 = v \varphi H^2 = \varphi v H^2$. Also folgt, da φ eine Einheit ist, dass $H^2 = u(H^2)$ gilt, damit wäre der einseitige Shift surjektiv und somit auch invertierbar, was aber offensichtlich nicht der Fall ist. □

(2.5) Satz
Die unter $v = M_{\varepsilon_1}$ invarianten, abgeschlossenen Unterräume von $L^2(\mathbb{T})$, sind genau die Wiener- und Beurlingräume. Ist K ein invarianter, abgeschlossener Unterrraum für v, so gilt

1. $v(K) = K$ genau dann, wenn K ein Wienerraum
   und

2. $v(K) \subsetneq K$ genau dann, wenn K ein Beurlingraum ist. $\diamond$

Beweis
Sei K ein abgeschlossener Unterraum von $L^2(\mathbb{T})$, der invariant unter v ist.
Wir nehmen im ersten Fall an, dass $v(K) = K$ gilt und bezeichnen mit p die Projektion von $L^2(\mathbb{T})$ auf K. Dann gilt offenbar $pv = vp$. Somit folgt mit 1.9, dass ein $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ existiert, so dass $p = M_\varphi$ gilt. Mit p ist auch φ eine Projektion. Somit gilt $\varphi = \chi_E$ fast überall, wobei E eine messbare Menge ist. Deshalb gilt $p = M_{\chi_E}$, also ist K ein Wiener-Raum.
Sei nun $v(K) \subsetneq K$. K ist abgeschlossen und daher auch ein Hilbertraum. $v(K)$ ist dann ein abgeschlossener Unterraum von K,also existiert ein Einheitsvektor $\varphi \in K$, der orthogonal zu $v(K)$ ist. Wir wissen, dass $v^n(\varphi) \in v(K)$ gilt für alle $n > 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} 0 = \langle v^n(\varphi), \varphi \rangle &= \int v^n(\varphi(\lambda))\overline{\varphi(\lambda)} d\lambda \\ &= \int \varepsilon_n(\lambda)\varphi(\lambda)\overline{\varphi(\lambda)} d\lambda \\ &= \int \varepsilon_n(\lambda) \left|\varphi(\lambda)\right|^2 d\lambda \end{aligned}$$

Für $n < 0$ erhalten wir

$$\begin{aligned} 0 = \left\langle \varphi, v^{-n}(\varphi) \right\rangle &= \int \varphi(\lambda)\overline{v^{-n}(\varphi)} d\lambda \\ &= \int \varepsilon_n(\lambda) \left|\varphi(\lambda)\right|^2 d\lambda. \end{aligned}$$

Und daher erhalten wir insgesamt $\int \varepsilon_n(\lambda) \left|\varphi(\lambda)\right|^2 d\lambda = 0$ für alle $n \neq 0$. Also gilt $|\varphi|^2 = \alpha$ fast überall für einen Skalar α. Nach Voraussetzung gilt $\|\varphi\|_{L^2} = 1$ also folgt $\alpha = 1$. Damit ist φ unitär in $L^\infty(\mathbb{T})$.
Außerdem gilt $\varphi H^2 \subseteq K$, denn für alle $n \geq 0$ gilt

$$\begin{aligned} & v^n\varphi = \varphi\varepsilon_n \in K \\ & \Rightarrow \varphi(\mathrm{span}(\varepsilon_n : n \geq 0)) \subset K \\ & \Rightarrow \varphi(H^2) \subset \overline{K} = K. \end{aligned}$$

$\square$

Weiter wissen wir, dass $(\varepsilon_n\varphi)$ mit $n \in \mathbb{Z}$ eine Orthonormalbasis von $L^2(\mathbb{T})$ ist und dass $\varepsilon_n\varphi \in K^\perp$ für $n < 0$, da $\langle \varepsilon_n\varphi, \psi \rangle = \langle \varphi, \varepsilon_{-n}\psi \rangle = 0$ für alle $\psi \in K$, denn $\varepsilon_{-n}\psi \in$

$v(K)$. Damit ist $(\varepsilon_n\varphi)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von K. Deshalb gilt $K = \varphi H^2$ und K ist ein Beurling-Raum.

Wir kommen noch einmal darauf zurück, dass man Elemente aus H^2 als holomorphe Funtionen auffassen kann und erhalten ein analoges Ergebnis des Identitätssatzes:

(2.6) Satz (F. und M. Riesz)
Ist f eine Funktion in H^2, die nicht fast überall verschwindet, dann ist die Menge der Punkte von $\mathbb{T}$, auf denen f verschwindet, schon eine Menge vom Maß Null. ◇

Beweis
Setze $E = f^{-1}(\{0\})$ und $K \subseteq H^2$ als L^2-Norm abgeschlossen mit
$K = \{g \in H^2; g\chi_E = 0 \text{ fast überall}\}$. K ist invariant unter u und daher auch unter v. Weiter gilt

$$\bigcap_{n=0}^{\infty} u^n(K) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} u^n(H^2) = 0$$

Also erhält man aus $v(K) = K$ damit $K = 0$ und somit auch $f = 0$ fast überall ,da $f \in K$ im Widerspruch zur Voraussetzung. Man hat also $v(K) \neq K$, also mit Satz (2.5) $K = \varphi H^2$ für ein invertierbares $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Also hat man insbesondere $\varphi\chi_E = 0$ fast überall und da φ invertierbar ist folgt daraus $\chi_E = 0$ fast überall. Somit ist E eine Nullmenge. □

(2.7) Satz
Die einzigen abgeschlossenen Unterräume von H^2, die invariant unter dem Shift u sind, sind die trivialen invarianten Unterräume $\{0\}$ und H^2. ◇

Beweis
Angenommen K ist ein nichttrivialer Unterraum von H^2, der invariant unter u ist. Da $\bigcap_{n=1}^{\infty} u^n(K) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} u^n(H^2) = 0$ und $K \neq 0$ gilt, erhält man $u(K) \neq K$, also ist K ein Beurling-Raum nach Satz (2.5).
Ebenso ist $H^2 \ominus K$ dann invariant unter u und es gilt $u(H^2 \ominus K) \neq H^2 \ominus K$. Also folgt, dass auch $H^2 \ominus K$ ein Beurling-Raum ist.
Also existieren Einheiten φ und $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, so dass $K = \varphi H^2$ und $H^2 \ominus K = \psi H^2$ gilt. Für alle $n \geq 0$ hat man $\varepsilon_n\varphi \in K$ und $\varepsilon_n\psi \in H^2 \ominus K$, also

$$\langle \varepsilon_n\varphi, \psi\rangle = \langle \varphi, \varepsilon_n\psi\rangle = 0$$

Daraus folgt: $\varphi\overline{\psi}$ hat die Fourier-Transformierte 0 und damit erhalten wir $\varphi\overline{\psi} = 0$ fast überall im Widerspruch dazu, dass φ und ψ invertierbar sind. Also kann ein solches K nicht existieren. □

§3 Toeplitz-Operatoren

(3.1) Definition (Toeplitz-Operatoren)
Sei p die Projektion von $L^2(\mathbb{T})$ auf $H^2(\mathbb{T})$. Ist $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ so hat der Operator

$$T_\varphi : \; H^2(\mathbb{T}) \to H^2(\mathbb{T}), \;\; f \mapsto p(\varphi f)$$

Norm $\|T_\varphi\| \leq \|\varphi\|_\infty$. Wir nennen T_φ den *Toeplitzoperator* mit Symbol φ. ◇

(3.2) Bemerkung
Die Abbildung

$$L^\infty(\mathbb{T}) \to B(H^2), \;\; \varphi \mapsto T_\varphi$$

ist linear und respektiert die Involution, d.h. $T_\varphi^* = T_{\overline{\varphi}}$. Falls also $\varphi = \overline{\varphi}$ gilt, so ist T_φ selbstadjungiert. ◇

Beweis
Für $f, g \in H^2$ beliebig gilt

$$\begin{aligned}\left\langle T_\varphi^*(f), g \right\rangle &= \langle f, T_\varphi(g) \rangle = \langle f, p(\varphi g) \rangle \\ &= \langle p(f), \varphi g \rangle = \langle \overline{\varphi} f, g \rangle \\ &= \langle \overline{\varphi} f, pg \rangle = \langle p(\overline{\varphi} f), g \rangle \\ &= \left\langle T_{\overline{\varphi}}(f), g \right\rangle\end{aligned}$$

□

Für $f \in L^2(\mathbb{T})$ haben wir bezüglich der Basis $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ die Darstellung

$$f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \varepsilon_n \rangle \, \varepsilon_n.$$

Ist $T \in B(L^2(\mathbb{T}))$, so gilt

$$Tf = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \langle Tf, \varepsilon_m \rangle \, \varepsilon_m.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}Tf &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left\langle T\Big(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \varepsilon_n \rangle \, \varepsilon_n\Big), \varepsilon_m \right\rangle \varepsilon_m \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle T \langle f, \varepsilon_n \rangle \, \varepsilon_n, \varepsilon_m \rangle \, \varepsilon_m \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \varepsilon_n \rangle \, \langle T\varepsilon_n, \varepsilon_m \rangle \, \varepsilon_m\end{aligned}$$

Definiert man nun zu T die formale Matrix $\Lambda = \left(\lambda_{i,j}\right)_{i,j}$ für $i, j \in \mathbb{Z}$ durch

$$\lambda_{i,j} = \left\langle T\varepsilon_i, \varepsilon_j \right\rangle,$$

so erhält man

$$Tf = \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle f, \varepsilon_n \rangle \lambda_{n,m}\varepsilon_m$$

und speziell erhält man wie erwartet

$$\begin{aligned} T\varepsilon_l &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \langle \varepsilon_l, \varepsilon_n \rangle \lambda_{n,m}\varepsilon_m \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \lambda_{l,m}\varepsilon_m \\ &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} \left\langle T\varepsilon_l, \varepsilon_m \right\rangle \varepsilon_m. \end{aligned}$$

(3.3) Bemerkung
Für $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ betrachten wir nun den Laurent-Operator M_φ. Dann gilt für die Matrix von M_φ

$$\lambda_{i,j} = \lambda_{i+1,j+1}$$

für alle $i, j \in \mathbb{Z}$ ◇

Beweis
Wir wissen, dass M_φ mit v kommutiert. Daraus erhalten wir

$$\begin{aligned} \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_{l+1,j+1}\varepsilon_{j+1} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\langle M_\varphi\varepsilon_{l+1}, \varepsilon_{j+1} \right\rangle \varepsilon_{j+1} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\langle M_\varphi\varepsilon_{l+1}, \varepsilon_j \right\rangle \varepsilon_j = M_\varphi\varepsilon_{l+1} \\ &= M_\varphi v\varepsilon_l = vM_\varphi\varepsilon_l \\ &= v(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\langle M_\varphi\varepsilon_l, \varepsilon_j \right\rangle \varepsilon_j) = \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left\langle M_\varphi\varepsilon_l, \varepsilon_j \right\rangle \varepsilon_{j+1} \\ &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \lambda_{l,j}\varepsilon_{j+1} \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Fourierreihe folgt nun $\lambda_{l,j} = \lambda_{l+1,j+1}$ für alle $l, j \in \mathbb{Z}$. □

Ist umgekehrt w ein beschränkter Operator auf $L^2(\mathbb{T})$, dessen Matrix bezüglich der ε_n konstant entlang der Diagonalen ist, so kommutiert w mit v, und somit ist w ein Laurent-Operator nach Satz (1.9).

Somit ist klar, dass die Matrix eines Toeplitzoperators bezüglich der Basis $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant entlang der Diagonalen ist. Umgekehrt kann man zeigen, dass ein beschränkter Operator auf $H^2(\mathbb{T})$, dessen Matrix bzgl. der Basis $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konstant entlang der Diagonalen ist, ein Toeplitz-Operator ist. (ohne Beweis)

Der Satz von F. und M. Riesz hat Einfluss auf die Spektraltheorie der Toeplitzoperatoren:

(3.4) Bemerkung
Ist $\varphi \in H^\infty(\mathbb{T})$ und φ ist kein Skalar fast überall, so hat T_φ keine Eigenwerte. $\diamond$

Beweis
Angenommen für $f \in H^2(\mathbb{T})$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(T_\varphi - \lambda)(f) = 0$, so folgt daraus $(\varphi - \lambda)(f) = 0$ fast überall. Da $(\varphi - \lambda) \in H^2(\mathbb{T})$ nicht das Nullelement ist, ist die Menge der Punkte, auf denen es verschwindet nach Satz (2.6) eine Nullmenge und daher folgt $f = 0$ fast überall. $\square$

Wir kommen zu einer Komplikation, die in der Theorie der Toeplitz-Operatoren auftritt und sie von der Theorie der Laurent-Operatoren unterscheidet:

(3.5) Bemerkung
Obwohl $M_\varphi M_\psi = M_{\varphi\psi}$ für beliebige $\varphi, \psi \in L^\infty(\mathbb{T})$ gilt, ist die entsprechende Aussage für Toeplitzoperatoren im Allgemeinen falsch. $\diamond$

Beweis
Wir betrachten ein Gegenbeispiel. Setze $\varphi = \varepsilon_1$ und $\psi = \varepsilon_{-1}$. Dann ist $T_\varphi = u$, der unilaterale Shift und $T_\psi = u^*$. Nun gilt $u^*(\varepsilon_0) = 0,\ u^*u \neq 1$ aber $T_{\varphi\psi} = T_{\varepsilon_0} = 1$ also $T_\varphi T_\psi \neq T_{\varphi\psi}$. $\square$

In gewissen wichtigen Spezialfällen können wir allerdings $T_\varphi T_\psi = T_{\varphi\psi}$ erhalten, wie z.B. in folgendem Resultat

(3.6) Satz
Sei $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ und $\psi \in H^\infty(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$T_{\varphi\psi} = T_\varphi T_\psi \text{ und } T_{\overline{\psi}\varphi} = T_{\overline{\psi}} T_\varphi$$

$\diamond$

Beweis
Da $\psi \in H^\infty(\mathbb{T})$, gilt $\psi H^2(\mathbb{T}) \subseteq H^2(\mathbb{T})$. Wenn $f \in H^2(\mathbb{T})$ ist, gilt

$$T_\varphi T_\psi(f) = p(\varphi p(\psi f)) = p(\varphi\psi f) = T_{\varphi\psi}(f)$$

Also erhalten wir die erste Gleichung. Für die zweite Gleichung beachten wir, dass $T_{\overline{\varphi}} T_\psi = T_{\overline{\varphi}\psi}$ aus der ersten Gleichung folgt. Adjunktion liefert uns dann

$$\begin{aligned} &(T_{\overline{\varphi}} T_\psi)^* = (T_{\overline{\varphi}\psi})^* \\ &\Leftrightarrow T_\psi^* T_{\overline{\varphi}}^* = T_{\overline{\varphi}\psi}^* \\ &\Leftrightarrow T_{\overline{\psi}} T_\varphi = T_{\overline{\psi}\varphi} \end{aligned}$$

□

Nun untersuchen wir einige Aspekte der elemantaren Spektraltheorie von Toeplitzoperatoren

(3.7) Satz (Hartman-Wintner)
Sei $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ und bezeichne $\sigma(\varphi)$ das Spektrum von φ in $L^\infty(\mathbb{T})$. Dann gilt

$$\sigma(\varphi) \subseteq \sigma(T_\varphi) \text{ und } r(T_\varphi) = \left\|T_\varphi\right\| = \|\varphi\|_\infty$$

◇

Beweis
Da $T_\varphi - \lambda = T_{\varphi-\lambda}$ für $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt, genügt es für $\sigma(\varphi) \subseteq \sigma(T_\varphi)$ zu zeigen, dass φ in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar ist, falls T_φ invertierbar ist. Nehme also an, dass T_φ invertierbar ist und setze $M := \left\|T_\varphi^{-1}\right\| > 0$. Für alle $f \in H^2(\mathbb{T})$ gilt

$$\left\|T_\varphi^{-1}(f)\right\| \leq M \|f\|_{L^2},$$

indem wir f durch $T_\varphi(f)$ ersetzen erhalten wir daraus

$$\|f\|_{L^2} = \left\|T_\varphi^{-1}(T_\varphi(f))\right\|_{L^2} \leq M \left\|T_\varphi(f)\right\|_{L^2}.$$

Ist nun $n \in \mathbb{Z}$, so gilt

$$\begin{aligned} \left\|M_\varphi(\varepsilon_n f)\right\|_{L^2} = \|\varphi\varepsilon_n f\|_{L^2} &= \int \varphi(\lambda)\lambda^n f(\lambda)\overline{\varphi(\lambda)\lambda^n f(\lambda)} d\lambda \\ &= \int \varphi(\lambda) f(\lambda)\overline{\varphi(\lambda) f(\lambda)} d\lambda = \|\varphi f\|_{L^2} \\ &\geq \left\|T_\varphi(f)\right\|_{L^2} \geq \|f\|_{L^2} \frac{1}{M} \\ &= \frac{\|\varepsilon_n f\|_{L^2}}{M} \end{aligned}$$

Wir wissen, dass die Funktionen $\varepsilon_n f$ dicht in $L^2(\mathbb{T})$ liegen bzgl. der L^2-Norm, da Γ dicht in $L^2(\mathbb{T})$ bzgl. der $L^2(\mathbb{T})$. Daher haben wir für alle $g \in L^2(\mathbb{T})$

$$\left\|M_\varphi(g)\right\| \geq \|g\| \frac{1}{M}$$

und daher

$$\begin{aligned}
\left\langle M_\varphi^* M_\varphi(g), g \right\rangle &= \left\langle M_\varphi(g), M_\varphi(g) \right\rangle = \left\|M_\varphi(g)\right\|_{L^2} \\
&\geq \frac{\|g\|_{L^2}^2}{M^2} = \langle g, g \rangle
\end{aligned}$$

$\Rightarrow M_\varphi^* M_\varphi \geq M^{-2} > 0$

$\Rightarrow M_\varphi^* M_\varphi$ ist invertierbar

$\Rightarrow M_\varphi$ ist invertierbar, da M_φ normal ist.

Außerdem ist die Abbildung

$$L^\infty(\mathbb{T}) \to B(L^2(\mathbb{T})), \quad \varphi \mapsto M_\varphi$$

ein isometrischer $*$-Homomorphismus, daher ist φ in $L^\infty(\mathbb{T})$ invertierbar.

Sei nun $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$ beliebig. Da $\sigma(\varphi) \subseteq \sigma(T_\varphi)$ gilt, erhalten wir

$$\left\|T_\varphi\right\| \leq \|\varphi\|_\infty = r(\varphi) \leq r(T_\varphi) \leq \left\|T_\varphi\right\|$$

Dabei gilt $\leq \|\varphi\|_\infty = r(\varphi)$, da φ ein normaler Operator auf einem Hilbertraum ist. Somit gilt die gewünschte Gleichheit. □