Schriftliche Ausarbeitung
im Rahmen des Seminars zur Funktionalanalysis

zum Thema

Banachalgebren ohne Einselement

vorgelegt von
Simone Steinmetzer

Betreuer:
Prof. Dr. H. Führ

Lehrstuhl A für Mathematik
RWTH-Aachen

Inhaltsverzeichnis

Banachalgebren ohne Einselement

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 13.11.2008

Simone Steinmetzer

Das Ziel dieses Vortrages ist die Vorbereitung und der Beweis einer Version des Satzes von Gelfand-Naimark für kommutative C*-Algebren ohne Einselement.
Dazu werden wir die Resultate für Banachalgebren ohne Einselement in geschickter Weise auf Banachalgebren mit Einselement zurückführen.
Das Vorgehen wird am Beispiel zweier bekannter Banachräume veranschaulicht werden.

§1 Nichtkommutative Banachalgebren

In diesem Kapitel beschäftigen wir uns zunächst mit der Einbettung einer Bachalgebra ohne Einselement in eine Algebra mit Einselement.
Wir werden zeigen, dass Letztere, durch die geschickte Wahl einer Norm, zu einer Banachalgebra mit Einselement und weiter zu einer C*-Algebra wird.
Die Resultate der vorangegangenen Ausführungen für Banachalgebren mit Einselement, welche sich mit Inversen und Spektren beschäftigen, besitzen in diesem Zusammenhang keine Bedeutung mehr.
Allerdings können wir einen Großteil der Gelfandtheorie dennoch anwenden.

— *Einführung* —

Wir betrachten nun eine Banachalgebra $\mathcal{A}$ ohne Einselement (z.B. $C_0(X)$ oder $L^1(\mathbb{R})$).
Wie bereits erwähnt beginnen wir mit der allgemeinen Tatsache, dass eine Algebra $\mathcal{A}$ ohne Einselement in eine Algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ mit Einselement eingebettet werden kann.

(1.1) Lemma
Sei $\widetilde{\mathcal{A}}$ eine Algebra, deren zugrundeliegender Vektorraum $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$ ist und deren Multiplikation gegeben ist durch:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}} &\longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}} \\ ((x,a),(y,b)) &\longmapsto (x,a)(y,b) := (xy + ay + bx, ab). \end{aligned} \tag{1}$$

Dann besitzt $\widetilde{\mathcal{A}}$ die Einheit (0,1) und die Norm:

$$\|(x,a)\| := \|x\| + |a| \tag{2}$$

lässt $\widetilde{\mathcal{A}}$ zu einer Banachalgebra werden. $\diamond$

Beweis
Die Algebra $\widetilde{\mathcal{A}}$ ist ein $(\mathcal{A} \times \mathbb{C})$-Vektorraum $(\widetilde{\mathcal{A}}, +, \cdot)$ mit den Verknüpfungen:

$$\begin{array}{llr} "+": & \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}, & ((x,a),(y,b)) \mapsto (x,a) + (y,b) := (x+y, a+b) \\ "\cdot": & \mathbb{C} \times \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}, & (b,(x,a)) \mapsto b \cdot (x,a) := (bx, ba) \end{array}$$

([2], VII, §1, 1.3. Proposition)
und einer Multiplikation "$\bullet$", so dass $(\widetilde{\mathcal{A}}, +, \bullet)$ ein Ring ist.

Im Hinblick auf die weitere Entwicklung dieses Vortrages beschränken wir uns hier darauf zu zeigen, dass $\widetilde{\mathcal{A}}$ bezüglich "$\bullet$" ein Ring mit Eins ist, wobei "$\bullet$" die oben angegebene Multiplikation (1) darstellt.
Somit zeigen wir nur, dass für $(\widetilde{\mathcal{A}}, +, \bullet)$ folgende Punkte erfüllt sind:

1. Assoziativität
   a) bezüglich der skalaren Multiplikation des Vektorraumes
   b) bezüglich der Multiplikation "$\bullet$".
2. Distributivgesetz.
3. (0,1) ist das neutrale Element (Einselement).

Zu 1.a):
Es seien $x, y \in \mathcal{A}$ und a,b,c $\in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} c \cdot [(x,a) \bullet (y,b)] &\overset{(i)}{=} c \cdot (xy + ay + bx, ab) \\ &\overset{(ii)}{=} [c(xy) + c(ay) + c(bx), c(ab)] \\ &\overset{(iii),(iv)}{=} [(cx)y + (ca)y + b(cx), (ca)b] \\ &\overset{(i)}{=} (cx, ca) \bullet (y,b) \\ &\overset{(ii)}{=} (c \cdot (x,a)) \bullet (y,b), \quad \text{für alle (x,a),(y,b)} \in \mathcal{A} \times \mathbb{C} \text{ und } c \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Analog zeigt man:
$c \cdot [(x,a) \bullet (y,b)] = (x,a) \bullet (c \cdot (y,b))$, für alle (x,a),(y,b) $\in \mathcal{A} \times \mathbb{C}$ und $c \in \mathbb{C}$.

Zu 1.b):
Es seien $x, y, z \in \mathcal{A}$ und a,b,c $\in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(x,a) \bullet [(y,b) \bullet (z,c)] &\overset{(i)}{=} (x,a) \bullet (yz + bz + cy, bc) \\
&\overset{(i)}{=} (x(yz+bz+cy) + a(yz+bz+cy) + (bc)x, a(bc)) \\
&\overset{(iv),(v)}{=} (xyz + xbz + xcy + ayz + abz + acy + bcx, abc) \\
&\overset{(iii)}{=} (xyz + ayz + bxz + abz + cxy + cay + cbx, abc) \\
&\overset{(iv),(v)}{=} ((xy + ay + bx)z + (ab)z + c(xy + ay + bx), (ab)c) \\
&\overset{(i)}{=} (xy + ay + bx, ab) \bullet (z,c) \\
&\overset{(i)}{=} [(x,a) \bullet (y,b)] \bullet (z,c), \quad \text{für alle (x,a),(y,b),(z,c) aus } \mathcal{A} \times \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Zu 2.:
Es seien $x, y, z \in \mathcal{A}$ und a,b,c $\in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(x,a) \bullet [(y,b) + (z,c)] &\overset{(ii)}{=} (x,a) \bullet [(y+z, b+c)] \\
&\overset{(i)}{=} (x \cdot (y+z) + a \cdot (y+z) + (b+c) \cdot x, a \cdot (b+c)) \\
&\overset{(v)}{=} (xy + xz + ay + az + bx + cx, ab + ac) \\
&\overset{(ii)}{=} (xy + ay + bx, ab) + (xz + az + cx, ac) \\
&\overset{(i)}{=} (x,a) \bullet (y,b) + (x,a) \bullet (z,c), \quad \text{für alle (x,a),(y,b),(z,c) aus } \mathcal{A} \times \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Wieder zeigt man analog:
$[(y,b) + (z,c)] \bullet (x,a) = (y,b) \bullet (x,a) + (z,c) \bullet (x,a)$, für alle (x,a),(y,b),(z,c) aus $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$.

Zu 3.:
Es seien $x, 0 \in \mathcal{A}$ und $a, 1 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
(x,a) \bullet (0,1) &\overset{(i)}{=} (x \cdot 0 + a \cdot 0 + 1 \cdot x, a \cdot 1) \\
&\overset{\mathcal{A}\ \text{Algebra}}{=} (x,a), \quad \text{für alle (x,a) aus } \mathcal{A} \times \mathbb{C}.
\end{aligned}$$

Analog: $(0,1) \bullet (x,a) = (x,a)$ für alle (x,a) aus $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$.

Dabei seien:
(i) Definition der Multiplikation (1),
(ii) Definition von "·" bzw. "+",
(iii) Kommutativität für Körper $\mathbb{C}$,
(iv) Assoziativität für Algebra $\mathcal{A}$ und
(v) Distributivgesetz für Algebra $\mathcal{A}$.

Somit haben wir gezeigt, dass $(\widetilde{\mathcal{A}}, +, \bullet)$ bezüglich der Multiplikation (1) ein Ring mit Eins ist.

Im Folgenden werden wir die Multiplikation (1) nicht mehr gesondert hervorheben, da sie aus dem Zusammenhang ersichtlich ist.

Wir zeigen weiterhin: $\|(x,a)\| = \|x\| + |a|$ macht $\widetilde{\mathcal{A}}$ zu einer Banachalgebra.

Dazu ist zu zeigen, dass $\|(x,a)(y,b)\| \leq \|(x,a)\|\|(y,b)\|$ für alle (x,a),(y,b) $\in \widetilde{\mathcal{A}}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|(x,a)(y,b)\| &\overset{(1)}{=} \|(xy + ay + bx, ab)\| \\
&\overset{(2)}{=} \|xy + ay + bx\| + |ab| \\
&\overset{\triangle-Ugl.}{\leq} \|xy\| + \|ay\| + \|bx\| + |ab| \\
&\overset{a,b\in\mathbb{C}}{=} \|xy\| + |a|\|y\| + |b|\|x\| + |ab| \\
&\overset{\mathcal{A}\ \text{Banachalgebra}}{\leq} \|x\| \cdot \|y\| + |a|\|y\| + |b|\|x\| + |a||b| \\
&= (\|x\| + |a|) \cdot (\|y\| + |b|) \\
&\overset{(2)}{=} \|(x,a)\|\|(y,b)\|, \quad \text{für alle (x,a),(y,b)} \in \widetilde{\mathcal{A}}.
\end{aligned}$$

Also ist $\widetilde{\mathcal{A}}$ eine Banachalgebra mit der angegebenen Norm.

Nun müssen wir nur noch die Vollständigkeit von $\widetilde{\mathcal{A}}$ nachreichen:

Es sei $\{(x_n, a_n)\}$ eine Cauchy-Folge in $\widetilde{\mathcal{A}}$, d.h.

$$\forall \delta > 0 \quad \exists N = N(\delta) \in \mathbb{N} : \|(x_n, a_n) - (x_m, a_m)\| < \delta, \quad \text{für alle } m, n \geq N.$$

Für die Norm (2) bedeutet dies:

$$\begin{aligned} \forall \delta > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \delta \quad &> \quad \|(x_n, a_n) - (x_m, a_m)\| \\ &\overset{Def. „+"}{=} \quad \|(x_n - x_m, a_n - a_m)\| \\ &\overset{(2)}{=} \quad \|x_n - x_m\| + |a_n - a_m|, \quad \text{für alle } m, n \geq N. \end{aligned}$$

Daraus erhalten wir: $|a_n - a_m| < \delta$ und $\|x_n - x_m\| < \delta, \quad$ für alle $m, n \geq N$.

Somit sind auch $\{a_n\}$ und $\{x_n\}$ Cauchy-Folgen.

Insgesamt erhalten wir:
Es ist $\{(x_n, a_n)\}$ eine Cauchy-Folge in $\widetilde{\mathcal{A}}$.
Daraus folgt: $\{a_n\}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ und $\{x_n\}$ ist eine Cauchy-Folge in $\mathcal{A}$.
Da $\mathbb{C}$ vollständig ist, hat $\{a_n\}$ einen Grenzwert in $\mathbb{C}$, also $\lim_{n\to\infty} a_n = a \in \mathbb{C}$.
Da $\mathcal{A}$ vollständig ist hat $\{x_n\}$ einen Grenzwert in $\mathcal{A}$, also $\lim_{n\to\infty} x_n = x \in \mathcal{A}$.

Wir haben somit unsere "Kandidaten" für den Grenzwert gefunden und können festhalten:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n, a_n) = (\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} a_n) = (x, a) \in \widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \times \mathbb{C}.$$

Also liegt für jede Cauchy-Folge $\{(x_n, a_n)\}$ aus $\widetilde{\mathcal{A}}$ der Grenzwert wieder in $\widetilde{\mathcal{A}}$, somit ist $\widetilde{\mathcal{A}}$ vollständig. □

(1.2) Bemerkung
Wir können $\widetilde{\mathcal{A}}$ (bzw. $\mathcal{A} \times \mathbb{C}$) als die Menge aller formalen Summen $x + a \cdot 1$
mit $x \in \mathcal{A}$ und $a \in \mathbb{C}$ auffassen, also $\widetilde{\mathcal{A}} = \mathcal{A} \oplus \mathbb{1} \cdot \mathbb{C}$.
Die Multiplikation (1) entspricht dann:
$(x + a \cdot 1)(y + b \cdot 1) \overset{Distr.}{=} x \cdot y + a \cdot 1 \cdot y + b \cdot 1 \cdot x + a \cdot 1 \cdot b \cdot 1.$ ◇

Wir nehmen an dieser Stelle vorweg:

(1.3) Bemerkung
Falls $\mathcal{A}$ kommutativ ist, so ist auch $\widetilde{\mathcal{A}}$ kommutativ. ◇

Beweis
Ist $\mathcal{A}$ kommutativ, so gilt $xy = yx$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$.
Dann folgt für (x,a),(y,b) $\in \widetilde{\mathcal{A}}$:

$$\begin{aligned} (x, a)(y, b) \quad &\overset{(1)}{=} \quad (xy + ay + bx, ab) \\ &\overset{\mathcal{A} \text{ komm. Algebra,} \mathbb{C} \text{Körper}}{=} \quad (yx + bx + ay, ba) \\ &\overset{(1)}{=} \quad (y, b)(x, a), \quad \text{für alle } (x, a), (y, b) \in \widetilde{\mathcal{A}}. \end{aligned}$$

□

Weiterhin können wir festhalten:

(1.4) Lemma
Es ist $\mathcal{A} \times \{0\}$ ein zweiseitiges (rechtes und linkes), abgeschlossenes Ideal in $\widetilde{\mathcal{A}}$ (und ein maximales Ideal, da es Kodimension 1 hat). $\diamond$

Beweis

1. Linkes Ideal: Seien (x,a) $\in \widetilde{\mathcal{A}}$ und (y,0) $\in \mathcal{A} \times \{0\}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}(x,a)(y,0) &\overset{(1)}{=} (xy + ay + 0 \cdot x, a \cdot 0) \\ &= (\underbrace{xy}_{\in \mathcal{A}} + \underbrace{ay}_{\in \mathcal{A}}, 0) \in \mathcal{A} \times \{0\}, \quad \text{da } \mathcal{A} \text{ eine Algebra ist.}\end{aligned}$$

2. Rechtes Ideal: Seien (x,0) $\in \mathcal{A} \times \{0\}$ und (y,b) $\in \widetilde{\mathcal{A}}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}(x,0)(y,b) &\overset{(1)}{=} (xy + 0 \cdot y + bx, 0 \cdot b) \\ &= (\underbrace{xy}_{\in \mathcal{A}} + \underbrace{bx}_{\in \mathcal{A}}, 0) \in \mathcal{A} \times \{0\}, \quad \text{da } \mathcal{A} \text{ eine Algebra ist.}\end{aligned}$$

Die Abgeschlossenheit von $\mathcal{A} \times \{0\}$ folgt aus der Abgeschlossenheit von $\mathcal{A}$ in $\widetilde{\mathcal{A}}$:

Es ist $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra, d.h. $\mathcal{A}$ trägt eine Norm bezüglich der $\mathcal{A}$ ein Banachraum ist; also ist $\mathcal{A}$ vollständig und normiert.
Somit ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen in $\widetilde{\mathcal{A}}$, denn:
$\mathcal{A} = \mathcal{A} \times \{0\} \subset \mathcal{A} \times \mathbb{C} = \widetilde{\mathcal{A}}$ ist vollständig bedeutet, dass jede Cauchy-Folge in $\mathcal{A}$ einen Grenzwert in $\mathcal{A}$ besitzt.
Weiterhin ist jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge, also liegt der Limes jeder konvergenten Folge aus $\mathcal{A}$ wieder in $\mathcal{A}$, woraus die Abgeschlossenheit folgt.
([4], III, §4, (4.4), (4.10)), ([6], VI, §1, (1.1))

Ferner ist $\mathcal{A} \times \{0\}$ ein maximales Ideal in $\widetilde{\mathcal{A}}$, da $codim(\mathcal{A}) = dim(\widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{A}) = 1$ und jedes Ideal der Kodimension 1 maximal ist (Funktionalanalysis). $\square$

Im Folgenden identifizieren wir nun $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \times \{0\}$ und stellen uns $\mathcal{A}$ als ein maximales Ideal in $\widetilde{\mathcal{A}}$ vor.

Die Einschränkung der Norm (2) auf $\mathcal{A}$ stimmt dann mit der Originalnorm ($\|x\|$) auf $\mathcal{A}$ überein ($\|(x,0)\| = \|x\| + |0| = \|x\|$).

Wir geben eine weitere

(1.5) Bemerkung
Ist $\mathcal{A}$ eine $*$-Algebra, dann kann die Involution auf $\mathcal{A}$ ($\iota : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, $x \mapsto x^*$) erweitert werden zu einer Involution auf $\widetilde{\mathcal{A}}$:

$$\tilde{\iota} : \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}, \quad (x, a)^* = (x^*, \bar{a}). \tag{3}$$

◇

Im folgenden Abschnitt geben wir nun zwei Beispiele für eine konkrete Realisation von $\mathcal{A}$.

— *Beispiele* —

Wir betrachten in diesem Abschnitt die, aus der Funktionalanalysis bekannten Banachräume $L^1(\mathbb{R})$ und $C_0(X)$:

(1.6) Beispiel ($L^1(\mathbb{R})$)
Sei $\mathcal{A} = L^1(\mathbb{R})$ die Menge der einfach Lebesgue-integrierbaren Funktionen.

Es ist $L^1(\mathbb{R})$ ein Banachraum (Funktionalanalysis) und weiterhin eine Banachalgebra ohne Einselement, wenn wir die Multiplikation durch die folgende Faltung definieren:

$$(f * g)(x) = \int f(y)\, g(x-y)\, dy.$$

Wir zeigen: $\|f * g\|_{L^1} = \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}$.

(Wobei $\|f\|_{L^1} = \int |f(x)|\, dx$ mit $f \in L^1(\mathbb{R})$ die L^1-Norm von f ist.)

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|f * g\|_{L^1} &= \int |(f * g)(x)|\, dx = \int |\int f(y) g(x-y) dy|\, dx \\
&\overset{(i)}{\leq} \iint |f(y)||g(x-y)|\, dy\, dx \\
&\overset{(ii)}{=} \iint |f(y)||g(x-y)|\, dx\, dy \\
&\overset{(iii)}{=} \int |f(y)| \int |g(x)|\, dx\, dy \\
&= \|g\|_{L^1} \int |f(y)|\, dy \\
&= \|f\|_{L^1} \cdot \|g\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Hier haben wir
(i) die Dreiecksungleichung für Lebesgue-Integrale,
(ii) den Satz von Fubini und
(iii) die Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes angewand.

Nun wollen wir eine Banachalgebra mit Einselement finden, in die wir $L^1(\mathbb{R})$ einbetten können und erhalten:

Die Abbildung $L^1(\mathbb{R}) \to M(\mathbb{R}), \quad f \mapsto \mu_f \quad$, mit $d\mu_f(x) = f(x)\,dx$,
bettet $L^1(\mathbb{R})$ in den Raum $M(\mathbb{R})$ der endlichen Borelmaße auf $\mathbb{R}$ ein.

($L^1(\mathbb{R})$ enthält definitionsgemäß endlich Lebesgue-integrierbare Funktionen und jede Lebesgue-integrierbare Funktion ist messbar.)
([5], XIV, §2, (2.1))

Weiterhin ist $M(\mathbb{R})$ ein Banachraum und ebenfalls eine Banachalgebra mit einer Faltung, die definiert ist durch

$$\int f d(\mu * \nu) = \iint f(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y).$$

Dabei verwendet $M(\mathbb{R})$ die Dualität $M(\mathbb{R}) \cong C_0'(\mathbb{R})$,
d.h. $M(\mathbb{R})$ ist isomorph zum Dualraum des Raumes der stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$, die im Unendlichen verschwinden.

Wir können also Maße als stetige lineare Funktionale auffassen.

Wir zeigen: $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \cdot \|\nu\|$ für alle $\mu, \nu \in M(\mathbb{R})$.

Seien $f \in C_0(\mathbb{R})$ und $\mu, \nu \in M(\mathbb{R})$, dann folgt:

$$\begin{aligned} |\int f d(\mu * \nu)| &\overset{Def.}{=} |\iint f(x+y) d\mu(x) d\nu(y)| \\ &\overset{\triangle-Ugl.}{\leq} \iint |f(x+y)|\,d|\mu|(x)\,d|\nu|(y) \\ &\leq \|f\| \|\mu\| \|\nu\|. \end{aligned}$$

(Wobei $\|f\| = \{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\}$ die Supremumsnorm von f ist und
$\|\mu\|$ und $\|\nu\|$ die Totalvariationen von μ und ν sind.)

Die linke Seite der Gleichung folgern wir aus dem Satz von Riesz
([7], Ch. 6, Theorem (6.19)), indem wir Maße als lineare Funktionale auffassen.

Somit erhalten wir:

$$\begin{aligned}
|(\mu * \nu)(f)| &= |\int f\, d(\mu * \nu)| \\
&\leq \|f\| \|\mu\| \|\nu\| \\
\Rightarrow \frac{|(\mu * \nu)(f)|}{\|f\|} &\leq \|\mu\| \|\nu\|, \quad \text{für } \|f\| \neq 0, \|f\| \leq 1 \\
\Rightarrow \sup_{\|f\| \leq 1} \left(\frac{|(\mu * \nu)(f)|}{\|f\|} \right) &= \|\mu * \nu\| \\
&\leq \|\mu\| \|\nu\|.
\end{aligned}$$

Insgesamt folgt also: $\|\mu * \nu\| \leq \|\mu\| \cdot \|\nu\|$ für alle $\mu, \nu \in M(\mathbb{R})$.

Es gilt dann: $\mu_{f*g} = \mu_f * \mu_g$.

Weiterhin besitzt $M(\mathbb{R})$ eine Einheit, nämlich die Punktmasse bei 0, die wir als Diracmaß δ_0 bezeichen.

Seien $f \in C_0(\mathbb{R})$ und $\mu, \delta_0 \in M(\mathbb{R})$, dann folgt:

$$\begin{aligned}
\int f\, d(\mu * \delta_0) &\overset{Def.}{=} \iint f(x+y)\, d\mu(x)\, d\delta_0(y) \\
&\overset{*}{=} \int f(x+0)\, d\mu(x) \\
&= \int f\, d\mu. \qquad \diamond
\end{aligned}$$

Also ist $\mu * \delta_0 = \mu$ und $\delta_0 * \mu = \mu$ folgt auf analoge Weise.

Zu $*$:
Hier nutzen wir aus, dass für eine Menge $X \ni x$ und ein Element A einer σ-Algebra auf X das Diracmaß δ_x folgendermaßen definiert ist:
$\delta_x(A) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$
Für messbare Funktionen gilt dann: $\int f\, d\delta_x = f(x)$.

Wir geben noch zwei Bemerkungen:

- $\widetilde{L^1(\mathbb{R})}$ ist isomorph zu der Unteralgebra von $M(\mathbb{R})$, die durch $L^1(\mathbb{R})$ und δ_0 aufgespannt wird.
- Die Norm (2) ist die Einschränkung der üblichen Norm von $M(\mathbb{R})$, $\|\mu\| = |\mu|(\mathbb{R})$, auf $\widetilde{L^1(\mathbb{R})}$.

Für das folgende Beispiel benötigen wir die

(1.7) Definition (Einpunktkompaktifizierung)
Sei X ein lokalkompakter Raum und $\infty \notin X$.
Dann definieren wir eine Topologie auf $\widetilde{X} = X \cup \{\infty\}$ durch:
$A \subset \widetilde{X}$ offen, genau dann, wenn:
$A \subset X$ offen in X oder $\infty \in A$ und $\widetilde{X} \backslash A$ kompakt. ◇

Daraus erhalten wir die

(1.8) Folgerung

a) $\widetilde{X}$ ist kompakt und die kanonische Einbettung $\iota : X \to \widetilde{X}$, $x \mapsto x$ ist ein Homöomorphismus.

b) Es ist $f \in C_0(X)$ genau dann, wenn es ein $g \in C(\widetilde{X})$ gibt, mit $g(\infty) = 0$ und $f = g|_X$. ◇

(1.9) Beispiel ($C_0(X)$)
Sei $\mathcal{A} = C_0(X)$ die Menge aller stetigen Funktionen auf X, die im Unendlichen verschwinden, wobei X ein nichtkompakter, lokalkompakter Hausdorffraum ist.

Es ist $C_0(X)$ eine C*-Algebra ohne Einselement.

Dann ist $\widetilde{\mathcal{A}}$ isomorph zur Algebra $C(\widetilde{X})$, wobei $\widetilde{X}$ die Einpunktkompaktifizierung von X ist.
Äquivalent dazu kann man sagen, $\widetilde{\mathcal{A}}$ ist isomorph zu der Algebra, die man erhält, wenn man die konstanten Funktionen zu $\mathcal{A}$ hinzufügt.

Bemerkung:
In diesem Fall ist die Norm (2) _nicht_ die Supremums- bzw. Maximumsnorm auf $C(\widetilde{X})$, d.h. die Norm (2) definiert keine C*-Algebrennorm auf $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Beweis (zu $\widetilde{\mathcal{A}} \cong C(\widetilde{X})$)
Wir definieren die Funktion:

$$\varphi : \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow C(\widetilde{X})$$
$$\varphi(g,a)(y) := \begin{cases} a, & y = \infty \\ g(y) + a, & y \in X \end{cases}$$

(Zunächst ist φ als Verkettung stetiger Funktionen stetig mit $\varphi(g,a) \in C(\widetilde{X})$ für alle $y \in X \cup \{\infty\}$, da $g \in C_0(X)$ und $a \in \mathbb{C}$ stetig sind.)

Wir können zeigen, dass φ ein ($*$-) Algebrenhomomorphismus ist:
Seien $(g_1, a_1), (g_2, a_2) \in \widetilde{\mathcal{A}}$, dann gilt:

$$\begin{aligned}
\varphi((g_1,a_1)(g_2,a_2))(y) &\overset{(1)}{=} \varphi(g_1g_2 + a_1g_2 + a_2g_1, a_1a_2)(y) \\
&= \begin{cases} a_1a_2, & y = \infty \\ (g_1g_2)(y) + a_1g_2(y) + a_2g_1(y) + a_1a_2, & y \in X \end{cases} \\
&= \begin{cases} a_1a_2, & y = \infty \\ (g_1(y) + a_1)(g_2(y) + a_2), & y \in X \end{cases} \\
&= \varphi(g_1,a_1)(y)\varphi(g_2,a_2)(y).
\end{aligned}$$

(Die $*$-Eigenschaft lässt sich unmittelbar aus der Definition von φ erkennen.)

Wir zeigen die Surjektivität von φ:

Sei $G \in C(\widetilde{X})$ beliebig.
Wir definieren $G|_X := g + G(\infty)$.
Dann können wir sofort an der Definition von φ erkennen, dass
$\varphi^{-1}(G) = (G|_X - G(\infty), G(\infty))$ ein Urbild von G unter φ ist.
Die Abbildung φ ist also surjektiv.

Die Injektivität von φ zeigen wir wie folgt:

Seien $f, g \in C_0(X)$ und $a, b \in \mathbb{C}$, dann gilt:

$$\varphi(g,a) - \varphi(f,b) = 0 \quad \overset{\varphi Alg.-Hom.}{\Longleftrightarrow} \quad \varphi(\underbrace{g-f}_{=:h}, \underbrace{a-b}_{=:c}) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi(h,c) = 0 \quad .$$

Insbesondere:

$$0 = \varphi(h,c)(\infty) = c \quad \Rightarrow a = b \quad \text{und} \quad 0|_X = \varphi(h,0)|_X = h \quad \Rightarrow f = g \quad .$$

Somit ist die Abbildung φ injektiv.

Insgesamt erhalten wir: φ ist ein Isomorphismus von $C_0(X)$ nach $C(\widetilde{X})$. $\square$

Nach Bemerkung (1.2) können wir $\widetilde{\mathcal{A}}$ als die direkte Summe von $\mathcal{A}$ und $\mathbb{1} \cdot \mathbb{C}$ auffassen.
Dann können wir bereits an obigem Beweis sehen, dass $\widetilde{\mathcal{A}}$ isomorph zu der Algebra ist, die man erhält, wenn man die konstanten Funktionen zu $\mathcal{A}$ hinzufügt, indem wir φ durch $\varphi(g, a) := g + a$ definieren. $\diamond$

— C-Algebren —*

Das zweite Beispiel des letzten Abschnittes zeigt ein allgemeines Problem auf:
Ist $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra, so ist $\widetilde{\mathcal{A}}$ keine C*-Algebra mit der Norm (2).

Wir können dieses Problem beheben, indem wir eine andere Norm auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ wählen:

(1.10) Proposition
Sei $\mathcal{A}$ eine C*-Algebra ohne Einselement.
Dann gibt es eine eindeutige Norm auf $\widetilde{\mathcal{A}}$, welche $\widetilde{\mathcal{A}}$ zu einer C*-Algebra mit der bereits angegebenen Involution (3) macht.
Diese Norm stimmt mit der Originalnorm auf $\mathcal{A}$ überein. ◇

Beweis
Es sei sofort $\mathcal{A} \neq \{0\}$.
Da $\mathcal{A}$ ein Ideal in $\widetilde{\mathcal{A}}$ ist, operiert jedes $(x,a) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ auf $\mathcal{A} = \mathcal{A} \times \{0\}$ durch Linksmultiplikation: $(x,a)(y,0) \overset{(1)}{=} (xy + ay, 0)$, für alle $(y,0) \in \mathcal{A}$.
Wir definieren die Norm des beschränkten Operators auf $\mathcal{A}$

$$\begin{array}{rcl} \widetilde{\mathcal{A}} \times \widetilde{\mathcal{A}}|_{\mathcal{A}} & \longrightarrow & \widetilde{\mathcal{A}}|_{\mathcal{A}} \\ ((x,a),(y,0)) & \longmapsto & (x,a)(y,0) = (xy+ay,0) \end{array}$$

durch:

$$\|(x,a)\| := sup\{\|xy + ay\| : y \in \mathcal{A}, \|y\| \leq 1\} \tag{4}$$

Diese Norm definiert eine Seminorm auf $\widetilde{\mathcal{A}}$, die

$$\|(x,a)(y,b)\| \leq \|(x,a)\|\|(y,b)\|$$

erfüllt.

Um dies einzusehen, betrachten wir die Abbildung:

$$T : \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{A}) \quad \text{mit} \quad [T(x,a)](y) := (x,a) \cdot y \overset{y=(y,0)}{=} (xy + ay, 0) \overset{(1.2)}{=} xy + ay \tag{5}$$

und $\mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{A}) = \{S : \mathcal{A} \to \mathcal{A} : \text{S linear und stetig}\}$ ist eine Banachalgebra.

Dann ist T ein Homomorphismus (von Banachalgebren) in $\mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{A})$, denn es gilt offensichtlich:

$$[T((x,a)\cdot(y,b))](z) \;=\; [T(x,a) \circ T(y,b)](z), \quad \text{für alle (x,a),(y,b)} \in \widetilde{\mathcal{A}} \text{ und z} \in \mathcal{A}.$$

Da die Operatornorm auf $\mathcal{L}(\mathcal{A}, \mathcal{A})$ eine Banachalgebrennorm ist folgt, dass

$$\|(x,a)\| \quad := \quad \|T(x,a)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{A},\mathcal{A})} \tag{6}$$

eine Algebren-Seminorm definiert und die Normungleichung für Banachalgebren (s.o.) erfüllt. (Funktionalanalysis)

Nun wollen wir noch sehen, dass (4) sogar eine Norm auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass

$$\|(x,a)\| = 0 \Leftrightarrow (x,a) = (0,0) \quad \text{für alle (x,a)} \in \widetilde{\mathcal{A}} \text{ gilt.}$$

„$\Leftarrow$": Ist $\widetilde{\mathcal{A}} \ni (x,a) = (0,0)$, so folgt: $xy + ay = 0$ und somit auch $\|(x,a)\| = 0$.

„$\Rightarrow$":
Es ist T injektiv :
Sei $(x,a) \in$ Kern(T)$\setminus\{0\}$.
Dann gilt:

$$\begin{aligned} T(x,a) = 0 \quad &\overset{(5)}{\Longleftrightarrow} \quad xy + ay = 0 \quad \text{für alle y} \in \mathcal{A}, \\ &\overset{(*)}{\Longleftrightarrow} \quad -a^{-1}xy = y \quad \text{für alle y} \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Zu $(*)$:
Wir erhalten aus $xy + ay = 0$ für alle y $\in \mathcal{A}$ die folgenden Fälle:

1. Aus $x = 0$ folgt: a beliebig und $y = 0$ oder y beliebig und $a = 0$.
   Letzeres bedeutet: $(x,a) = (0,0)$ und ist somit ein Widerspruch zur Annahme.
2. Aus $a = 0$ folgt: $xy = 0$ und mit $y = x^*$: $\|xx^*\| = \|x\|^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
   Dies ist ein Widerspruch zur Annahme $(x,a) \neq (0,0)$.

Aus 1. und 2. erhalten wir insgesamt, dass $y = 0$ für alle $y \in \mathcal{A}$ gelten muss.
Dies ist ein Widerspruch zu der Annahme, dass $\mathcal{A} \neq \{0\}$ gilt, also können wir $a \neq 0$ annehmen.

Setzen wir dann $z := -a^{-1}x$, so ist z eine linke Einheit für $\mathcal{A}$ und folglich gilt für alle $y \in \mathcal{A}$: $\quad yz^* = (zy^*)^* = y^{**} = y \quad$, d.h. z^* ist eine rechte Einheit für $\mathcal{A}$.
Damit ist $z = zz^* = z^*$ und somit $z \in \mathcal{A}$ eine Einheit für $\mathcal{A}$.
Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass $\mathcal{A}$ keine Einheit besitzt.

Somit ist $(x,a) \notin$ Kern(T)$\setminus\{0\}$, also $(x,a) = (0,0)$ für alle $(x,a) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ und folglich ist T injektiv.

(4) ist also eine Norm auf $\widetilde{\mathcal{A}}$.

Anmerkung:
Die neue Norm (4) und die alte Norm stimmen auf $\mathcal{A}$ überein:
$\|(x,0)\| = \|x\|$ auf $\mathcal{A}$. ([2], Ch. VIII, §1, Proposition(1.8))

Wir zeigen noch die Vollständigkeit von $\widetilde{\mathcal{A}}$:

Wie wir bereits im Beweis zu Lemma (1.4) gesehen haben, ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen in $\widetilde{\mathcal{A}}$.
Somit ist die Quotientenabbildung $f : \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow \widetilde{\mathcal{A}}/\mathcal{A}, (x,a) \mapsto a$ stetig.
Für eine Cauchy-Folge $\{(x_n, a_n)\}$ in $\widetilde{\mathcal{A}}$ folgt dann:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \|f(x_n,a_n) - f(x_m,a_m)\| = \|a_n - a_m\| < \epsilon \quad \forall m,n \geq N$$
$$\text{mit} \quad \|(x_n,a_n) - (x_m,a_m)\| < \delta.$$

Dann ist $\{a_n\}$ eine Cauchy-Folge (in $\mathbb{C}$).

Da nun $\{(x_n,a_n)\}$ und $\{a_n\} \equiv \{(0,a_n)\}$ Cauchy-Folgen sind, ist auch $\{x_n\}$ eine Cauchy-Folge:

$$\begin{aligned}
\|x_n - x_m\| &= \|(x_n,0) - (x_m,0)\| \\
&= \|(x_n,a_n) - (0,a_n) - ((x_m,a_m) - (0,a_m))\| \\
&= \|(x_n,a_n) - (x_m,a_m) + (0,a_m) - (0,a_n)\| \\
&\leq \|(x_n,a_n) - (x_m,a_m)\| + \|(0,a_m) - (0,a_n)\| \\
&< \delta + \epsilon \\
&< 2 \cdot \max\{\delta, \epsilon\}, \quad \text{für alle m,n} \geq \text{N}.
\end{aligned}$$

Wir argumentieren weiter wie im Beweis zu Lemma (1.1) und erhalten:

$\widetilde{\mathcal{A}}$ ist eine Banachalgebra mit der angegebenen Norm (4).

Nun müssen wir noch zeigen, dass $\widetilde{\mathcal{A}}$ auch eine C*-Algebra ist, dass also gilt:

$$\|(x,a)\|^2 = \|(x,a)^*(x,a)\|.$$

Dazu sei $(x,a) \neq (0,0) \in \widetilde{\mathcal{A}}$.
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein $y \in \mathcal{A}$ mit $\|y\| = 1$, so dass

$$(1-\epsilon)\|(x,a)\| \quad \leq \quad \|xy + ay\|.$$

Da, wie oben gezeigt, $\|z\| = \|(z,0)\|$ für ein $z \in \mathcal{A}$ gilt und nach (1)
$(xy + ay, 0) = (x,a)(y,0)$ ist, erhalten wir:

$$
\begin{aligned}
(1-\epsilon)^2\|(x,a)\|^2 &\leq \|xy+ay\|^2 \\
&\overset{(i)}{=} \|(xy+ay)^*(xy+ay)\| \\
&\overset{s.o.}{=} \|(xy+ay,0)^*(xy+ay,0)\| \\
&\overset{(1)}{=} \|((x,a)(y,0))^*((x,a)(y,0))\| \\
&\overset{(ii)}{=} \|(y^*,0)(x,a)^*(x,a)(y,0)\| \\
&\overset{(iii)}{\leq} \|(y^*,0)\|\|(x,a)^*(x,a)\|\|(y,0)\| \\
&\overset{s.o.}{=} \|y^*\|\|y\|\|(x,a)^*(x,a)\| \\
&\overset{(i)}{=} \underbrace{\|y\|^2}_{\overset{s.o.}{=}1}\|(x,a)^*(x,a)\| \\
&= \|(x,a)^*(x,a)\|, \quad \text{mit}
\end{aligned}
$$

(i) $\mathcal{A}$ ist C*-Algebra,
(ii) $\widetilde{\mathcal{A}}$ ist $*$-Algebra, sowie
(iii) $\widetilde{\mathcal{A}}$ ist Banachalgebra.

Da $\epsilon > 0$ beliebig war folgt: $\|(x,a)\|^2 \leq \|(x,a)^*(x,a)\|$ für alle $x \in \mathcal{A}$ und $a \in \mathbb{C}$.

Ferner ist $\widetilde{\mathcal{A}}$ eine Banachalgebra, also folgt:
$\|(x,a)\|^2 = \|(x,a)\|\|(x,a)\| \leq \|(x,a)^*(x,a)\| \leq \|(x,a)^*\|\|(x,a)\|$,
also $\|(x,a)\| \leq \|(x,a)^*\|$ für alle $x \in \mathcal{A}$ und $a \in \mathbb{C}$.

Da $\widetilde{\mathcal{A}}$ mit der Involution (3) eine (Banach-)$*$-Algebra ist, erhalten wir:
$\|(x,a)^*\| \leq \|(x,a)^{**}\| = \|(x,a)\|$
und damit: $\|(x,a)\|^2 \leq \|(x,a)^*(x,a)\| \leq \|(x,a)\|\|(x,a)\| = \|(x,a)\|^2$
für alle $x \in \mathcal{A}$ und $a \in \mathbb{C}$.

Also ist $\|(x,a)\|^2 = \|(x,a)^*(x,a)\|$ und somit $\widetilde{\mathcal{A}}$ eine C*-Algebra.

Die Eindeutigkeit der Norm folgt aus Korollar (3.4) des Vortrages „Der Satz von Gelfand-Naimark", da $\widetilde{\mathcal{A}}$ eine C*-Algebra mit Einheit ist. □

§2 Kommutative Banachalgebren

In diesem Kapitel gehen wir nun zu kommutativen Banachalgebren über.
Wir werden das Spektrum und die Gelfandtransformation auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ erweitern.
Abschließend werden wir eine Version des Satzes von Gelfand-Naimark für kommutative C*-Algebren ohne Einselement kennen lernen.

— Das Spektrum —

Sei im Folgenden $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra ohne Einselement.
(Das heißt, es gilt $xy = yx$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$.)
Wie in den vorangegangenen Vorträgen können wir auch hier das Spektrum wieder folgendermaßen definieren:

(2.1) Definition
Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra ohne Einselement.
Dann heißt die Menge aller multiplikativen Funktionale (hier der von Null verschiedenen Homomorphismen) auf $\mathcal{A}$ das *Spektrum* von $\mathcal{A}$ und wird mit $\sigma(\mathcal{A})$ bezeichnet:

$$\sigma(\mathcal{A}) := \{h : \mathcal{A} \to \mathbb{C} : \text{h Homomorphismus}, h \neq 0\}. \qquad \diamond$$

Aus dem Vortrag „Der Satz von Gelfand" (Satz (1.7)) wissen wir:

Für Banachalgebren $\mathcal{B}$ mit Einselement existiert eine Bijektion zwischen dem Spektrum $\sigma(\mathcal{B})$ und dem Raum der maximalen Ideale:

(2.2) Satz
Sei $\mathcal{B}$ eine kommutative Banachalgebra mit Einselement, dann gilt:
$\mathcal{I} \subset \mathcal{B}$ ist ein maximales Ideal genau dann, wenn $\mathcal{I}$ der Kern eines Homomorphismus $h \in \sigma(\mathcal{B})$ ist. $\diamond$

Daher wird das Spektrum von $\mathcal{B}$ auch als "Maximaler Ideal-Raum" bezeichnet.
Diesen Ausdruck wollen wir nun nicht mehr verwenden, da die Bijektion aus Satz (2.2) für Banachalgebren mit Einselement hier nicht mehr gültig ist.

Für Banachalgebren ohne Einselement können wir weiter festhalten:

(2.3) Lemma
Jedes $h \in \sigma(\mathcal{A})$ hat eine eindeutige Fortsetzung zu einem multiplikativen Funktional $\tilde{h}$ auf $\widetilde{\mathcal{A}}$, nämlich:
$$\tilde{h}(x,a) = h(x) + a, \qquad a \in \mathbb{C}. \tag{7}$$
◇

Diese Fortsetzung ist eindeutig, da für $\tilde{h} \in \sigma(\widetilde{\mathcal{A}})$ mit der Einheit $(0,1) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ (nach [1], Ch.1, §1.2, Proposition (1.10)a)), $\tilde{h}(0,1) = 1$ sein muss und $\tilde{h}(x,a) = \tilde{h}((x,0) + (0,a)) \stackrel{Lin.}{=} \tilde{h}(x,0) + a \cdot \tilde{h}(0,1) = h(x) + a \cdot \underbrace{\tilde{h}(0,1)}_{=1}$ gilt.

(2.4) Bemerkung
Wir definieren entsprechend das Spektrum auf $\widetilde{\mathcal{A}}$ durch:
$$\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) := \{\tilde{h} : \widetilde{\mathcal{A}} \to \mathbb{C} : \tilde{h} \text{ Homomorphismus}\}.$$
◇

(2.5) Lemma
Es gibt eine Bijektion zwischen $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ und $\sigma(\widetilde{\mathcal{A}})$:
$$\begin{aligned} \Phi : \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) &\longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\} \\ H &\longmapsto H|_{\mathcal{A}} \end{aligned} .$$
◇

Beweis
Surjektivität:
Sei $H|_{\mathcal{A}} = 0 \in \sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$.
Dann ist $H(x,a) = a$ die gesuchte Fortsetzung auf $\widetilde{\mathcal{A}}$.
Für $H|_{\mathcal{A}} \in \sigma(\mathcal{A})$ existiert eine eindeutige Fortsetzung nach Lemma (2.3).

Injektivität:
Es seien $H_1|_{\mathcal{A}}$ und $H_2|_{\mathcal{A}}$ aus $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ mit $H_1|_{\mathcal{A}} = H_2|_{\mathcal{A}}$.
Gilt $H_1|_{\mathcal{A}} = H_2|_{\mathcal{A}} \in \sigma(\mathcal{A})$, so folgt mit Lemma (2.3) sofort $H_1 = H_2$ wegen der Eindeutigkeit der Fortsetzung.
Seien nun $H_1|_{\mathcal{A}} = H_2|_{\mathcal{A}} = 0$ und $H_i \neq \tilde{0}$.
Dann folgt $\mathcal{A} \subset Kern(H_i) = \{(x,a) \in \widetilde{\mathcal{A}} : \quad H_i(x,a) = H_i|_{\mathcal{A}} + a = 0\}$, $i = 1,2$.
Da codim($\mathcal{A}$) = 1 ist in $\widetilde{\mathcal{A}}$, folgt dann:
$Kern(H_1) = Kern(H_2) = \mathcal{A}$ und weiterhin $H_1 = H_2$ nach Satz (2.2). □

— *Die Gelfandtransformation* —

(2.6) Definition
Die Definition der Gelfandtransformation auf $\mathcal{A}$ bleibt unverändert, sie lautet:

$$\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \longrightarrow C(\sigma(\mathcal{A})), \quad x \mapsto \hat{x}.$$

Sie ist mit der Gelfandtransformation auf $\widetilde{\mathcal{A}}$:

$$\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}} : \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}})), \quad (x,a) \mapsto (x,a)\widehat{}$$

verknüpft durch:

$$\Gamma_{\mathcal{A}}(x)(h) = \hat{x}(h) = h(x) \overset{(7)}{=} \tilde{h}(x,0) \overset{s.o.}{=} (x,0)\widehat{}(\tilde{h}) = \Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(x,0)(\tilde{h}).$$

Identifizieren wir nun $\sigma(\widetilde{\mathcal{A}})$ mit $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ (aufgrund von Lemma (2.5)), so erhalten wir:

$$\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(x,0)|_{\sigma(\mathcal{A})} = \tilde{h}|_{\sigma(\mathcal{A})} = h(x) = \Gamma_{\mathcal{A}}(x).$$

Das heißt $\hat{x} = \Gamma_{\mathcal{A}}(x)$ ist dann die Einschränkung von $(x,0)\widehat{} = \Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(x,0)$ auf $\sigma(\mathcal{A})$. $\diamond$

Also können wir unter Berücksichtigung der Tatsache, dass $C_0(\sigma(\mathcal{A})) = C(\sigma(\mathcal{A}))$, für $\sigma(\mathcal{A})$ kompakt gilt, unsere bisherigen Resultate in folgendem Satz zusammenfassen:

(2.7) Satz
Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra ohne Einselement.
Dann gilt:

a) $\sigma(\mathcal{A})$ ist eine lokalkompakte Teilmenge der abgeschlossenen Einheitskugel von $\mathcal{A}'$ in der schwach-$*$-Topologie (wobei $\mathcal{A}'$ der Dualraum zu $\mathcal{A}$ ist).

b) Ist $\sigma(\mathcal{A})$ nicht kompakt, so ist der schwach-$*$-Abschluss in $\mathcal{A}'$ gleich $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$.

c) Die Gelfandtransformation auf $\mathcal{A}$ ist ein Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{A}$ in $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ und es gilt:

$$\|\hat{x}\|_{sup} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}, \quad \text{für } x \in \mathcal{A}. \qquad \diamond$$

Beweis
Zu a):
Aus dem Vortrag „Der Satz von Gelfand" (Lemma (1.3) und Proposition (1.2)) wissen wir Folgendes:

- $\sigma(\widetilde{\mathcal{A}})$ ist ein kompakter Hausdorffraum bzgl. der schwach-$*$-Topologie.
  (Nach Bemerkung (1.3) ist mit $\mathcal{A}$ auch $\widetilde{\mathcal{A}}$ kommutativ und $\widetilde{\mathcal{A}}$ besitzt ein Einselement.)
- $\sigma(\mathcal{A})$ ist eine Teilmenge der abgeschlossenen Einheitskugel von $\mathcal{A}'$ in der schwach-$*$-Topologie.
  (Aus $|h(x,a)| \leq \|(x,a)\|$ für alle $(x,a) \in \widetilde{\mathcal{A}}$ folgt mit $a = 0$ insbesondere: $|h(x)| \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{A}$.)

Wir müssen also noch zeigen, dass $\sigma(\mathcal{A})$ lokalkompakt ist:

Aus Lemma (2.5) wissen wir, dass $\Phi : \sigma(\widetilde{\mathcal{A}}) \longrightarrow \sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$, $H \mapsto H|_{\mathcal{A}}$ eine bijektive Abbildung ist.
Weiterhin ist Φ stetig, wie wir aus der Definition der schwach-$*$-Topologie sehen können:
Es sei $\{H_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}}$ eine beliebige Folge in $\sigma(\widetilde{\mathcal{A}})$ (versehen mit der schwach-$*$-Topologie), dann gilt:

$$\begin{aligned} H_\alpha \overset{*}{\rightharpoonup} H \quad &\overset{Def.}{\Longleftrightarrow} \quad H_\alpha(y) \overset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} H(y), \quad \text{für alle } y \in \widetilde{\mathcal{A}} \\ &\overset{(2.5)}{\Longrightarrow} \quad \Phi(H_\alpha)(y) \overset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} \Phi(H)(y), \quad \text{für alle } y \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Damit ist $\Phi(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))$ kompakt als Bild einer kompaken Menge unter einer stetigen Abbildung und folglich ist $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ kompakt (bzgl. der schwach-$*$-Topologie).

Speziell ist $\sigma(\mathcal{A})$ offen in einer kompakten Menge und somit lokalkompakt, denn:
$\{0\}$ ist i.A. als einelementige Menge abgeschlossen, also ist $\mathcal{C}_{\sigma(\mathcal{A})\cup\{0\}}\{0\} = \sigma(\mathcal{A})$ offen bzgl. der Relativtopologie auf $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$.

Zu b):
In Teil a) haben wir gezeigt, dass $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ kompakt ist bzgl. der schwach-$*$-Topologie. Somit ist $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ abgeschlossen in $\mathcal{A}'$.

Anmerkung:
Insbesondere ist für $\sigma(\mathcal{A})$ lokalkompakt, $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ die Einpunktkompaktifizierung von $\sigma(\mathcal{A})$, wobei „$\{0\}$ die Rolle des Punktes ∞ übernimmt".

Zu c):
Ist $\sigma(\mathcal{A})$ kompakt, so identifizieren wir: $C_0(\sigma(\mathcal{A})) = C(\sigma(\mathcal{A}))$ und somit folgt, dass die Gelfandtransformation $\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C(\sigma(\mathcal{A}))$ der Abbildung $\Gamma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ entspricht (mit $\mathcal{A}$ und $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ Banachalgebren).

Ist $\sigma(\mathcal{A})$ nicht kompakt, so verschwindet $\hat{x}(h)$ im Unendlichen für jedes $x \in \mathcal{A}$, also gilt $\hat{x} \in C_0(\sigma(\mathcal{A}))$.
Obige Aussage bedeutet, dass $\hat{x}(h)$ ausserhalb von Kompakta sehr klein wird.
Wir versuchen also zu jedem $\epsilon > 0$ ein Kompaktum K zu finden, so dass $|\hat{x}(h)| < \epsilon$ für alle $h \notin K$ gilt.
Dies erhalten wir folgendenmaßen:
Aus dem Vortrag „Der Satz von Gelfand" (Definition (2.1)) wissen wir, dass $\hat{x}$ stetig auf $\sigma(\mathcal{A})$ ist, also gilt $\lim_{h\to 0} \hat{x}(h) = 0$. $\star$
Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig.
Dann existiert wegen $\star$ eine Menge $\mathcal{U} \subset \mathcal{A}'$ offen, mit $0 \in \mathcal{U}$ und $|\hat{x}(h)| < \epsilon$ für alle $h \in \sigma(\mathcal{A}) \cap \mathcal{U}$.
Setze nun $K := \sigma(\mathcal{A}) \backslash \mathcal{U} = (\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}) \backslash \mathcal{U}$.
Da $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$ kompakt ist (nach Teil a)), gilt dies auch für $(\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}) \backslash \mathcal{U} = \sigma(\mathcal{A}) \backslash \mathcal{U} = K$.
Dann gilt für alle $h \in \sigma(\mathcal{A}) \cap \mathcal{U} = \sigma(\mathcal{A}) \backslash K$: $|\hat{x}(h)| < \epsilon$.
Somit ist $\hat{x} \in C_0(\sigma(\mathcal{A}))$.

Nun müssen wir noch zeigen, dass $\Gamma_{\mathcal{A}}$ ein Homomorphismus von Banachalgebren ist:
Da $h \in \sigma(\mathcal{A})$ linear ist, folgt:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mathcal{A}}(xy)(h) &= \widehat{(xy)}(h) \overset{Def.}{=} h(xy) \\ &\overset{h\in\sigma(\mathcal{A})}{=} h(x)\cdot h(y) \overset{Def.}{=} \hat{x}(h)\cdot\hat{y}(h) \\ &= \Gamma_{\mathcal{A}}(x)(h)\cdot\Gamma_{\mathcal{A}}(y)(h), \qquad \text{für alle x,y} \in \mathcal{A}, h \in \sigma(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

Also ist $\Gamma_{\mathcal{A}}$ ein Banachalgebrenhomomorphismus.

Wie wir bereits wissen gilt $\hat{x}(h) = \widehat{(x,0)}(\tilde{h})$ und somit auch $\|\hat{x}\|_{sup} = \|\widehat{(x,0)}\|_{sup}$.
Mit [1], Ch.1, §1.2, Theorem (1.13)d) folgt dann, da $\widetilde{\mathcal{A}}$ eine Einheit besitzt, dass $\|\widehat{(x,0)}\|_{sup} = \rho(x,0)$ in $\widetilde{\mathcal{A}}$ ist.
Aus [1], Ch.1, §1.2, Theorem (1.8) erhalten wir somit:
$\rho(x,0) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$, da $\|(x,0)\| = \|x\|$ ist.

Insgesamt folgt also $\|\hat{x}\|_{sup} = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n}$, für $x \in \mathcal{A}$. □

— *Beispiele* —

(2.8) Beispiel (Fortsetzung von Beispiel (1.6))
Sei wieder $\mathcal{A} = L^1(\mathbb{R})$.
Die Fouriertransformation

$$\hat{f}(\xi) = \int e^{-2\pi i \xi x} f(x) dx$$

genügt der Gleichung $(f * g)\widehat{\ } = \hat{f} \cdot \hat{g}$:

Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$, dann ist

$$\begin{aligned}
(f * g)\widehat{\ }(\xi) &= \iint f(y) g(x-y)\, dy\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx \\
&= \iint f(y) g(x-y)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dy\, dx \\
&= \iint f(y) g(x-y)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx\, dy \\
&= \int f(y) \int g(x-y)\, e^{-2\pi i \xi x}\, dx\, dy \\
&= \int f(y) \int g(x)\, e^{-2\pi i \xi (x+y)}\, dx\, dy \\
&= \int f(y) e^{-2\pi i \xi y} \underbrace{\int g(x) e^{-2\pi i \xi x}\, dx}_{=\hat{g}(\xi)}\, dy \\
&= \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi), \quad \text{für alle } \xi \in \mathbb{R},
\end{aligned}$$

unter Anwendung des Satzes von Fubini.
([3], Kapitel III, Satz (3.12))

Somit gehört das Auswertungsfunktional $h_\xi(f) = \hat{f}(\xi)$ für jedes $\xi \in \mathbb{R}$ zu $\sigma(L^1(\mathbb{R})) = \{h : L^1(\mathbb{R}) \to \mathbb{C} : \text{h Homomorphismus}, h \neq 0\}$, denn

$$h_\xi(f * g) = (f * g)\widehat{\ }(\xi) = \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) = h_\xi(f) \cdot h_\xi(g).$$

(Dabei ist h_ξ beschränkt, da $\hat{f}$ beschränkt ist ([3], Kapitel I, (1.8)) und h_ξ ist linear aufgrund der Linearität des Integrals.)

Wir können einfach zeigen, dass dies alle multiplikativen Funktionale auf $L^1(\mathbb{R})$ sind. ([1], §4.1, Theorem (4.2), Theorem (4.5)a))

Folglich können wir durch die Abbildung $h_\xi \mapsto \xi$, $\sigma(L^1(\mathbb{R}))$ mit $\mathbb{R}$ identifizieren.

Dann entspricht die Gelfandtransformation der Fouriertransformation:
$\Gamma_{\mathcal{A}} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow C_0(\mathbb{R})$. ◇

(2.9) Beispiel (Fortsetzung von Beispiel (1.9))
Sei wieder $\mathcal{A} = C_0(X)$ und X ein nichtkompakter, lokalkompakter Hausdorffraum. Wie wir bereits gesehen haben gilt $\widetilde{\mathcal{A}} \cong C(\widetilde{X})$, wobei $\widetilde{X}$ die Einpunktkompaktifizierung von X ist.
Wir identifizieren also $\widetilde{\mathcal{A}}$ mit $C(\widetilde{X})$ und definieren die (kanonische) Einbettung von $\mathcal{A}$ in $\widetilde{\mathcal{A}}$: $\quad \iota : C_0(X) \longrightarrow C(\widetilde{X})$.

Nach dem Vortrag „Der Satz von Gelfand-Naimark" (Satz (1.9)) wissen wir, dass die Abbildung $\varphi : \widetilde{X} \longrightarrow \sigma(C(\widetilde{X}))$ mit $\tilde{x} \mapsto h_{\tilde{x}}(f) = f(\tilde{x})$
ein Homöomorphismus ist und identifizieren daher $\widetilde{X}$ mit $\sigma(C(\widetilde{X}))$.

Ebenfalls aus dem Vortrag „Der Satz von Gelfand-Naimark" (Bemerkung (1.10)) wissen wir, dass durch die Identifikation $\tilde{x} \leftrightarrow h_{\tilde{x}}$ die Gelfandtransformation auf $\widetilde{\mathcal{A}}$:
$\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}} : \widetilde{\mathcal{A}} \longrightarrow C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))$
zur identischen Abbildung auf $C(\widetilde{X})$ wird:
$\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}} : C(\widetilde{X}) \longrightarrow C(\widetilde{X})$ mit $\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(f)(h_{\tilde{x}}) = h_{\tilde{x}}(f) = f(\tilde{x})$ für alle $f \in C(\widetilde{X})$.

Wir schränken nun die Gelfandtransformation auf $\mathcal{A}$ ein und erhalten die identische Abbildung auf $C_0(X)$:
$\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}|_{\mathcal{A}} : C_0(X) \longrightarrow C_0(X)$. ◇

— Der Satz von Gelfand-Naimark —

Schließlich führen uns unsere Bemühungen auf eine neue Version des Satzes von Gelfand-Naimark.

(2.10) Satz (Gelfand-Naimark)
Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C*-Algebra ohne Einselement.
Dann ist $\Gamma_{\mathcal{A}}$ ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$. ◇

Zur Veranschaulichung dient ein kommutatives Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Gamma_{\mathcal{A}}"'] & \widetilde{\mathcal{A}} \arrow[d, "\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}"] \\
C_0(\sigma(\mathcal{A})) \arrow[r, "f'"'] & C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))
\end{tikzcd}$$

Dabei bezeichnen f und f' die (kanonischen) Einbettungen von $\mathcal{A}$ in $\widetilde{\mathcal{A}}$ und von $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ in $C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))$.
(Aufgrund von Lemma (2.5) identifizieren wir $\sigma(\widetilde{\mathcal{A}})$ mit $\sigma(\mathcal{A}) \cup \{0\}$.)

Beweis
Wir kombinieren die bereits erhaltenen Resultate.
In Proposition (1.10) haben wir gezeigt, dass $\widetilde{\mathcal{A}}$ mit der Involution (3) zu einer C*-Algebra wird.
Weiterhin wissen wir nach Bemerkung (1.3), dass mit $\mathcal{A}$ auch $\widetilde{\mathcal{A}}$ kommutativ ist.
In Lemma (1.1) haben wir ausserdem gezeigt, dass $\widetilde{\mathcal{A}}$ eine Einheit besitzt.
Somit können wir den Satz von Gelfand-Naimark für kommutative C*-Algebren mit Einselement ([1], Ch.1, §1.2, (1.20) The Gelfand-Naimark Theorem) anwenden und erhalten:
$\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ ist ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $\widetilde{\mathcal{A}}$ nach $C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))$.

Als nächstes wollen wir ein Element aus $C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))$ betrachten und zeigen, dass dieses Element sowohl über eine Verkettung von f und $\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}$, als auch über eine Verkettung von $\Gamma_{\mathcal{A}}$ und f' das Bild eines Elementes aus $\mathcal{A}$ ist und dass beide „Wege" gleichwertig sind.

Es sei also $H \in \sigma(\widetilde{\mathcal{A}})$.
Dann gilt für alle $x \in \mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(f(x))(H) &= \Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}((x,0))(H) \\ &= H(x,0) \\ &\overset{(7)}{=} \begin{cases} h(x), & H = \tilde{h} \\ 0, & H = \tilde{0} \end{cases} \\ &= f'(\Gamma_{\mathcal{A}}(x))(H). \end{aligned}$$

(Wobei $\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ ein isometrischer $*$-Isomorphismus ist und die Einbettungen f und f' bijektiv, linear und isometrisch sind (bzgl. ihrer Einschränkung auf das Bild).)

Nun müssen wir noch zeigen, dass $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ gilt.

„$\subset$":
Diese Inklusion folgt sofort aus Satz (2.7)c).
(Die Gelfand-Transformation auf $\mathcal{A}$ ist ein Algebrenhomomorphismus von $\mathcal{A}$ in $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$.)

„$\supset$":
Es sei $g \in C_0(\sigma(\mathcal{A}))$.
Dann ist $G := f'(g) \in C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))$ und da $\Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}$ ein Isomorphismus ist, folgt:
$G = \Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(x,a)$ für ein geeignetes $(x,a) \in \widetilde{\mathcal{A}}$.
(Wir können also ein Element aus $C(\sigma(\widetilde{\mathcal{A}}))$ (eindeutig) als Bild eines Elementes aus $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ und als Bild eines Elementes aus $\widetilde{\mathcal{A}}$ interpretieren.)

Nun müssen wir noch zeigen, dass dieses Element das Bild eines Elementes aus $\mathcal{A}$ ist.

Insbesondere gilt:
Für $H = \tilde{0}$:

$$0 = G(\tilde{0}) = \Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(x, a)(\tilde{0}) = \tilde{0}(x, a) = a.$$

Für $H = \tilde{h}$:

$$\hat{x}(h) = h(x) = H(x, 0) = \Gamma_{\widetilde{\mathcal{A}}}(x, 0)(H) = G(H) = g(h).$$

Somit folgt: $g = \hat{x} \in \Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A})$ und damit $\Gamma_{\mathcal{A}}(\mathcal{A}) = C_0(\sigma(\mathcal{A}))$, da g beliebig war.

Insgesamt erhalten wir:
$\Gamma_{\mathcal{A}}$ ist ein isometrischer $*$-Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$. □

§3 Quellen

[1] Folland, Gerald B., A Course in Abstract Harmonic Analysis
[2] Conway, John B., A Course in Funktional Analysis, Second Edition
[3] Führ, H., Fourieranalysis, Aachen 2007
[4] Krieg, A.: Analysis I, Aachen 2003
[5] Krieg, A.: Analysis III, Aachen 2000
[6] Krieg, A.: Topologie, Aachen 2005
[7] Rudin, Real and Complex Analysis, Third Edition
[8] Wirtz, Cornelia, „Der Satz von Gelfand",
Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 23.10.2008
[9] Dieckmann, Till, „Der Satz von Gelfand-Naimark",
Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 06.11.2008