# Banach-Algebren

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 16.10.2008

Thorsten Rey

## §1 Definitionen und Beispiele

**(1.1) Definition**
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra, $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{A}$ (bzw. dem zugrundeliegenden Vektorraum).

a) $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ heißt *Banach-Algebra*, falls $\mathcal{A}$ bzgl. $\|\cdot\|$ vollständig ist und

$$\|xy\| \leq \|x\| \cdot \|y\| \;\; \forall\, x, y \in \mathcal{A}.$$

Besitzt $\mathcal{A}$ ein Einselement, so bezeichnen wir dieses im Folgenden mit $e$.

b) Eine Abbildung $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ heißt *Involution*, falls für alle $x, y \in \mathcal{A},\ \lambda \in \mathbb{C}$ gilt:

1) $(x+y)^* = x^* + y^*$
2) $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$
3) $(xy)^* = y^* x^*$
4) $x^{**} := (x^*)^* = x$

$(\mathcal{A},\ ^*)$ mit einer Involution $^*$ nennt man **-Algebra*.

c) Ein Paar $(\mathcal{A},\ ^*)$ mit einer Banach-Algebra $\mathcal{A}$ und einer Involution $^*$ heißt *$C^*$-Algebra*, falls

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \;\; \forall\, x \in \mathcal{A}.$$ ◇

**(1.2) Bemerkung**
Eine Involution $^* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ muss nicht notwendigerweise isometrisch sein. Ist jedoch $\mathcal{A}$ eine $C^*$-Algebra, so gilt $\|x\| = \|x^*\| \; \forall\, x \in \mathcal{A}$. ◇

**Beweis**
Für $x \in \mathcal{A}$ gilt:

$$\|x\|^2 \underset{(1.1)c)}{=} \|x^*x\| \underset{(1.1)a)}{\leq} \|x^*\| \cdot \|x\|.$$

Damit gilt jedoch auch

$$\|x^*\| \leq \|x^{**}\| = \|x\|. \qquad \square$$

**(1.3) Definition**
Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ Banach-Algebren.

a) Eine Abbildung $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *(Banach-Algebren)-Homomorphismus*, falls $\phi$ linear und beschränkt ist und gilt:

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \quad \forall\, x, y \in \mathcal{A}.$$

b) Sind $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ *-Algebren, so heißt ein Homomorphismus $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ **-Homomorphismus*, falls

$$\phi(x^*) = \phi(x)^*.$$

c) Sei $S \subseteq \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ heißt *erzeugt von $S$*, falls die Menge aller Linearkombinationen von Produkten von $S$ dicht in $\mathcal{A}$ liegt, also falls

$$cl_{\|\cdot\|}\left(\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \ldots \cdot a_m \mid n,\ m \in \mathbb{N},\ a_i \in S\right) = \mathcal{A}.$$

$\diamond$

**(1.4) Beispiel**
Sei $X$ ein kompakter, topologischer Raum. Wir betrachten $C(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \mid f \text{ stetig}\}$ mit punktweiser Addition und skalarer Multiplikation sowie der üblichen Maximums-Norm.
Damit ist $C(X)$ eine $\mathbb{C}$-Algebra, die offenbar $\|fg\| \leq \|f\| \cdot \|g\|$ für $f, g \in \mathbb{C}(X)$ erfüllt. Definiere nun $^* : C(X) \to C(X), f \mapsto \bar{f}$. Aufgrund der punktweisen Definition und

der bekannten Rechenregeln der komplexen Konjugation, ist $^*$ eine Involution. Damit wird $C(X)$ zu einer $C^*$-Algebra:

$$\begin{aligned}\|f^*f\| &= \max_{x\in C(X)} |f^*(x)f(x)| = \max_{x\in C(X)} |\overline{f(x)}f(x)| \\ &= \max_{x\in C(X)} |f(x)|^2 = \left(\max_{x\in C(X)} |f(x)|\right)^2 \\ &= \|f\|^2\end{aligned}$$

◇

# § 2 Invertierbarkeit

Falls nicht anders gesagt, bezeichne $\mathcal{A}$ im Folgenden eine Banach-Algebra mit Einselement sowie mit Norm $\|\cdot\|$ und es seien $x \in \mathcal{A}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$.
Elemente mit beidseitigen Inversen nennen wir fortan *invertierbar*.

**(2.1) Lemma (Neumann'sche Reihe)**
Gilt $\|x\| < 1$, so ist $e - x$ invertierbar und es gilt $(e-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. ◇

**Beweis**
Wegen $\|x^n\| \leq \|x\|^n$ gilt $\lim_{n\to\infty} e - x^n = e$.
Aus

$$\begin{aligned}e - x^n &= (e-x) + (x - x^2) + ... + (x^{n-1} - x^n) = \sum_{k=0}^{n-1} x^k - x^{k+1} \\ &= (e-x)\left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} x^k\right)(e-x)\end{aligned}$$

folgt dann mit der Dreiecksungleichung und wegen $\|x\| < 1$ die Konvergenz der Reihe und somit die Behauptung. □

**(2.2) Satz**
a) $|\lambda| > \|x\| \;\Rightarrow\; \lambda e - x$ ist invertierbar mit $(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-(n+1)} x^n$.

b) Ist $x$ invertierbar und $\|y\| < \|x^{-1}\|^{-1}$, so ist auch $x - y$ invertierbar mit

$$(x-y)^{-1} = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} (yx^{-1})^n.$$

c) Ist $x$ invertierbar und $\|y\| \le \frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1}$, so gilt

$$\|(x-y)^{-1} - x^{-1}\| \le 2\|x^{-1}\|^2 \cdot \|y\|.$$

d) Die Menge $U$ der invertierbaren Elemente von $\mathcal{A}$ ist offen und die Abbildung $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig auf $U$. $\diamond$

**Beweis**

a) Folgt aus $\lambda e - x = \lambda \left(e - \lambda^{-1} x\right)$ mit (1.5).

b) Folgt aus $x - y = \left(e - yx^{-1}\right) x$ und $\|yx^{-1}\| \le \|y\| \cdot \|x^{-1}\| < 1$ mit (1.5).

c) Es ist

$$\begin{aligned} \|(x-y)^{-1} - x^{-1}\| &= \|x^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} (yx^{-1})^n\| \le \|x^{-1}\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|y\| \cdot \|x^{-1}\|)^n \\ &= \|x^{-1}\|^2 \cdot \|y\| \sum_{n=1}^{\infty} (\|y\| \cdot \|x^{-1}\|)^{n-1} \\ &= \|x^{-1}\|^2 \cdot \|y\| \sum_{n=0}^{\infty} (\|y\| \cdot \|x^{-1}\|)^n \\ &\le \|x^{-1}\|^2 \cdot \|y\| \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2\|x^{-1}\| \cdot \|y\| \end{aligned}$$

d) Sei $x \in U$ und $z \in \mathcal{A}$ mit $\|x - z\| = \|z - x\| < \|x^{-1}\|^{-1} =: \rho$.
$\underset{b)}{\Rightarrow}$ $x - (x - z) = z$ ist invertierbar
$\Rightarrow$ $B_\rho(x) \subseteq U \;\Rightarrow\; U$ offen

Nun seien $x, y \in U$ mit $\|x - y\| < \min\{\frac{1}{2}\|x^{-1}\|^{-1},\ \frac{\epsilon}{2\|x^{-1}\|^2}\}$.
$\Rightarrow$ $\|x^{-1} - y^{-1}\| = \|y^{-1} - x^{-1}\| = \|(x - (x-y))^{-1} - x^{-1}\| \underset{c)}{\le} 2\|x^{-1}\|^2\|x - y\| < \epsilon$
$\Rightarrow$ $x \mapsto x^{-1}$ ist stetig auf $U$ $\square$

# § 3 Spektrum und Resolvente

**(3.1) Definition**

1) $\sigma(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid \lambda e - x \text{ ist nicht invertierbar}\}$ heißt das *Spektrum von x*.

2) Für $\lambda \notin \sigma(x)$ heißt $R(\lambda) = R_x(\lambda) = (\lambda e - x)^{-1}$ die *Resolvente von x*. ◇

**(3.2) Bemerkung**

$\sigma(x)$ ist kompakt $\forall\, x \in \mathcal{A}$. ◇

**Beweis**

Sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. Also ist $\lambda e - x$ invertierbar.
Weiter sei $\mu \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda - \mu| < \|x^{-1}\|^{-1} =: \rho$.
Dann ist $\lambda e - x - (\lambda - \mu)\, e = \mu e - x$ nach (2.2)$b)$ invertierbar.
Also liegt die offene Kugel $B_\rho(x)$ in $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$, d.h. $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$ ist offen und $\sigma(x)$ abgeschlossen. Nach (2.2)$a)$ gilt zudem $\sigma(x) \subseteq B_{\|x\|}(x)$.
Zusammenfassend ist also $\sigma(x)$ abgeschlossen und beschränkt und somit nach dem Satz von Heine-Borel kompakt. □

**(3.3) Lemma**

$R$ ist eine holomorphe Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$.
Insbesondere ist dann $\phi \circ R$ für alle $\phi \in \mathcal{A}'$ eine holomorphe, komplexwertige Funktion auf $\mathbb{C} \setminus \sigma(x)$. ◇

**Beweis**

Seien $\lambda, \mu \in \sigma(x),\ \lambda \neq \mu$.

$$\begin{aligned}(\mu - \lambda)\, e &= (\mu e - x) - (\lambda e - x)\\ &= (\lambda e - x)\, R(\lambda)\, (\mu e - x) - (\lambda e - x)\, R(\mu)\, (\mu e - x)\\ &= (\lambda e - x)\, [R(\lambda) - R(\mu)]\, (\mu e - x)\end{aligned}$$

Durch Multiplikation mit $R(\lambda)$ von links und $R(\mu)$ von rechts, erhält man

$$(\mu - \lambda)\, R(\lambda) R(\mu) = R(\lambda) - R(\mu)$$

und daher wegen $\lambda \neq \mu$

$$-R(\lambda)R(\mu) = \frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu}.$$

Durch die Stetigkeit der Inversion nach (2.2)$d$) folgt mittels Grenzübergang $\mu \to \lambda$ die Existenz der Ableitung $R'(\lambda) = -R(\lambda)^2$.

Sei nun $\phi \in \mathcal{A}'$ beliebig. Aus dem bereits Gezeigten und der Linearität von $\phi$ folgt dann sofort aus der Stetigkeit die Existenz des Grenzwertes

$$\lim_{\mu \to \lambda} \frac{\phi\left(R(\lambda)\right) - \phi\left(R(\mu)\right)}{\lambda - \mu} = \lim_{\mu \to \lambda} \phi\left(\frac{R(\lambda) - R(\mu)}{\lambda - \mu}\right). \qquad \square$$

**(3.4) Lemma**
$\sigma(x)$ ist nicht leer $\forall\ x \in \mathcal{A}$. $\diamond$

**Beweis**
Angenommen, $\sigma(x) = \emptyset$.
Also ist $R$ für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ definiert und nach (3.3) differenzierbar.
Nun gilt

$$\lim_{\lambda \to \infty} e - \lambda^{-1}x = e$$

und nach (2.2)$d$) erhalten wir aus der Stetigkeit von $z \mapsto z^{-1}$ sogar

$$\lim_{\lambda \to \infty} \left(e - \lambda^{-1}x\right)^{-1} = e.$$

Damit folgt

$$\|R(\lambda)\| = \|\left(\lambda e - x\right)^{-1}\| = |\lambda|^{-1} \|\left(e - \lambda^{-1}x\right)^{-1}\| \to 0,\ \lambda \to \infty$$

$\Rightarrow\ |\phi \circ R(\lambda)| \leq \|\phi\| \cdot \|R(\lambda)\| < M$ für ein $M \in \mathbb{R}$, $\phi \in \mathcal{A}'$ und $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$.

Wegen (3.3) ist $\phi \circ R$ eine ganze Funktion.
Deshalb gilt nach dem Satz von Liouville: $\phi \circ R$ ist konstant und deshalb nach obigem Grenzwert $\phi \circ R \equiv 0$

Da $\phi$ beliebig war, folgt nun aus der Normformel der Widerspruch $R(\lambda) = 0$ ↯ $\square$

**(3.5) Satz (Gelfand - Mazur)**
Ist $\mathcal{A}$ eine Banach-Algebra, in der jedes von Null verschiedene Element invertierbar ist, so gilt $\mathcal{A} \cong \mathbb{C}$. $\diamond$

**Beweis**
Wir betrachten die Abbildung

$$\vartheta : \mathbb{C} \to \mathcal{A},\ \lambda \mapsto \lambda \cdot e$$

und behaupten, dass $\vartheta$ ein Algebren-Isomorphismus ist. Offensichtlich ist $\vartheta$ ein injektiver Algebren-Homomorphismus. Die Surjektivität beweisen wir per Kontraposition:

Sei $x \notin \mathbb{C}e = Im(\vartheta)$.
$\Rightarrow\ \lambda e - x \neq 0\ \ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow\ \lambda e - x$ invertierbar $\ \forall\, \lambda \in \mathbb{C}$
$\Rightarrow\ \sigma(x) = \emptyset\ \ \lightning$ zu (3.4)

Also hat jedes $x \in \mathcal{A}$ die Form $x = \lambda \cdot e$, somit ist $\vartheta$ surjektiv. □

**(3.6) Definition**
$\rho(x) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \in \sigma(x)\}$ heißt *Spektralradius von $x$*. ◇

Aus Satz (2.2)$a$) erhalten wir sofort $\rho(x) \leq \|x\|$. Dies können wir noch präzisieren:

**(3.7) Satz**
$\rho(x) = \lim_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$. ◇

**Beweis**
Für $\lambda \in \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\begin{aligned}
\lambda^n e - x^n &= \lambda^n e - \lambda^{n-1} e \cdot x + \lambda^{n-1} e \cdot x - \lambda^{n-2} e \cdot x^2 + \lambda^{n-2} e \cdot x^2 - ... + \lambda e \cdot x^{n-1} - x^n \\
&= (\lambda e - x)\left[\lambda^{n-1} + \lambda^{n-2} x + ... + x^{n-1}\right] \\
&= (\lambda e - x) \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j x^{n-1-j} = \sum_{j=0}^{n-1} \lambda^j x^{n-1-j}\,(\lambda e - x)
\end{aligned}$$

Ist also $\lambda^n e - x^n$ invertierbar, dann auch $\lambda e - x$, d.h.:
$\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow\ \lambda^n \in \sigma(x^n) \underset{(2.2)a)}{\Rightarrow} |\lambda|^n = |\lambda^n| \leq \|x^n\|\ \ \forall\, n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow\ |\lambda| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$
$\Rightarrow\ \rho(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$

Sei nun $\phi \in \mathcal{A}'$ beliebig. Dann ist $\phi \circ R(\lambda)$ holomorph für $|\lambda| > \rho(x)$ und es gilt für die Potenzreihenentwicklung nach (2.2)$a$):
$\phi \circ R(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^{-n-1} \cdot \phi(x^n) < \infty \quad \forall\ |\lambda| > \rho(x)$
$\Rightarrow\ \lambda^{-n-1}\phi\left(x^n\right) \to 0,\ n \to \infty$
$\Rightarrow\ \phi\left(\lambda^{-n-1}x^n\right) \to 0,\ n \to \infty$
$\Rightarrow\ \lambda^{-n-1}x^n \rightharpoonup 0,\ n \to \infty$, da $\phi \in \mathcal{A}'$ beliebig

Weil schwach konvergente Folgen (stark) beschränkt sind, existiert ein $C > 0$, so dass
$\|\lambda^{-n-1}x^n\| \leq C \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow\ |\lambda^{-n-1}| \cdot \|x^n\| \leq C \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow\ \|x^n\| \leq C \cdot |\lambda^{n+1}| \ \ \forall\ n \in \mathbb{N}$
$\Rightarrow\ \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}} \cdot |\lambda|^{\frac{n+1}{n}} \ \to\ |\lambda|,\ n \to\ \infty$
$\Rightarrow\ \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda|$
Da nun aber $|\lambda| > \rho(x)$ beliebig gewählt wurde, gilt sogar:
$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(x)$

Somit gilt
$$\limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \rho(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}$$
und daraus folgt die Behauptung. □

**(3.8) Bemerkung**
Sei $\mathcal{A}$ eine unitäre Banach-*-Algebra. Dann gilt:

a) $e = e^*$

b) Falls $x$ invertierbar ist, so auch $x^*$ und es gilt $(x^*)^{-1} = \left(x^{-1}\right)^*$.

c) $\sigma(x^*) = \overline{\sigma(x)} \ \ \forall\ x \in \mathcal{A}$ ◇

**Beweis**
a) Mit
$$e^*x = (x^*e)^* = x = (ex^*)^* = xe^*$$
folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit des neutralen Elements.

b) Sei $x \in \mathcal{A}$ invertierbar. Dann gilt:
$\left(x^{-1}\right)^* x^* = \left(x x^{-1}\right)^* = e^* \underset{a)}{=} e$
Analog folgt die Rechtsinvertierbarkeit mit $\left(x^{-1}\right)^*$.
$\Rightarrow \ \left(x^{-1}\right)^* = (x^*)^{-1}$

c) Wegen $(\lambda e - x)^* = \bar{\lambda} e^* - x^* \underset{a)}{=} \bar{\lambda} e - x^*$ gilt dann:

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma\left(x^*\right) &\Leftrightarrow \ \lambda e - x^* \text{ nicht invertierbar} \\
&\Leftrightarrow \ \left(\bar{\lambda} e - x\right)^* \text{ nicht invertierbar} \\
&\underset{b)}{\Leftrightarrow} \ \bar{\lambda} e - x \text{ nicht invertierbar} \\
&\Leftrightarrow \ \bar{\lambda} \in \sigma(x) \\
&\Leftrightarrow \ \lambda \in \overline{\sigma(x)}
\end{aligned}$$

□