Ideale und positive Funktionale

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 04.12.2009

Sophia Dahmen

In diesem Vortrag werden positive Elemente einer C^*-Algebra und die approximierende Eins eingeführt und die wichtigsten Eigenschaften von Idealen und Homomorphismen in C^*-Algebren erarbeitet.

§1 Positive Elemente einer C^*-Algebra

Sei $\mathcal{A}_{sa}$ die Menge aller selbstadjungierten Elemente aus $\mathcal{A}$, das heißt sie enthält alle $a \in \mathcal{A}$ für die gilt $a^* = a$. Weiterhin sei Ω ein lokal kompakter Hausdorffraum und $\mathcal{A} = C_0(\Omega)$. Dann ist $\mathcal{A}_{sa}$ die Menge der reellwertigen Funktionen in $\mathcal{A}$. Auf $\mathcal{A}_{sa}$ wird eine Halbordnung definiert durch $f \leq g$ genau dann, wenn $f(\omega) \leq g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Ein Element $f \in \mathcal{A}_{sa}$ heißt positiv genau dann, wenn $f(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$ gilt. In diesem Fall besitzt f eine eindeutig bestimmte positive Wurzel in $\mathcal{A}$, und zwar $\omega \mapsto \sqrt{f(\omega)}$. Falls bereits $f = \bar{f}$ gilt (das heißt f reelwertig), kann man die Positivität von f auch wie folgt definieren: f ist positiv, wenn $\|f - t\| \leq t$ für ein $t \in \mathbb{R}_+$. Umgekehrt folgt aus $\|f\| \leq t$ und $f \geq 0$ auch $\|f - t\| \leq t$.
Dazu: $\Rightarrow$: Angenommen es existiert ein $\tilde{\omega} \in \Omega$ mit $f(\tilde{\omega}) < 0$ und es gilt $\|f - t\| \leq t$ für alle $t \in \mathbb{R}_+$. Dann gilt

$$|f(\tilde{\omega}) - t| \leq \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - t| = \|f - t\| \leq t$$

$$\Rightarrow |f(\tilde{\omega}) - t| = -f(\tilde{\omega}) + t \leq t \Rightarrow -f(\tilde{\omega}) \leq 0 \Rightarrow f(\tilde{\omega}) \geq 0.$$

Dies ist ein Widerspruch zur Annahme und somit ist f positiv.
$\Leftarrow$: Sei $f \geq 0$ und $\|f\| \leq t$ für ein $t \in \mathbb{R}_+$. Daraus erhält man $\|f\| - t \leq 0$ und dann folgt:

$$\|f - t\| = \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega) - t| = |\|f\| - t| = t - \|f\| \leq t.$$

Damit gilt also auch die Rückrichtung.
Im folgenden Abschnitt sollen diese Begriffe nun auch für beliebige C^*-Algebren definiert und untersucht werden. Dabei werden wir häufig die beiden folgenden Hilfsaussagen verwenden:

(1.1) Lemma

1. Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $\mathcal{B}$ eine C^*-Unteralgebra, dann gilt $\sigma_{\mathcal{B}}(b) \cup \{0\} = \sigma_{\mathcal{A}}(b) \cup \{0\}$ für alle $b \in \mathcal{B}$.

2. Das Spektrum eines selbstadjungierten Elementes ist reell. ◇

Beweis

1. Siehe 3. Vortrag Satz (4.4)
2. Siehe G.J. Murphy: „C^*-Algebras and Operator Theory“, Kapitel 2, Theorem 2.1.8. oder unter Verwendung der Gelfand-Transformation zu der von a erzeugten C^*-Algebra. □

(1.2) Definition
Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige C^*-Algebra. Dann nennt man $a \in \mathcal{A}$ *positiv*, falls gilt $a = a^*$ und $\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_+$. Man schreibt dafür auch $a \geq 0$ und mit $\mathcal{A}^+$ bezeichnet man die Menge der positiven Elemente in $\mathcal{A}$. ◇

(1.3) Beispiel
Sei S eine nicht-leere Menge, dann ist $\ell^\infty(S)$, die Menge der beschränkten komplexwertigen Funktionen, eine C^*-Algebra. Dazu werden die Operationen jeweils punktweise definiert, es gilt $f^* = \bar{f}$ und man verwendet die Supremumsnorm. $f \in \ell^\infty(S)$ ist positiv im obigen Sinne genau dann, wenn f reelwertig ist und $f(x) \geq 0$ für alle $x \in S$, da $\sigma(f)$ dem Bild von f entspricht. ◇

(1.4) Satz
Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und $a \in \mathcal{A}^+$. Dann existiert ein eindeutig bestimmtes $b \in \mathcal{A}^+$, sodass gilt $b^2 = a$. Dann heißt b positive Wurzel von a. ◇

Beweis
<u>Existenz:</u> Sei $\mathcal{B}$ die von a erzeugte C^*-Algebra. Dann ist $\mathcal{B}$ kommutative C^* Algebra, da a hermitesch ist und es sich um den Abschluss aller Polynome in a mit konstantem Term 0 handelt. Daher ist $C_0(\sigma(\mathcal{B}))$ nach dem Satz von Gelfand-Naimark isomorph zu $\mathcal{B}$. Zu $\hat{a} \in C_0(\sigma(\mathcal{B}))$ existiert ein Element $\hat{b} = \sqrt{\hat{a}} \in C_0(\sigma(\mathcal{B}))$ mit der Eigenschaft $\hat{b}^2 = \hat{a}$. Da die Gelfand-Transformation injektiv und multiplikativ ist, folgt die Existenz eines $b \in \mathcal{B}$ mit $b^2 = a$. Da $\hat{b}$ nur positive reelle Werte annimmt und b in $\mathcal{B}$ liegt, folgt nach Vortrag 2 Satz (2.2.c), dass $\sigma(b) \geq 0$ ist.
<u>Eindeutigkeit:</u> Sei nun $c \in \mathcal{A}^+$ ein weiteres Element mit der Eigenschaft $c^2 = a$. Es gilt $ac = c^3 = ca$, woraus folgt, dass a und c kommutieren. Da b aber in $\mathcal{B}$ liegt, handelt es sich um den Grenzwert einer Folge von Polynomen in a und es folgt, dass auch b und c kommutieren. Sei nun $\mathcal{C}$ die von b und c erzeugte kommutative C^*-Algebra. Betrachtet man die zugehörige Gelfand-Transformation $\Gamma : \mathcal{C} \to C_0(\sigma(\mathcal{C}))$, dann sind $\hat{b}$ und $\hat{c}$ beides positive Wurzeln von $\hat{a}$. Daraus folgt nun aber $\hat{b} = \hat{c}$ und da die Gelfand-Transformation nach dem Satz von Gelfand- Naimark insbesondere injektiv ist, gilt somit $b = c$. □

(1.5) Bemerkung

1. Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra und a ein positives Element. Dann bezeichnet $a^{1/2}$ die eindeutig bestimmte positive Wurzel b.
2. Ist c hermitesch, so ist c^2 positiv und wir definieren $|c| = (c^2)^{1/2}$.
3. Wir setzen $c^+ = 1/2(|c| + c)$ und $c^- = 1/2(|c| - c)$. Dann sieht man leicht, dass $c^+ - c^- = 1/2(|c| + c) - 1/2(|c| - c) = c$ und $c^+c^- = 1/2(|c| + c) * 1/2(|c| - c) = 1/4(|c|^2 - c^2) = 0$ gilt. $\diamond$

(1.6) Korollar
Bei c^+, c^- und $|c|$ handelt es sich um positive Elemente der C*-Algebra $\mathcal{A}$. $\diamond$

Beweis
Sei $\mathcal{B}$ die von c erzeugte C^*-Algebra. Nun betrachtet man die zugehörige die Gelfand-Transformation. Das Bild von $\hat{c}$ entspricht dem Spektrum von c und ist somit reellwertig, da c hermitesch ist. Damit ist das Bild von $\hat{c}^2$ positiv und damit auch das Spektrum von c^2. Also ist c^2 positiv und besitzt damit nach Satz (1.3) eine positive Wurzel. c^+ und c^- liegen auch beide wieder in $\mathcal{B}$. Das Bild von $\hat{c}^+$ und $\hat{c}^-$ ist reellwertig und positiv. Damit sind auch c^+ und c^- positiv. $\square$

(1.7) Bemerkung
Sei a hermitesch und ein Element der abgeschlossenen Einheitskugel einer unitären C^*-Algebra. Dann folgt aus der Gelfand-Transformation zu der von 1 und a erzeugten Algebra, dass $1 - a^2 \in \mathcal{A}^+$. Weiterhin sind die Elemente $u = a + i\sqrt{1-a^2}$ und $v = a - i\sqrt{1-a^2}$ unitär, das heißt es gilt $vv^* = v^*v = (a + i\sqrt{1-a^2})(a - i\sqrt{1-a^2}) = a^2 + 1 - a^2 = 1$ und analog $u^*u = uu^* = 1$. Des Weiteren gilt $a = 1/2(u+v)$, woraus folgt, dass $\mathcal{A}_{sa}$ von unitären Elementen aufgespannt wird. $\diamond$

(1.8) Lemma
Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra mit 1, $t \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathcal{A}$ hermitesch. Dann gilt $a \geq 0$, falls $\|a - t\| \leq t$. Umgekehrt folgt aus $\|a\| \leq t$ und a positiv, dass gilt $\|a - t\| \leq t$. $\diamond$

Beweis
Sei $\mathcal{B}$ die von 1 und a erzeugte abelsche C*-Algebra.
$\Leftarrow$: Mit den Vorüberlegungen zu Beginn des Paragraphen gilt nun, dass aus $\|\hat{a} - t\| = \|a - t\| \leq t$ folgt, dass $\hat{a}$ positiv ist. Damit ist aber auch a positiv, da das Bild von $\hat{a}$ dem Spektrum von a entspricht.
$\Rightarrow$: Sei $\|a\| \leq t$ und a positiv, dann ist das Bild von $\hat{a}$ das Spektrum von a und somit ist $\hat{a}$ positiv. Nun folgt mit den Vorüberlegungen und dem Satz von Gelfand-Naimark, da $\mathcal{B}$ kommutativ ist, $\|a - t\| = \left\|\hat{a} - t\hat{1}\right\| \leq t$. $\square$

(1.9) Korollar
Die Summe von zwei positiven Elementen einer C^*-Algebra ist wieder positiv. ◇

Beweis
Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra und seien $a, b \in \mathcal{A}^+$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $\mathcal{A}$ unitär ist. Dann gilt nach den vorherigen Lemma $\|a - \|a\|\| \leq \|a\|$ und $\|b - \|b\|\| \leq \|b\|$. Damit erhält man

$$\|a + b - \|a\| - \|b\|\| \leq \|a - \|a\|\| + \|b - \|b\|\| \leq \|a\| + \|b\|$$

Daraus folgt mit Lemma (1.8), dass $a + b$ wieder positiv ist. □

(1.10) Lemma
Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra.

1. Zu jedem $a \in \mathcal{A}$ existieren eindeutig bestimmte $b, c \in \mathcal{A}_{sa}$ mit $a = b + ic$.
2. Für $a, b \in \mathcal{A}$ gilt $\sigma(ab) \setminus \{0\} = \sigma(ba) \setminus \{0\}$. ◇

Beweis
1. Wähle $b = (a + a^*)/2$ und $c = i(a - a^*)/2$, dann gilt $b^* = b, c^* = c$ und $b + ic = 1/2(a + a^*) + 1/2(a - a^*) = a$. Zur Eindeutigkeit: Seien $b, c \in \mathcal{A}_{as}$ beliebig mit $a = b + ic$. Dann gilt
$$\begin{aligned} a + a^* &= b + ic + b^* - ic^* = b + ic + b - ic = 2b \\ \text{und } a - a^* &= b + ic - b^* + ic^* = b + ic - b + ic = 2ic \end{aligned}$$

2. Sei $c \in \mathcal{A}$ das Inverse zu $1 - ab$. Dann gilt $(1 - ab)c = c - abc = 1 = c - cab = c(1 - ab)$. Damit ist aber $1 + bca$ ein Inverses zu $1 - ba$ da gilt
$$\begin{aligned} (1 - ba)(1 + bca) &= 1 + bca - ba - babca = 1 - ba + b(c - abc)a = 1 \\ \text{und } (1 + bca)(1 - ba) &= 1 - ba + bca - bcaba = 1 - ba + b(c - cab)a = 1 \end{aligned}$$
Damit ist $1 - ab$ genau dann invertierbar, wenn $1 - ba$ invertierbar ist und somit folgt die Behauptung. □

(1.11) Satz
Sei a ein beliebiges Element aus einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$, dann ist a^*a positiv. ◇

Beweis
Zuerst zeigt man, dass $a = 0$, falls $-a^*a \in \mathcal{A}^+$. Nach dem vorherigen Lemma gilt $\sigma(-a^*a)\setminus\{0\} = \sigma(-aa^*)\setminus\{0\}$. Damit folgt, dass auch gilt $-aa^* \in \mathcal{A}^+$. Nun besitzt a nach Lemma (1.10) eine Darstellung der Form $a = b + ic$ mit $b, c \in \mathcal{A}_{sa}$. Damit erhält man $a^*a + aa^* = 2b^2 + 2c^2$, woraus folgt $a^*a = 2b^2 + 2c^2 - aa^* \in \mathcal{A}^+$ nach Korollar (1.9). Daraus folgt nun dass $\sigma(a^*a)$ und $\sigma(-a^*a)$ beide positiv sind und somit muss gelten $\sigma(a^*a) = \{0\}$. Damit erhält man nun $\|a\|^2 = \|a^*a\| = \|(\bar{\hat{a}}\hat{a})\| = 0$. Also gilt in diesem Fall $a = 0$.
Sei nun a ein beliebiges Element aus $\mathcal{A}$ und $b = a^*a$. Dann ist b hermitesch und nach Bemerkung (1.5) können wir $b = b^+ - b^-$ mit $b^+, b^- \in \mathcal{A}^+$ schreiben. Nun setzt man $c = ab^-$ und dann gilt $-c^*c = -b^-a^*ab^- = -b^-(b^+ - b^-)b^- = (b^-)^3 \in \mathcal{A}^+$, da $b^+b^- = 0$. Daraus folgt nun aber mit der ersten Überlegung, dass gilt $c = 0$. Daraus folgt $(b^-)^3 = 0$ und mit der Gelfandtrasformation erhält man daraus $b^- = 0$. Somit ist a^*a positiv. □

(1.12) Lemma
Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige C^*-Algebra. Dann gilt

1. Auf der Menge $\mathcal{A}_{sa}$ wird eine Halbordnung definiert in dem man $a \leq b$ setzt, falls $b - a$ in $\mathcal{A}^+$ liegt.
2. Für alle $a, b, c \in \mathcal{A}_{sa}$ folgt aus $a \leq b$ stets $a + c \leq b + c$.
3. Für $a, b, \in \mathcal{A}_{sa}$ und $t \in \mathbb{R}^+$ folgt aus $a \leq b$, dass gilt $ta \leq tb$.
4. $a \leq b \Leftrightarrow -a \geq -b$.
5. Seien $a, b \in \mathcal{A}_{sa}$ und $c \in \mathcal{A}$. Dann folgt aus $a \leq b$, dass gilt $c^*ac \leq c^*bc$.
6. Aus $0 \leq a \leq b$ folgt $\|a\| \leq \|b\|$.
7. Falls $\mathcal{A}$ eine Eins enthält und a und b positive invertierbare Elemente aus $\mathcal{A}$ sind, dann folgt aus $a \leq b$ stets $0 \leq b^{-1} \leq a^{-1}$.

Beweis
1. Bei der Relation $\leq$ handelt es sich um eine Halbordnung auf $\mathcal{A}_{sa}$:
   Reflexiv: Für alle $a \in \mathcal{A}_{sa}$ gilt $a - a = 0 \in \mathcal{A}_{sa}$ und $\sigma(0) = \{0\} \subseteq \mathbb{R}_+$. Daraus folgt, dass $a - a$ in $\mathcal{A}^+$ liegt und somit gilt $a \leq a$ für alle $a \in \mathcal{A}_{sa}$.
   Transitiv: Seien $a, b, c \in \mathcal{A}_{sa}$ und es gelte $a \leq b$ und $b \leq c$. Daraus folgt, dass $b - a$ und $c - b$ positiv sind. Damit ist nach 1. auch $c - a = (c - b) + (b - a)$ positiv und somit folgt $a \leq c$, was zu zeigen war.
   Antisymmetrisch: Seien $a, b \in \mathcal{A}_{sa}$ und es gelte $a \leq b$ und $a \geq b$. Daraus folgt, dass $c = b - a$ und $-c = a - b$ beide positiv sind. Damit ist aber $c^*c = c^2 =$

$(-c)(-c)$ nach (1.11) positiv. Dann muss aber nach (1.4) $-c = c$ sein und dies ist nur der Fall, wenn $c = 0$. Daraus folgt dann $a = b$.

2. $a \leq b \Rightarrow b - a \in \mathcal{A}^+ \Rightarrow b + c - c - a \in \mathcal{A}^+ \Rightarrow a + c \leq b + c$.

3. Mit Hilfe der Gelfand-Transformation kann man zeigen, dass aus $a \in \mathcal{A}^+$ und $t \in \mathbb{R}_+$ folgt, dass $ta \in \mathcal{A}^+$ gilt. Damit erhält man: $a \leq b \Rightarrow b - a \in \mathcal{A}^+ \Rightarrow t(b - a) = tb - ta \in \mathcal{A}^+ \Rightarrow ta \leq tb$.

4. $a \leq b \Leftrightarrow b - a \in \mathcal{A}^+ \Leftrightarrow -a - (-b) \in \mathcal{A}^+ \Leftrightarrow -a \geq -b$.

5. Aus $a \leq b$ folgt $b - a \in \mathcal{A}^+$. Damit besitzt $b - a$ nach (1.4) eine positive Wurzel d. Aus $(dc)^*(dc) \in \mathcal{A}^+$ folgt

$$(dc)^*(dc) = c^*ddc = c^*(b-a)c = c^*bc - c^*ac \in \mathcal{A}^+$$

Damit gilt $c^*ac \leq c^*bc$.

6. Sei $\mathcal{A}$ ohne Einschränkung unitär und $\mathcal{B}$ die von b und 1 erzeugte kommutative C^*-Algebra. Dann gilt nach dem Satz von Gelfand-Naimark für alle $f \in \sigma(\mathcal{B})$:

$$\left(\|b\|\,\hat{1} - \hat{b}\right)(f) = \left(\left\|\hat{b}\right\|\hat{1} - \hat{b}\right)(f) = \left(\left(\sup_{g\in\sigma(\mathcal{B})}\left|\hat{b}(g)\right|\right)\hat{1} - \hat{b}\right)(f) \geq 0$$

Damit ist aber auch $\|b\| - b \in \mathcal{A}^+$ und somit gilt $b \leq \|b\|$. Daraus folgt nun mit der Voraussetzung $a \leq \|b\|$. Da also das Spektrum von $\|b\| - a$ positiv ist, ist auch das Bild der Gelfand-Transformation angewandt auf die von a und 1 erzeugte kommutative C^*-Algebra $\mathcal{C}$ positiv. Es gilt also:

$$\|b\| - \|a\| = \|b\| - \|\hat{a}\| = \|b\| - \sup_{f\in\sigma(\mathcal{C})} \hat{a}(f) \geq 0$$

Damit gilt $\|a\| \leq \|b\|$, was zu zeigen war.

7. Sei $c \geq 1$. Dann ist $c - 1$ positiv und daher liegt -1 nicht im Spektrum von $c - 1$. Damit ist aber $-c$ invertierbar und damit auch c. Des Weiteren folgt, $c^{-1} \leq 1$, wenn man die Gelfand-Transformation zu der von 1 und c erzeugten kommutative C^*-Algebra $\mathcal{B}$ betrachtet. Damit gilt nämlich $\hat{c}^{-1}(f) = \frac{1}{\hat{c}(f)} \leq 1$ für alle $f \in \sigma(\mathcal{B})$. Sei nun $a \leq b$. Dann gilt mit der Vorüberlegung

$$\begin{aligned} 1 = a^{-1/2}aa^{-1/2} \leq a^{-1/2}ba^{-1/2} \Rightarrow (a^{-1/2}ba^{-1/2})^{-1} \leq 1 \Rightarrow a^{1/2}b^{-1}a^{1/2} \leq 1 \\ \Rightarrow b^{-1} \leq (a^{1/2})^{-1}(a^{1/2})^{-1} = a^{-1} \end{aligned}$$

□

§2 Approximierende Eins

Falls eine C *-Algebra $\mathcal{A}$ keine Eins enthält kann man zwar zu $\tilde{\mathcal{A}}$ übergehen, dieses Vorgehen ist aber nicht immer geeignet. Daher führen wir nun die approximierende Eins ein.

(2.1) Definition
Eine nicht leere Menge Λ mit Halbordnung $\triangleleft$, heißt *gerichtete Menge*, falls für alle $x, y \in \Lambda$ ein $z \in \Lambda$ existiert, sodass gilt $x \triangleleft z$ und $y \triangleleft z$.
Sei Λ eine gerichtete Menge und U eine beliebige Menge. Dann nennt man eine Abbildung von Λ nach U ein Netz. Man schreibt auch $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$.

(2.2) Definition
Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra. Dann nennt man ein monoton wachsendes Netz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von positiven Elementen der abgeschlossenen Einheitskugel von $\mathcal{A}$ *approximierende Eins*, wenn gilt $a = \lim\limits_{\lambda\to\infty} au_\lambda$ für alle $a \in \mathcal{A}$.

(2.3) Bemerkung
Aus $a = \lim\limits_{\lambda\to\infty} au_\lambda$ für alle $a \in \mathcal{A}$ folgt $a^* = \lim\limits_{\lambda\to\infty} u_\lambda a^*$ für alle $a^* \in \mathcal{A}$. Damit ist die Bedingung in der vorherigen Definition äquivalent zu $a = \lim\limits_{\lambda\to\infty} u_\lambda a$ für alle $a \in \mathcal{A}$. $\diamond$

(2.4) Definition
Man nennt einen Operator $u : X \to Y$ von *endlichem Rang*, falls $u(X)$ endlich dimensional ist und dann setzt man $Rang(u) = dim(u(X))$. Sei H ein Hilbertraum, dann bezeichnet man mit $F(H)$ die Menge der Operatoren mit endlichem Rang auf H.

(2.5) Lemma
Sei H ein Hilbertraum und $K(H)$ die Menge der kompakten Operatoren auf H. Dann liegt $F(H)$ dicht in K(H).

Beweis
Siehe G.J. Murphy: „C*-Algebras and Operator Theory“, Kapitel 2, Theorem 2.4.5.oder H.Führ: Skript zur Funktionalanalysis II Satz 3.15.

(2.6) Lemma
Zu $x, y \in H$, wobei H ein Hilbertraum ist, wird der Operator $x \otimes y$ auf H durch $(x \otimes y)(z) = (z, y)x$ definiert. Der Operator besitzt folgende Eigenschaften:

1. $a(x \otimes y) = a(x) \otimes y$ für $a \in B(H)$
2. Wenn H ein Hilbertraum ist, dann gibt es für alle $a \in F(H)$ eine Darstellung der Form

$$a = \sum_{k=1}^{m} x_k \otimes y_k,$$

◇

wobei $x_1, x_2 \ldots x_m, y_1, y_2 \ldots y_m \in H$.

3. $x \otimes y - w \otimes y = (x - w) \otimes y$
4. $\|x \otimes y\| = \|x\| \, \|y\|$

Beweis

1. $(a(x \otimes y))(z) = a((z,y)x) = (z,y)a(x) = (a(x) \otimes y)(z)$ für $a \in B(H)$
2. Vergleiche G.J. Murphy: „C*-Algebras and Operator Theory", Kapitel 2, Theorem 2.4.6.
3. $(x \otimes y - w \otimes y)(z) = (z,y)x - (z,y)w = (z,y)(x-w) = ((x-w) \otimes y)(z)$
4. Mit der Cauchy-Schwarzschen-Ungleichung erhält man

$$\|(x \otimes y)(z)\| = \sup_{\|z\| \le 1} \|(z,y)x\| = \sup_{\|z\| \le 1} |(z,y)| \, \|x\| \le \sup_{\|z\| \le 1} \|z\| \, \|y\| \, \|x\| = \|x\| \, \|y\| \, .$$

Andererseits gilt

$$\begin{aligned} \|(x \otimes y)(z)\| &= \sup_{\|z\| \le 1} \|(z,y)x\| = \sup_{\|z\| \le 1} |(z,y)| \, \|x\| \ge |(y/\|y\|, y)| \, \|x\| \\ &= (1/\|y\|) \, \|y\|^2 \, \|x\| = \|x\| \, \|y\| \, . \end{aligned}$$

Damit folgt nun die Behauptung. □

(2.7) Beispiel

Sei H ein Hilbertraum mit einer orthonormalen Basis $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Aus $dim\,(H) = \infty$ folgt, dass die Identität auf H nicht kompakt ist, da die Einheitskugel in H in diesem Fall nach Funktionalanalysis I (Bemerkung nach Satz 3.7.7) nicht relativ kompakt ist. Daher besitzt die C *-Algebra $K\,(H)$ kein Einselement. Sei nun p_n die Projektion auf $\mathbb{C}e_1 + \mathbb{C}e_2 \ldots + \mathbb{C}e_n$. Dann ist die Folge (p_n) eine approximierende Eins in $K\,(H)$.

Beweis
Die Abbildung p_n liegt offensichtlich in der abgeschlossenen Einheitskugel. Es gilt nach Satz (1.11) $p_n = p_n^* = p_n p_n^* \in K(H)^+$. Damit ist p_n positiv und monoton wachsend. Da $F(H)$ nach (2.5) dicht in $K(H)$ liegt genügt es zu zeigen, dass gilt

$$a = \lim_{n\to\infty} p_n a$$

für alle $a \in F(H)$. Für $a \in F(H)$ gibt es nach (1.7.2.) eine Darstellung

$$a = \sum_{k=1}^{m} x_k \otimes y_k,$$

wobei $x_1, x_2, \dots, x_m,, y_1, y_2, \dots, y_m \in H$. Daher gilt mit (2.6.1). und der Linearität von p_n

$$p_n a = p_n\Big(\sum_{k=1}^{m} x_k \otimes y_k\Big) = \sum_{k=1}^{m} p_n(x_k \otimes y_k) = \sum_{k=1}^{m} p_n(x_k) \otimes y_k$$

Mit $\lim_{n\to\infty} p_n(x) = x$ erhält man unter Verwendung von (2.6.3.) und (2.6.4.) für alle k

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|p_n(x_k) \otimes y_k - x_k \otimes y_k\| &= \lim_{n\to\infty} \|(p_n(x_k) - x_k) \otimes y_k\| \\ &= \lim_{n\to\infty} \|p_n(x_k) - x_k\|\,\|y_k\| = 0.\end{aligned}$$

Zusammenfassend ergibt sich aus den obigen Rechnungen

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \|p_n a - a\| &= \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{m} (p_n(x_k) \otimes y_k) - \sum_{k=1}^{m} (x_k \otimes y_k) \right\| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \|p_n(x_k) \otimes y_k - x_k \otimes y_k\| = 0.\end{aligned}$$

Damit folgt $a = \lim_{n\to\infty} p_n a$ und somit die Behauptung. □

(2.8) Satz
Sei $\mathcal{A}$ eine beliebige C^*-Algebra. Λ bezeichne die Menge aller positiven Elemente a aus $\mathcal{A}$ mit $\|a\| < 1$. Die Menge Λ ist gerichtet bezüglich der Halbordnung von $\mathcal{A}_{sa}$.

Beweis
Λ ist gerichtet:
Behauptung 1: Aus $a, b \in \mathcal{A}^+$ mit $a \leq b$ folgt $a(1+a)^{-1} \leq b(1+b)^{-1}$.
Dazu:
Aus $a \in \mathcal{A}^+$ folgt, dass $\sigma(-a) = -\sigma(a) \subseteq \mathbb{R}_-$ ist und somit ist $1+a$ in $\tilde{\mathcal{A}}$ invertierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} & (1+a)(1+a)^{-1} && = 1 \\ \Leftrightarrow\ & (1+a)^{-1} + a(1+a)^{-1} && = 1 \\ \Leftrightarrow\ & a(1+a)^{-1} && = 1 - (1+a)^{-1} \end{aligned}$$

Sei nun $0 \leq a \leq b$. Dann folgt mit (1.12.2.) $1+a \leq 1+b$ und mit (1.12.7.) $(1+a)^{-1} \geq (1+b)^{-1}$. Daraus folgt nun mit (1.12.2.) und (1.12.4.) $1-(1+a)^{-1} \leq 1-(1+b)^{-1}$ und dies liefert mit obiger Umformung die Behauptung.

Behauptung 2: Aus $a \in \mathcal{A}^+$ folgt, dass $a(1+a)^{-1}$ in Λ liegt.
Dazu:
Wie in Behauptung 1 lässt sich zeigen, dass $1+a$ invertierbar ist. Weiterhin ist $a(1+a)^{-1}$ positiv, da aus $0 \leq a$ mit Behauptung 1 folgt, dass $0 \leq a(1+a)^{-1}$. Es bleibt zu zeigen, dass $\left\|a(1+a)^{-1}\right\| < 1$. Dies geschieht mit Hilfe der Gelfand-Transformation. Dazu sei $\mathcal{B}$ die von 1 und a erzeugte C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Da $\mathcal{B}$ kommutativ ist, folgt mit dem Satz von Gelfand-Naimark, dass die Gelfand-Transformation isometrisch ist. Daher gilt

$$\left\|a(1+a)^{-1}\right\| = \left\|\hat{a}(1+\hat{a})^{-1}\right\|_\infty = \sup_{w \in \sigma(\mathcal{B})} \left|\hat{a}(w)(1+\hat{a}(w))^{-1}\right| = \sup_{w \in \sigma(\mathcal{B})} \frac{|\hat{a}(w)|}{|(1+\hat{a}(w))|} < 1.$$

Dabei ist $\hat{a}(w) \geq 0$, da nach Vortrag 2 (2.2.c) das Bild von $\hat{a}$ genau $\sigma(a)$ ist und a nach Voraussetzung positiv ist.
Behauptung 3: Für alle $a, b \in \Lambda$ existiert ein $c \in \Lambda$ mit der Eigenschaft $a, b \leq c$
Dazu:
Seien $a, b \in \Lambda$ beliebig. Setze nun $a' = a(1-a)^{-1}$ und $b' = b(1-b)^{-1}$. Weiterhin definiert man $c = (a'+b')(1+a'+b')^{-1}$. a' und b' sind wohldefiniert, da aus $\|a\| < 1$ nach dem Lemma von der Neumannschen Reihe folgt, dass $1-a$ invertierbar ist. Das gleiche gilt für $1-b$. Sei nun $\mathcal{B}$ die von a und 1 erzeugte C^*-Algebra. Betrachtet man nun die Gelfand-Transformation zu $\mathcal{B}$ so erhält man $\hat{a}/(1-\hat{a}) \geq 0$, da aus a positiv folgt, dass $\hat{a} \geq 0$ ist. Damit ist auch a' positiv. Analog zeigt man $b' \in \mathcal{A}^+$. Damit ist $a' + b'$ ebenfalls positiv und somit liegt c nach Behauptung 2 in Λ. Es gilt

$$a' = a(1-a)^{-1} \Leftrightarrow a' - a'a = a \Leftrightarrow a' = a(1+a') \Leftrightarrow a'(1+a')^{-1} = a.$$

Da $a^{'}$ und $b^{'}$ positiv sind, gilt $a^{'} \leq a^{'} + b^{'}$. Mit obiger Umformung und Behauptung 1 gilt dann $a = a^{'}(1 + a^{'})^{-1} \leq c$. Analog zeigt man $b \leq c$ und somit folgt die Behauptung 3 und damit ist Λ aufsteigend gerichtet. □

(2.9) Lemma
Eine C^*-Algebra $\mathcal{A}$ wird von Λ linear aufgespannt. ◇

Beweis
Sei $a \in \mathcal{A}$. Dann gibt es eine Darstellung $a = b + ic$ mit $b, c \in \mathcal{A}_{sa}$. Da b und c hermitesch sind, haben sie nach (1.1.2) reelle Spektren. Damit $b, c \in \mathcal{A}^+$ liegen, müssen die Spektren jedoch beide positiv sein. Daher setzt man $b^{'} = b - xe$ beziehungsweise $c^{'} = c - ye$ mit $x = \inf\{\lambda | \lambda \in \sigma(b)\}$ und $y = \inf\{\lambda | \lambda \in \sigma(c)\}$. Dies bewirkt eine Verschiebung des Spektrums, da gilt $\sigma(b - xe) = \{\lambda | (\lambda e - (b - xe))$ist nicht invertierbar$\}$ $= \{\lambda | ((\lambda + x)e - b)$ist nicht invertierbar$\}$. Damit erhält man $a = b^{'} + xe + ic^{'} + iye$. Nach obiger Setzung sind $b^{'}$ und $c^{'}$ positiv. Weiterhin ist entweder $-xe$ oder xe positiv. Das Gleiche gilt für ye und $-ye$. Damit wurde also eine Darstellung von a durch linear Kombination von positiven Elementen gefunden. Damit diese nun in Λ liegen teilt man sie noch durch das doppelte ihrer Norm und multipliziert diese Zahl als Linearfaktor wieder an das so erhaltene Element von Λ heran. □

Zum Beweis des folgenden Satzes benötigen wir ein Analogon zum Satz von Urysohn für lokal kompakte Räume:

(2.10) Lemma
Sei X lokal kompakt, $K \subseteq X$ kompakt und U eine offene Umgebung von K. Dann existiert eine stetige Funktion $f : X \to [0, 1]$ mit $f|_K \equiv 1$ und $f|_{X \setminus U} \equiv 0$. ◇

Beweis
Siehe A. Krieg: Skript Topologie Kapitel V Satz (3.6) □

(2.11) Satz
Jede C^*-Algebra besitzt eine approximierende Eins. Genauer ist $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ mit $u_\lambda = \lambda$ für alle λ aus Λ eine approximierende Eins. Dabei ist Λ wieder die Menge der positiven Elemente aus $\mathcal{A}$ mit Norm kleiner 1. Man spricht in diesem Fall auch von der kanonischen approximierenden Eins. ◇

Beweis
Da Λ nach Satz (1.8) aufsteigend gerichtet ist, handelt es sich bei $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} = \lambda$ um ein monoton wachsendes Netz in der Einheitskugel von $\mathcal{A}$. Es bleibt also zu zeigen, dass für alle $a \in \mathcal{A}$ gilt $a = \lim_{\lambda \to \infty} au_\lambda$. Da Λ die Menge $\mathcal{A}$ linear aufspannt, genügt es dies für alle a aus Λ zu zeigen.

Sei nun $a \in \Lambda$ beliebig und $\mathcal{B}$ die von a erzeugte C^*-Algebra. Weiterhin sei $\Gamma : \mathcal{B} \to \mathcal{C}_0(\sigma(\mathcal{B}))$ die Gelfand-Transformation und $f = \Gamma(a)$. Dann ist die Menge $K = \{\omega \in \sigma(\mathcal{B}); |f(\omega)| \geq \epsilon\}$ kompakt, da $f \in C_0(\sigma\mathcal{B})$.
Das Spektrum $\sigma(\mathcal{B})$ ist nach dem 4. Vortrag ein lokal kompakter Hausdorffraum. Daher gibt es zu jedem ω aus dem Spektrum eine offene Umgebung V_ω deren Abschluss W_ω kompakt ist. Damit gilt insbesondere

$$K \subseteq \bigcup_{\omega \in K} V_\omega$$

Da K kompakt ist, besitzt es eine endliche Teilüberdeckung und man erhält

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} V_{\omega_i} = L \text{ mit } \omega_i \in K$$

Da $\sigma(\mathcal{B})$ lokal kompakt ist, können wir nun Satz (2.11) anwenden. Demnach existiert eine stetige Funktion $g : \sigma(\mathcal{B}) \to [0, 1]$, sodass $g(\omega) = 1$ für alle $\omega \in K$ und $g(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \sigma(\mathcal{B}) \backslash L$.
Wähle nun ein $\delta > 0$ mit $\delta < 1$ und $1 - \delta < \epsilon$. Dann gilt mit dem Satz von Gelfand-Naimark für alle $\omega \in K$:

$$\begin{aligned}|f(\omega) - \delta g(\omega) f(\omega)| &= |f(\omega)(1 - \delta g(\omega))| \leq |f(\omega)|\, |1 - \delta g(\omega)| \leq \|a\|\, |1 - \delta g(\omega)| \\ &\leq |1 - \delta g(\omega)| \leq= 1 - \delta < \epsilon\end{aligned}$$

Für alle $\omega \in \sigma(\mathcal{B}) \backslash K$:

$$|f(\omega) - \delta g(\omega) f(\omega)| = |f(\omega)(1 - \delta g(\omega))| \leq |f(\omega)|\, |1 - \delta g(\omega)| < \epsilon\, |1 - \delta g(\omega)| \leq \epsilon$$

Damit gilt also $\|f - \delta g f\| < \epsilon$ auf dem gesamten Spektrum.
Das oben definierte g liegt in $C_0(\sigma(\mathcal{B}))$, da der Abschluss von L kompakt ist. Daher können wir nun definieren $\lambda_0 = \Gamma^{-1}(\delta g)$. Dann ist $\lambda_0 \in \Lambda$, da Γ isometrisch ist und $\|\delta g\| < 1$ gilt und δg positiv ist. Des Weiteren erhält man

$$\left\|a - u_{\lambda_0} a\right\| = \|a - \lambda_0 a\| = \|\Gamma(a - \lambda_0 a)\| = \|f - \delta g f\| < \epsilon.$$

Nun sei $\lambda \in \Lambda$ und $\lambda \geq \lambda_0$. Dann folgt $1 - u_\lambda \leq 1 - u_{\lambda_0}$ und weiterhin folgt mit (1.12.5) $a(1 - u_\lambda)a \leq a(1 - u_{\lambda_0})a$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\|a - u_\lambda a\|^2 &= \left\|(1 - u_\lambda)^{1/2}(1 - u_\lambda)^{1/2} a\right\|^2 \leq \left\|(1 - u_\lambda)^{1/2}\right\|^2 \left\|(1 - u_\lambda)^{1/2} a\right\|^2 \\ &\leq \left\|(1 - u_\lambda)^{1/2} a\right\|^2 = \|a(1 - u_\lambda)a\| \leq \left\|a(1 - u_{\lambda_0})a\right\| \leq \|a\| \left\|(1 - u_{\lambda_0})a\right\| \\ &\leq \left\|(1 - u_{\lambda_0})a\right\| \leq \epsilon\end{aligned}$$

Daher gilt $a = \lim_{\lambda \to \infty} u_\lambda a$ □

(2.12) Definition
Ein topologischer Raum heißt *separabel*, wenn es eine abzählbare Teilmenge gibt, die in diesem Raum dicht liegt. ◇

(2.13) Korollar
Ist $\mathcal{A}$ eine separable C^*-Algebra, so existiert in $\mathcal{A}$ eine approximierende Eins, welche eine Folge ist. ◇

Beweis
Da $\mathcal{A}$ separabel ist, existiert eine Folge endlicher Mengen $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \ldots \subseteq F_n \subseteq \ldots$, sodass $F = \cup_{n=1}^{\infty} F_n$ dicht in $\mathcal{A}$ liegt. Sei nun $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine beliebiges approximierende Eins aus $\mathcal{A}$. Sei $\epsilon > 0$ und wir setzen $F_n = \{a_1, a_2, \ldots a_m\}$. Dann existieren $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m \in \Lambda$ mit $\|a_j - a_j u_\lambda\| < \epsilon$ falls $\lambda \geq \lambda_j$. Nun wählt man λ_ϵ mit $\lambda_\epsilon \geq \lambda_1, \ldots \lambda_m$. Dann gilt $\|a - au_\lambda\| < \epsilon$ für alle $a \in F_n$ und alle $\lambda \geq \lambda_\epsilon$. Setzt man nun $\epsilon = 1/n$ mit $n \in \mathbb{N}$, dann existiert ein $\lambda_n = \lambda_\epsilon \in \Lambda$ sodass $\|a - a\lambda_n\| < 1/n$ für alle $a \in F_n$. Da Λ aufsteigend geordnet ist, können wir λ_n so wählen, dass $\lambda_n \leq \lambda_{n+1}$ für alle n gilt. Daraus folgt nun $\lim_{n\to\infty} \|a - au_{\lambda_n}\| = 0$ für alle $a \in F$. Da F dicht in $\mathcal{A}$ liegt gilt dies also auch für alle $a \in \mathcal{A}$. Daher ist $(u_{\lambda_n})_{n=1}^{\infty}$ eine approximierende Eins in $\mathcal{A}$. □

§3 Ideale in C^*-Algebren

(3.1) Bemerkung
Ist I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$, so ist I eine C^*-Unteralgebra, da I per Definition eine Unteralgebra ist, als abgeschlossene Teilmenge einer vollständigen Menge wieder vollständig ist und die Normgleichung für alle $a \in I$ erfüllt ist. Für den letzten Punkt benötigt man noch die Selbstadjungiertheit des Ideals. Wir werden sehen, dass dies für abgeschlossene Ideale erfüllt ist. ◇

(3.2) Satz
Sei $\mathcal{L}$ ein abgeschlossenes Linksideal in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann existiert ein monoton wachsendes Netz $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ von positiven Elementen der abgeschlossenen Einheitskugelvon $\mathcal{L}$, sodass $a = \lim_{\lambda \to \infty} au_\lambda$ für alle $a \in \mathcal{L}$. ◇

Beweis
Dieser Beweis wird in $\tilde{\mathcal{A}}$ geführt. Sei $\mathcal{B} = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^*$. Dann ist $\mathcal{B}$ eine C^*-Algebra. Nach Satz (2.11) gibt es daher in $\mathcal{B}$ eine approximierende Eins $(u_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$. Falls $a \in \mathcal{L}$, so folgt

$a^*a \in \mathcal{B}$. Daher gilt $\lim_{\lambda\to\infty} a^*a(1-u_\lambda) = 0$. Nun erhält man, da $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra ist

$$\lim_{\lambda\to\infty} \|a - au_\lambda\|^2 = \lim_{\lambda\to\infty} \|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\| \leq \lim_{\lambda\to\infty} \|(1-u_\lambda)\| \, \|a^*a(1-u_\lambda)\| = 0$$

Dabei wurde im letzten Schritt verwendet, dass $\|1-u_\lambda\| \leq 1$ gilt, was wiederum aus der Betrachtung der von u_λ und 1 erzeugten C^*-Algebra und der zugehörigen Gelfandtransformation folgt. Nun erhält man $\lim_{\lambda\to\infty} \|a - au_\lambda\| = 0$ und somit folgt die Behauptung. □

(3.3) Satz
Sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann ist I selbstadjungiert und eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$. Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximierende Eins in I. Dann gilt für alle $a \in \mathcal{A}$

$$\|a + I\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|a - u_\lambda a\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|a - au_\lambda\|$$

◇

Beweis
Nach Satz (3.2) existiert ein monoton wachsendes Netz $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ von positiven Elementen der abgeschlossenen Einheitskugel von I, sodass $a = \lim_{\lambda\to\infty} au_\lambda$ für alle $a \in I$. Damit gilt auch $a^* = \lim_{\lambda\to\infty} u_\lambda a^*$. Da die u_λ alle im abgeschlossenen Ideal I liegen, folgt dass $a^* \in I$. Damit ist I selbstadjungiert.
Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine beliebige approximierende Eins in I. Weiterhin sei $a \in \mathcal{A}$ und $\epsilon > 0$. Nun existiert ein $b \in I$, sodass $\|a+b\| < \|a+I\| + \epsilon/2$. Aus $b = \lim_{\lambda\to\infty} u_\lambda b$ folgt, dass ein $\lambda_0 \in \Lambda$ existiert mit $\|b - u_\lambda b\| < \epsilon/2$ für alle $\lambda \geq \lambda_0$. Damit erhält man

$$\begin{aligned}\|a - u_\lambda a\| &= \|(1-u_\lambda)a + (b - u_\lambda b) - (b - u_\lambda b)\| \leq \|(1-u_\lambda)(a+b)\| + \|b - u_\lambda b\| \\ &\leq \|a+b\| + \|b - u_\lambda b\| < \|a+I\| + \epsilon/2 + \epsilon/2.\end{aligned}$$

Daraus folgt nun $\|a+I\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|a - u_\lambda a\|$. Weiterhin gilt $\|a+I\| = \|a^*+I\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|a^* - u_\lambda a^*\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|a - au_\lambda\|$. □

(3.4) Korollar
Sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$ und J sei ein abgeschlossenes Ideal in I. Dann ist J auch ein Ideal in $\mathcal{A}$. ◇

Beweis
Da J wieder eine C^*-Algebra ist, wird J nach Lemma (1.5.3.) von J^+ linear aufgespannt. Daher genügt es zu zeigen, dass ab und ba für alle $a \in A$ und $b \in J^+$ wieder in J liegen. Nach Satz (3.2) gibt es in I eine approximierende Eins $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$. Aus

$b \in J^+$ folgt mit Satz (1.4), dass auch $b^{1/2} \in J^+$ und damit auch $b^{1/2} \in I$. Daher gilt nun $b^{1/2} = \lim_{\lambda\to\infty} u_\lambda b^{1/2}$. Multipliziert man von links mit a und von rechts mit $b^{1/2}$, so ergibt sich $ab = \lim_{\lambda\to\infty} au_\lambda b^{1/2}b^{1/2}$. Da $au_\lambda b^{1/2} \in I$ und $b^{1/2} \in J$ folgt aus der vorherigen Gleichung $ab \in J$, da J ein Ideal in I ist. Genauso zeigt man, dass $a^*b \in J$. Nach Satz (3.3) ist J selbstadjungiert und daher gilt, da b hermitesch ist $(a^*b)^* = b^*a = ba \in J$ für alle $a \in \mathcal{A}$ und $b \in J^+$. □

Ein Teil des folgenden Satzes wurde schon im 2.Vortrag im Beweis zu (1.7) nachgewiesen. Dazu benötigen wir jedoch folgende Hilfsaussage:

(3.5) Lemma
Sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit einer Involution, sodass gilt $\|a\|^2 \leq \|a^*a\|$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra. ⋄

Beweis
Aus der Ungleichung $\|a\|^2 \leq \|a^*a\| \leq \|a^*\|\,\|a\|$ folgt, dass $\|a\| \leq \|a^*\|$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Analog zeigt man $\|a^*\| \leq \|a\|$ für alle $a \in \mathcal{A}$. Daher muss gelten $\|a\| = \|a^*\|$ und somit erhält man $\|a\|^2 = \|a^*a\|$, woraus folgt, dass $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra ist. □

(3.6) Satz
Sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann ist der Quotient A/I eine C^*-Algebra mit den normalen Operationen und der Quotientennorm. ⋄

Beweis
Dass $\mathcal{A}/I$ mit der Quotientennorm eine Banachalgebra bildet, wurde bereits im Beweis von Satz (1.7) in Vortrag 2 gezeigt. Da I nach Satz (3.3) selbstadjungiert ist,handelt es sich bei $\mathcal{A}/I$ um eine $*$-Algebra bezüglich der Involution auf $\mathcal{A}$. Wir weisen nun nach, dass es sich dabei sogar um eine C^*-Algebra handelt. Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximatierende Eins in I. Für alle $a \in \mathcal{A}$ und $b \in I$ gilt dann mit Satz (3.3)

$$\begin{aligned}
\|a+I\|^2 &= \lim_{\lambda\to\infty} \|a - au_\lambda\|^2 = \lim_{\lambda\to\infty} \|(1-u_\lambda)a^*a(1-u_\lambda)\| \\
&= \lim_{\lambda\to\infty} \|(1-u_\lambda)(a^*a+b)(1-u_\lambda) - (1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)\| \\
&\leq \lim_{\lambda\to\infty} \|(1-u_\lambda)(a^*a+b)(1-u_\lambda)\| + \lim_{\lambda\to\infty} \|(1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)\| \\
&\leq \sup_{\lambda\in\Lambda} \|(1-u_\lambda)(a^*a+b)(1-u_\lambda)\| + \lim_{\lambda\to\infty} \|(1-u_\lambda)b(1-u_\lambda)\| \\
&\leq \|a^*a+b\| + \lim_{\lambda\to\infty} \|b - u_\lambda b\| = \|a^*a+b\|
\end{aligned}$$

Es wurde wieder die Abschätzung $\|1-u_\lambda\| \leq 1$ verwendet. Daher gilt nun $\|a+I\|^2 \leq \|a^*a+I\|$ und somit ist $\mathcal{A}/I$ eine C^*-Algebra nach Lemma (3.5). □

§4 $*$-Homomorphismen

(4.1) Satz
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C^*-Algebren und $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein injektiver $*$-Homomorphismus. Dann ist ϕ isometrisch. $\diamond$

Beweis
Siehe 3. Vortrag Korollar (4.7) $\square$

(4.2) Satz
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ C^*-Algebren und $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ ein $*$-Homomorphismus. Dann ist $\phi(A)$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{B}$. $\diamond$

Beweis
$Bild(\phi)$ erbt eine Algebrastruktur von $\mathcal{B}$. Daher genügt es zu zeigen, dass $Bild(\phi)$ abgeschlossen und vollständig ist. Die Abbildung

$$\mathcal{A}/Kern(\phi) \to \mathcal{B}, a + Kern(\phi) \mapsto \phi(a)$$

ist ein injektiver $*$-Homomorphismus zwischen zwei C^*-Algebren, da $\mathcal{A}/Kern(\phi)$ nach Satz (3.6) wieder eine C^*-Algebra ist. Damit ist ϕ nach Satz (4.1) isometrisch. Daher ist $Bild(\phi)$ vollständig und daher abgeschlossen in $\mathcal{B}$. $\square$

(4.3) Satz
Sei $\mathcal{B}$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$ und I ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{B} + I$ eine C^*-Unteralgebra von $\mathcal{A}$ $\diamond$

Beweis
$\mathcal{B} + I$ besitzt als Teilmenge von $\mathcal{A}$ eine Algebrastruktur. Wir zeigen wieder, dass $\mathcal{B} + I$ abgeschlossen und vollständig ist. Dazu weisen wir nach, dass der Quotient $(\mathcal{B} + I)/I$ vollständig ist. $\mathcal{B} \cap I$ ist ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{B}$, woraus folgt, dass $\mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap I)$ eine C^*-Algebra ist. Die Abbildung:

$$\phi : \mathcal{B}/(\mathcal{B} \cap I) \to \mathcal{A}/I, \ \phi(b + \mathcal{B} \cap I) = b + I$$

mit $b \in \mathcal{B}$ ist also ein $*$-Homomorphismus zwischen zwei C^*-Algebren mit Bild $(\mathcal{B} + I)/I$. Nach Satz (4.2) ist $(\mathcal{B} + I)/I$ somit eine C^*-Algebra und damit vollständig. Nun wollen wir mit Hilfe von Vortrag 2 Lemma (1.6) zeigen, dass daraus folgt, dass $\mathcal{B} + I$ vollständig ist.

Sei dazu x_n eine beliebige Folge in $\mathcal{B}+I$ mit $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$. Es genügt nun zu zeigen, dass ein $x\in\mathcal{B}+I$ existiert, mit $\lim_{N\to\infty}\left\|x-\sum_{n=1}^{N}x_n\right\|=0$. Es gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n+I\|\leq\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$$

da auf Grund der Definition der Quotientennorm stets $\|x+I\|\leq\|x\|$ gilt. Weiterhin darf ohne Einschränkung annehmen, dass $\|x_K\|\leq\|x_K+I\|+2^{-K}$ gilt. Da $(\mathcal{B}+I)/I$ vollständig ist, existiert nach Vortrag 2 Lemma (1.6) ein $x+I\in(\mathcal{B}+I)/I$ mit $\lim_{N\to\infty}\left\|x+I-\sum_{n=1}^{N}(x_n+I)\right\|=0$. Dann gilt ebenfalls

$$\left\|x-\sum_{n=1}^{N}x_n\right\|\leq\left\|(x-\sum_{n=1}^{N}x_n)+I\right\|+2^{-K}=\left\|x+I-\sum_{n=1}^{N}(x_n+I)\right\|+2^{-K}\xrightarrow{K\to\infty}0$$

Damit ist nach Vortrag 2 Lemma (1.6) $\mathcal{B}+I$ vollständig. □

(4.4) Definition
Sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Man sagt, dass I *wesentlich* in $\mathcal{A}$ ist, falls aus $aI=0$ folgt $a=0$für alle $a\in\mathcal{A}$. Ein doppelter Zentralisator zu einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$, ist ein Paar (L,R) von beschränkten linearen Operatoren auf $\mathcal{A}$, sodass für alle $a,b\in\mathcal{A}$ gilt

$$L(ab)=L(a)b,\ R(ab)=aR(b)\ und\ R(a)b=aL(b).$$

Die Menge aller doppelten Zentralisatoren von $\mathcal{A}$ bezeichnet man $M(\mathcal{A})$. ◇

(4.5) Satz
Wenn $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra ist, so ist M($\mathcal{A}$) ebenfalls eine C^*-Algebra mit folgenden Operationen:
Multiplikation: $(L_1,R_1)(L_2,R_2)=(L_1L_2,R_2R_1)$
Addition: $(L_1,R_1)+(L_2,R_2)=(L_1+L_2,R_1+R_2)$
Skalarmultiplikation: $\alpha(L,R)=(\alpha L,\alpha R)$
Involution: $(L,R)\mapsto(L,R)^*=(R^*,L^*)$ mit $L^*(a)=(L(a^*))^*$ und $R^*(a)=(R(a^*))^*$
Norm: $\|(L,R)\|=\|L\|=\|R\|$.
Man nennt M($\mathcal{A}$) Multiplikatoralgebra von $\mathcal{A}$. ◇

Beweis
Siehe G.J. Murphy: „C*-Algebras and Operator Theory“, Kapitel 2, Seite 38 und 39□

(4.6) Korollar
1. Sei $a\in\mathcal{A}$. Definiert man $L_a(b)=ab$ und $R_a(b)=ba$, so gilt $(L_a,R_b)\in M(\mathcal{A})$.

2. Jede C^*-Algebra I ist ein Ideal in $M(I)$.

3. Jede C^*-Algebra I ist wesentlich in ihrer Multiplikatoralgebra $M(I)$. ◇

Beweis

1. Siehe G.J. Murphy: „C*-Algebras and Operator Theory“, Kapitel 2, Seite 38

2. Hierbei wird $a \in I$ mit (L_a, R_a) identifiziert.

3. Diese Aussage folgt sofort aus 2. und der Definition von wesentlich. □

Der folgende Satz besagt, dass die Mulitiplikatoralgebra $M(I)$ von I die größte C^*-Algebra mit Eins ist, die I als wesentliches abgeschlossenes Ideal enthält.

(4.7) Satz
Sei I ein abgeschlossenes Ideal in einer C^*-Algebra $\mathcal{A}$. Dann existiert ein eindeutig bestimmter $*$-Homomorphismus $\phi : \mathcal{A} \to M(I)$, der die Inklusion $I \to M(I)$ fortsetzt. Weiterhin ist ϕ injektiv, falls I wesentlich in $\mathcal{A}$ ist. ◇

Beweis
Existenz: Betrachte $\phi : \mathcal{A} \to M(I)$, $a \mapsto (L_a, R_a)$. Die Abbildung ist wohldefiniert, da $L_a(c) = ac \in I$ für alle $c \in I$ gilt. Analoges gilt für R_a. Hierbei handelt es sich um einen $*$-Homomorphismus, da gilt

$$\phi(a+b) = (L_{a+b}, R_{a+b}) = ((L_a + L_b, R_a + R_b) = (L_a, R_a) + (L_b, R_b) = \phi(a) + \phi(b)$$

$$\phi(\alpha a) = (L_{\alpha a}, R_{\alpha a}) = \alpha(L_a, R_a) = \alpha\phi(a)$$

$$\phi(ab) = (L_{ab}, R_{ab}) = (L_a L_b, R_b R_a) = (L_a, R_a)(L_b, R_b) = \phi(a)\phi(b)$$

$$\phi(a^*) = (L_{a^*}, R_{a^*}) = (R_a^*, L_a^*) = (L_a, R_a)^* = (\phi(a))^*.$$

Die Beschränktheit von ϕ folgt aus der Beschränktheit von L_a und R_a für alle $a \in \mathcal{A}$.
Eindeutigkeit: Angenommen es existiert noch ein weiterer solcher $*$-Homomorphismus $\psi : \mathcal{A} \to M(I)$. Sei nun $a \in \mathcal{A}$ und $b \in I$, dann gilt

$$\phi(a)b = \phi(ab) = ab = \psi(ab) = \psi(a)b.$$

Daher gilt $(\phi(a) - \psi(a))I = 0$, woraus folgt $\psi(a) = \phi(a)$, da I wesentlich in $M(I)$ liegt. Damit ist der $*$-Homomorphismus eindeutig bestimmt.
Injektivität: Sei I wesentlich in $\mathcal{A}$ und $a \in Kern(\phi)$. Dann gilt $aI = L_a(I) = 0$. Da I wesentlich in $\mathcal{A}$ ist, folgt $a = 0$. Damit ist ϕ injektiv. □