
GNS-Konstruktion

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 18.12.2008

Maximilian Brölsch

Der Vortrag ist in zwei Teile gegliedert. Im ersten Teil wird die GNS-Konstruktion eingeführt, ein Hilfsmittel um eine beliebige C^* -Algebra mit einer C^* -Unteralgebra des Raumes der beschränkten Operatoren über einem geeigneten Hilbertraum zu identifizieren. Im zweiten Teil wird diese Konstruktion verwendet um die C^* -Algebren Struktur auf Matrix-Algebren über C^* -Algebren zu übertragen und eine neue Charakterisierung der positiven Elemente einer C^* -Algebra zu erhalten.

§1 GNS-Konstruktion

Im ersten Abschnitt wird nun die eigentliche GNS-Konstruktion eingeführt, indem zunächst ein geeigneter Hilbertraum aus positiven, linearen Funktionalen konstruiert wird und dann die Isometrieeigenschaft gezeigt wird.

(1.1) Definition

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra. Eine *Darstellung* von \mathcal{A} ist ein Paar (H, φ) , wobei H ein Hilbert-Raum und

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow B(H)$$

ein $*$ -Homomorphismus ist. (H, φ) heißt *treu*, falls φ injektiv ist. ◇

(1.2) Lemma

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra und $(H_\lambda, \varphi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ eine Familie von Darstellungen von \mathcal{A} . Dann ist auch (H, φ) mit $H = \{(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}, x_\lambda \in H_\lambda, \exists P \subset \Lambda \text{ abzählbar mit } x_\lambda = 0, \forall \lambda \in \Lambda \setminus P, \sum_{\lambda \in P} (x_\lambda, x_\lambda)_{H_\lambda} < \infty\}$ und

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow B(H), \varphi(a)(x_\lambda)_\lambda = (\varphi_\lambda(a)(x_\lambda))_\lambda$$

eine Darstellung von \mathcal{A} . Des weiteren ist (H, φ) *treu*, falls für jedes $0 \neq a$ in \mathcal{A} ein λ in Λ existiert, so dass $\varphi_\lambda(a) \neq 0$ ist. ◇

Beweis

Zunächst wird gezeigt, dass H tatsächlich ein Hilbertraum, und insbesondere wohldefiniert, ist. Sei dazu $(\cdot, \cdot)_\lambda$ das Skalarprodukt auf H_λ . Zunächst muss gezeigt werden, dass die Bedingung $\sum_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda, x_\lambda)_\lambda < \infty$ unabhängig von der Abzählung der Teilmenge von Λ ist, auf der die x_λ ungleich null sind. Sei dazu $(x_\lambda)_\lambda, S = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ und θ eine Abzählung von S , für die

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda, x_\lambda)_\lambda = \sum_{\lambda \in S} (x_\lambda, x_\lambda)_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} (x_{\theta(i)}, x_{\theta(i)})_{\theta(i)} < \infty$$

ist. Da die $(x_\lambda, x_\lambda)_\lambda$ alle größer null sind, ist die Reihe auf der rechten Seite absolut konvergent und kann damit beliebig umgeordnet werden. Damit folgt für jede andere Abzählung $\tilde{\theta}$ von S :

$$\sum_{\lambda \in S} (x_\lambda, x_\lambda)_\lambda = \sum_{i=1}^{\infty} (x_{\tilde{\theta}(i)}, x_{\tilde{\theta}(i)})_{\tilde{\theta}(i)} = \sum_{i=1}^{\infty} (x_{\theta(i)}, x_{\theta(i)})_{\theta(i)}$$

Also ist die Menge H wohldefiniert. Zur Hilbertraumstruktur wird zunächst ein Skalarprodukt auf H definiert durch

$$((x_\lambda)_\lambda, (y_\lambda)_\lambda)_H := \sum_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda, y_\lambda)_\lambda \quad (1)$$

Zur Wohldefiniertheit $P(x) := P((x_\lambda)_\lambda) := \{\lambda \in \Lambda, x_\lambda \neq 0\}$. Damit ist $P(x)$ für alle x aus H abzählbar. Sei nun $(x_\lambda)_\lambda, (y_\lambda)_\lambda$ aus H . Dann gilt:

$$\begin{aligned} (x, y)_H &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda, y_\lambda)_{H_\lambda} \\ &= \sum_{\lambda \in P(x) \cap P(y)} (x_\lambda, y_\lambda)_{H_\lambda} \end{aligned}$$

Mit P_x und P_y ist auch der Schnitt abzählbar und es gilt für jedes (x_λ, y_λ) die Cauchy-Schwarz-Ungleichung, womit folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in P(x) \cap P(y)} |(x_\lambda, y_\lambda)_{H_\lambda}| &\leq \sum_{\lambda \in P(x) \cap P(y)} \|x_\lambda\|_{H_\lambda} \|y_\lambda\|_{H_\lambda} \\ &\leq \left(\sum_{\lambda \in P(x) \cap P(y)} (x_\lambda, x_\lambda)_{H_\lambda}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda \in P(x) \cap P(y)} (y_\lambda, y_\lambda)_{H_\lambda}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\sum_{\lambda \in P(x)} (x_\lambda, x_\lambda)_{H_\lambda}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\lambda \in P(y)} (y_\lambda, y_\lambda)_{H_\lambda}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Der Ausdruck rechts ist dabei nach Definition von H endlich. Damit konvergiert die Reihe aus der Definition des Skalarprodukts absolut und ist damit Wohldefiniert. Insbesondere dürfen die Summanden umgeordnet werden, woraus folgt dass

die Summe über eine beliebige abzählbare Indexmenge, die a priori keine Anordnung besitzt wohldefiniert ist, da für jede Abzählung der Indexmenge die Reihe den selben Wert liefert (absolute Konvergenz). Alle weiteren Eigenschaften des Skalarprodukts folgen sofort aus der Konstruktion, da sie schon für $(\cdot, \cdot)_{H_\lambda}$ gelten. Die Vollständigkeit folgt ebenfalls daraus, dass die H_λ alle vollständig sind.

Die Abbildung φ ist wohldefiniert, da für jedes a aus \mathcal{A} ein beschränkter Operator auf H definiert. Es gilt nämlich für $*$ -Homomorphismen $\|\varphi_\lambda(a)\| \leq \|a\|$. Damit folgt für $(x_\lambda)_\lambda$ aus H :

$$\|(\varphi(a)(x_\lambda))_\lambda\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} \|\varphi_\lambda(a)x_\lambda\|^2 \leq \sum_{\lambda \in \Lambda} \|a\|^2 \|x_\lambda\|^2$$

Da die Rechte Summe rechte Seite endlich ist, folgt die Beschränktheit von $\varphi(a)$. Die Linearität ist klar. Weiterhin ist φ ein $*$ -Homomorphismus, denn es gilt:

$$\begin{aligned} \varphi(a+b)(x_\lambda)_\lambda &= (\varphi_\lambda(a+b)(x_\lambda))_\lambda \\ &= (\varphi_\lambda(a)(x_\lambda) + \varphi_\lambda(b)(x_\lambda))_\lambda \\ &= (\varphi_\lambda(a)(x_\lambda))_\lambda + (\varphi_\lambda(b)(x_\lambda))_\lambda \\ &= (\varphi(a)(x_\lambda))_\lambda + (\varphi(b)(x_\lambda))_\lambda \end{aligned}$$

Und weiter

$$\begin{aligned} \varphi(a \cdot b)(x_\lambda)_\lambda &= (\varphi_\lambda(a \cdot b)(x_\lambda))_\lambda \\ &= (\varphi_\lambda(a)(\varphi_\lambda(b)(x_\lambda)))_\lambda \\ &= (\varphi(a)(\varphi_\lambda(b)(x_\lambda)))_\lambda \\ &= (\varphi(a)(\varphi(b))(x_\lambda))_\lambda \end{aligned}$$

Zur Verträglichkeit mit der Involution, sei a aus \mathcal{A} und $(x_\lambda)_\lambda$ aus H . Dann ist

$$\begin{aligned} &(\varphi(a^*)(x_\lambda)_\lambda, (y_\lambda)_\lambda)_H \\ &= ((\varphi_\lambda(a^*)(x_\lambda))_\lambda, (y_\lambda)_\lambda)_H \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (\varphi_\lambda(a^*)(x_\lambda)_\lambda, y_\lambda)_{H_\lambda} \\ &= \sum_{\lambda \in \Lambda} (x_\lambda, \varphi_\lambda(a)(y_\lambda))_{H_\lambda} \\ &= ((x_\lambda)_\lambda, (\varphi_\lambda(a)(y_\lambda))_\lambda)_H \\ &= ((x_\lambda)_\lambda, \varphi(a)(y_\lambda)_\lambda)_H \end{aligned}$$

Weiterhin ist klar, dass falls für jedes a aus \mathcal{A} welches nicht null ist, ein λ aus Λ existiert, φ injektiv ist. \square

(1.3) Definition

Sei τ ein positives, lineares Funktional auf der C^* -Algebra \mathcal{A} . Definiere

$$N_\tau = \{a \in \mathcal{A} \mid \tau(a^*a) = 0\} = \{a \in \mathcal{A} \mid \tau(ba) = 0 \forall b \in \mathcal{A}\}. \quad \diamond$$

(1.4) Lemma

1. Die Konstruktion N_τ aus (1.3) ist ein abgeschlossenes, linksseitiges Ideal in \mathcal{A} . Des weiteren ist durch

$$\mathcal{A}/N_\tau \times \mathcal{A}/N_\tau \rightarrow \mathbb{C}, (a + N_\tau, b + N_\tau) \mapsto \tau(b^*a) \quad (2)$$

eine wohldefinierte, positiv definite Sesquilinearform und macht \mathcal{A}/N_τ zum Prä-Hilbertraum. Die so definierte Norm entspricht im Allgemeinen nicht der Norm, bezüglich der \mathcal{A}/N_τ zur C^* -Algebra wird. Mit $\|\cdot\|_{\mathcal{A}/N_\tau}$ ist im folgenden die durch die Sesquilinearform induzierte Norm.

2. Für a aus \mathcal{A} ist $\varphi(a)$ in $B(\mathcal{A}/N_\tau)$ vermöge

$$\varphi(a)(b + N_\tau) = ab + N_\tau \quad \diamond$$

Beweis

1. Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra, τ ein positives lineares Funktional auf \mathcal{A} , a aus \mathcal{A} und b aus N_τ . Dann gilt:

$$\tau(c(ab)) = \tau((ca)b) = 0, \text{ für alle } c \in \mathcal{A}$$

Damit ist N_τ ein linksseitiges Ideal in \mathcal{A} . Zur Abgeschlossenheit betrachte für festes b aus \mathcal{A} die Abbildung

$$\tau_b : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, a \mapsto \tau(ba)$$

Damit ist τ_b für alle b beschränkt und linear und damit stetig, also ist $\text{Kern}(\tau_b)$ abgeschlossen für jedes b in \mathcal{A} . Nun ist

$$N_\tau = \{a \in \mathcal{A} \mid \tau(ba) = 0 \forall b \in \mathcal{A}\} = \bigcap_{b \in \mathcal{A}} \text{Kern}(\tau_b)$$

und damit abgeschlossen, als beliebiger Durchschnitt abgeschlossener Mengen. Damit ist \mathcal{A}/N_τ eine C^* -Algebra und die Abbildung (2) ist (sofern sie wohldefiniert ist, was noch zu zeigen ist) eine Sesquilinearform. Zur Wohldefiniertheit betrachte $a + N_\tau$ und $\tilde{a} + N_\tau$ mit $a = \tilde{a} + c$ für ein c in N_τ . Dann gilt:

$$\begin{aligned}\tau(b^*a) &= (a + N_\tau, b + N_\tau) = (\tilde{a} + c + N_\tau, b + N_\tau) \\ &= \tau(b^*(\tilde{a} + c)) = \tau(b^*\tilde{a}) + \tau(b^*c) = \tau(b^*\tilde{a})\end{aligned}$$

Damit folgt, dass die Abbildung (2) Repräsentantenunabhängig in der ersten Komponente ist, und mit der bereits bekannten Symmetrie der Abbildung folgt daraus auch die Repräsentantenunabhängigkeit in der zweiten Komponente. Also ist die Abbildung wohldefiniert und damit tatsächlich eine Sesquilinearform auf \mathcal{A}/N_τ . Die positive Definitheit folgt sofort aus der Definition von N_τ .

2. Die Wohldefiniertheit von $\varphi(a)$ folgt sofort aus der Tatsache, dass N_τ ein linksseitiges Ideal in \mathcal{A} ist und damit $\varphi(a)(b + N_\tau)$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten $b + N_\tau$ immer den selben Wert liefert. Sei a aus \mathcal{A} beliebig, zeige zunächst, dass $\varphi(a)$ beschränkt ist. Für beliebiges $b + N_\tau$ aus \mathcal{A}/N_τ gilt

$$\|\varphi(a)(b + N_\tau)\|_{\mathcal{A}/N_\tau}^2 = \tau((ab)^*(ab)) = \tau(b^*a^*ab) \leq \|a\|_{\mathcal{A}}^2 \|b + N_\tau\|_{\mathcal{A}/N_\tau}^2$$

Damit folgt für die Operatornorm von $\varphi(a)$

$$\begin{aligned}\|\varphi(a)\|_{B(\mathcal{A}/N_\tau)} &= \sup_{\|b + N_\tau\|_{\mathcal{A}/N_\tau} \leq 1} \|\varphi(a)(b + N_\tau)\|_{\mathcal{A}/N_\tau} \\ &\leq \sup_{\|b + N_\tau\|_{\mathcal{A}/N_\tau} \leq 1} \|a\|_{\mathcal{A}} \|b + N_\tau\|_{\mathcal{A}/N_\tau}\end{aligned}$$

Damit folgt $\|\varphi(a)\|_{B(\mathcal{A}/N_\tau)} \leq \|a\|_{\mathcal{A}}$ und damit insbesondere die Beschränktheit von $\varphi(a)$ für alle a aus \mathcal{A} . \square

(1.5) Definition und Satz

Sei H_τ der Banachabschluss von \mathcal{A}/N_τ bezüglich der durch die Sesquilinearform induzierten Norm (dieser ist damit ein Hilbertraum) und $\varphi_\tau(a)$ die (eindeutige) Fortsetzung von φ in $B(H_\tau)$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi_\tau : \mathcal{A} \rightarrow B(H_\tau), a \mapsto \varphi_\tau(a)$$

ein \star -Homomorphismus. Damit wird (H_τ, φ_τ) zu einer Darstellung von \mathcal{A} , die *Gelfand-Naimark-Segal Darstellung* (kurz GNS-Darstellung) bezüglich τ . Weiter sei für nicht-triviale C^* -Algebra \mathcal{A} die *Universelle Darstellung* definiert durch die direkte Summe aller $(H_\tau, \varphi_\tau)_{\tau \in \mathcal{S}(\mathcal{A})}$. \diamond

Beweis

Seien im folgenden a, b aus \mathcal{A} und $c + N_\tau$ aus \mathcal{A}/N_τ . Rechne nun zunächst die Homomorphismus Eigenschaften nach:

$$\begin{aligned}\varphi_\tau(a+b)(c+N_\tau) &= ac + bc + N_\tau = ac + N_\tau + bc + N_\tau \\ &= \varphi_\tau(a)(c+N_\tau) + \varphi_\tau(b)(c+N_\tau)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_\tau(ab)(c+N_\tau) &= \varphi_\tau(a)(bc+N_\tau) \\ &= \varphi_\tau(a)\varphi_\tau(b)(c+N_\tau)\end{aligned}$$

Zur Verträglichkeit mit der Involution betrachte:

$$\begin{aligned}(\varphi(a)(b+N_\tau), c+N_\tau) &= (ab+N_\tau, c+N_\tau) \\ &= \tau(c^*ab) \\ &= (b+N_\tau, a^*c+N_\tau) \\ &= (b+N_\tau, \varphi(a^*)(c+N_\tau))\end{aligned}$$

Damit folgt $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$. Damit sind die \star -Homomorphismus Eigenschaften für die Einschränkung auf \mathcal{A}/N_τ gezeigt. Für alle Elemente a aus $H_\tau \setminus (\mathcal{A}/N_\tau)$ betrachte Folgen die in der durch (2) induzierten Norm gegen c konvergieren und erhalte dadurch die Behauptungen. \square

(1.6) Satz

Sei \mathcal{A} eine \mathbb{C}^* -Algebra, dann ist die universelle Darstellung von \mathcal{A} treu. Insbesondere existiert eine treue Darstellung. \diamond

Beweis

Sei (H, φ) die universelle Darstellung von \mathcal{A} und sei a aus $\text{Kern}(\varphi)$. Dann gibt es ein positives, lineares Funktional τ aus $S(\mathcal{A})$ mit $\tau(a^*a) = \|a^*a\|_{\mathcal{A}}$. Sei nun $b = (a^*a)^{\frac{1}{4}}$, dann folgt:

$$\|a\|_{\mathcal{A}}^2 = \tau(a^*a) = \tau(b^4) = \|\varphi_\tau(b)(b+N_\tau)\|_{\mathcal{A}/N_\tau} = 0$$

denn $\varphi(a) = 0$, also ist $\varphi_\tau(a^*a) = 0 = \varphi_\tau(b^4)$ und damit auch $\varphi_\tau(b) = 0$. Insgesamt folgt $a = 0$ und damit die Behauptung. \square

§2 Anwendungen der GNS-Konstruktion

Im zweiten Abschnitt wird die GNS-Konstruktion verwendet, um die \mathbb{C}^* -Algebren Struktur von \mathcal{A} in eindeutiger Weise auf die Matrix-Algebra $M_n(\mathcal{A})$, also die Menge aller $n \times n$ -Matrizen mit Einträgen in \mathcal{A} zu übertragen.

(2.1) Definition

Sei \mathcal{A} eine \mathbb{C}^* -Algebra. $M_n(\mathcal{A}) = \{(a_{i,j})_{i,j} \mid a_{i,j} \in \mathcal{A}\}$ ist eine Algebra mit den üblichen Verknüpfungen (Addition komponentenweise, Matrix-Multiplikation). Mit der Involution $(a_{i,j})_{i,j}^* := (a_{j,i}^*)_{i,j}$ wird $M_n(\mathcal{A})$ zur \star -Algebra. \diamond

Ziel ist es jetzt eine Norm auf $M_n(\mathcal{A})$ zu finden, bezüglich der der Raum vollständig ist. Hierzu wird zunächst eine entsprechende Norm auf $M_n(B(H))$ für einen Hilbertraum H definiert und dann mittels (1.6) auf allgemeine \mathbb{C}^* -Algebren übertragen.

(2.2) Definition und Satz

Sei H ein Hilbertraum, $H^{(n)}$ die orthogonale Summe von n Kopien von H (das ist wieder ein Hilbertraum, vermöge $(x, y)_{H^{(n)}} = \sum_{i=1}^n (x_i, y_i)_H$). Für u aus $M_n(B(H))$ ist $\varphi(u)$ in $B(H^{(n)})$ vermöge

$$\varphi(u)(x_1, \dots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^n u_{1,j}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n u_{n,j}(x_j) \right)$$

für alle (x_1, \dots, x_n) aus $H^{(n)}$. Dann ist die Abbildung

$$\varphi : M_n(B(H)) \rightarrow B(H^{(n)}), u \mapsto \varphi(u)$$

ein \star -Isomorphismus. Mit diesem, sogenannten kanonischen \star -Isomorphismus, kann $M_n(B(H))$ mit $B(H^{(n)})$ identifiziert werden und man kann eine Norm auf $M_n(B(H))$ definieren. Sei u aus $M_n(B(H))$, dann ist $\|u\|_{M_n} = \|\varphi(u)\|_{B(H^{(n)})}$ eine Norm. Für diese Norm gelten dann folgende Ungleichungen:

$$\|u_{i,j}\|_{B(H^{(n)})} \leq \|u\|_{M_n} \leq \sum_{k,l=1}^n \|u_{k,l}\|_{B(H^{(n)})} \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (3) \quad \diamond$$

Beweis

Die Beschränktheit von $\varphi(u)$ folgt sofort aus der Beschränktheit der $u_{i,j}$, ebenso die Linearität, damit ist die Abbildung φ wohldefiniert. Zunächst werden die Homomorphieeigenschaften nachgerechnet. Sei dazu stets $u = (u_{i,j})_{i,j}$, $v = (v_{i,j})_{i,j}$ aus $M_n(B(H))$ und x_1, \dots, x_n aus H dann gilt für die Addition

$$\begin{aligned} \varphi(u+v)(x_1, \dots, x_n) &= \left(\sum_{j=1}^n (u+v)_{1,j}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n (u+v)_{n,j}(x_j) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n u_{1,j}(x_j) + \sum_{j=1}^n v_{1,j}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n u_{n,j}(x_j) + \sum_{j=1}^n v_{n,j}(x_j) \right) \\ &= \varphi(u)(x_1, \dots, x_n) + \varphi(v)(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Sowie für die Multiplikation

$$\begin{aligned} \varphi(uv)(x_1, \dots, x_n) &= \left(\sum_{j=1}^n (uv)_{1,j}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n (uv)_{n,j}(x_j) \right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n u_{1,k}v_{k,j} \right) (x_j), \dots, \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n u_{n,k}v_{k,j} \right) (x_j) \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n u_{1,k}v_{k,j} \right) (x_j), \dots, \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n u_{n,k}v_{k,j} \right) (x_j) \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n u_{1,k} \left(\sum_{j=1}^n v_{k,j} \right) (x_j), \dots, \sum_{k=1}^n u_{n,k} \left(\sum_{j=1}^n v_{k,j} \right) (x_j) \right) \\ &= \varphi(u) \left(\sum_{j=1}^n v_{1,j}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n v_{n,j}(x_j) \right) \\ &= \varphi(u)\varphi(v)(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Zur Verträglichkeit mit der Involution gilt:

$$\begin{aligned}
(\varphi(u)(x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n))_{H^{(n)}} &= \left(\left(\sum_{j=1}^n u_{1,j}(x_j), \dots, \sum_{j=1}^n u_{n,j}(x_j) \right), (y_1, \dots, y_n) \right)_{H^{(n)}} \\
&= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n u_{i,j}(x_j), y_i \right)_H \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (u_{i,j}(x_j), y_i)_H \\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (x_j, u_{i,j}^*(y_i))_H \\
&= \sum_{j=1}^n \left(x_j, \sum_{i=1}^n u_{i,j}^*(y_i) \right)_H \\
&= \left((x_1, \dots, x_n), \left(\sum_{i=1}^n u_{i,1}^*(y_i), \dots, \sum_{i=1}^n u_{i,n}^*(y_i) \right) \right)_{H^{(n)}} \\
&= ((x_1, \dots, x_n), \varphi(u^*)(y_1, \dots, y_n))_{H^{(n)}}
\end{aligned}$$

Zur Injektivität sei u in $M_n(B(H))$ mit $\varphi(u) = 0$. Dann folgt sofort

$$\sum_{j=1}^n u_{i,j}(x_j) = 0 \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in H^{(n)}, i \in \mathbb{N}$$

Dann müssen aber die $u_{i,j}$ schon alle 0 sein, also ist φ injektiv.

Für die Surjektivität sei nun v aus $B(H^{(n)})$ beliebig. Betrachte die Projektion

$$P_j : H^{(n)} \rightarrow H, (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_j$$

dann ist $P_j \circ v$ eine lineare Abbildung von $H^{(n)}$ nach H für alle $j = 1, \dots, n$. Setzt man nun

$$u_{i,j} : H \rightarrow H, x \mapsto P_i \circ v(0, \dots, \underbrace{x}_{j\text{ter Eintrag}}, \dots, 0)$$

so ist dies linear und beschränkt (für alle $i, j = 1 \dots, n$) und es folgt:

$$\sum_{j=1}^n u_{i,j}(x_j) = \sum_{j=1}^n P_i \circ v(0, \dots, \underbrace{x_j}_{j\text{ter Eintrag}}, \dots, 0) = P_i \circ v(x_1, \dots, x_n)$$

Damit ist für $u = (u_{i,j})_{i,j}$ schon die Gleichung $\varphi(u) = v$ erfüllt und damit folgt die Surjektivität.

Die Normeigenschaften von

$$\|\cdot\|_{M_n} : M_n(B(H)) \rightarrow \mathbb{R}^+$$

folgen sofort aus der Definition und der Linearität von φ . Für die erste Ungleichung gilt für i, j beliebig:

$$\begin{aligned} \sup_{\|x\|_H \leq 1} (u_{i,j}(x), u_{i,j}(x))_H &\leq \sup_{\|x\|_H \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (u_{i,j}(x), u_{i,j}(x))_H \right) \right) \\ &\leq \sup_{\|x\|_{H^{(n)}} \leq 1} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (u_{i,j}(x_j), u_{i,j}(x_j))_H \right) \right) \end{aligned}$$

Damit folgt $\|u_{i,j}\|_{B(H)} \leq \|u\|_{M_n}$.

Für die zweite Ungleichung gilt:

$$\begin{aligned} &\sup_{\|x\|_{H^{(n)}}} \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (u_{i,j}(x_j), u_{i,j}(x_j))_H \right) \right) \\ &\leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sup_{\|x\|_H \leq 1} (u_{i,j}(x), u_{i,j}(x))_H \right) \right) \end{aligned} \quad \square$$

Damit folgt auch $\|u\|_{M_n} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n \sup_{\|x\|_H \leq 1} (u_{i,j}(x), u_{i,j}(x))_H \right) \right)^{1/2}$.

(2.3) Korollar

Mit den Bezeichnungen aus (2.2) ist $M_n(B(H))$ eine \mathbf{C}^* -Algebra. ◇

Beweis

Offensichtlich gilt

$$\|x^*x\|_{M_n} = \|\varphi(x^*x)\|_{B(H^{(n)})} = \|\varphi(x)^*\varphi(x)\|_{B(H^{(n)})} = \|\varphi(x)\|_{B(H^{(n)})}^2 = \|x\|_{M_n}^2$$

also bleibt lediglich zu zeigen, dass $M_n(B(H))$ bezüglich der in (2.2) definierten Norm vollständig ist. Sei dazu $(u^k)_k$ eine Cauchy-Folge, das heißt $\|u^m - u^l\| \rightarrow 0$. Nach der ersten Ungleichung in (2.2) folgt dann, dass auch $(u_{i,j}^k)_k$ eine Cauchyfolge

ist (für alle i, j) und da $B(H)$ vollständig ist existiert $u = (u_{i,j})_{i,j}$ in $M_n(B(H))$, so dass $u_{i,j}^k \rightarrow u_{i,j}$ ($k \rightarrow \infty$) in der $B(H^{(n)})$ -Norm.

Mit der zweiten Ungleichung folgt nun:

$$\|u^k - u\|_{M_n} \leq \sum_{i,j=1}^n \|u_{i,j}^k - u_{i,j}\|_{B(H^{(n)})} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

□

Damit folgt die Vollständigkeit, also ist $M_n(B(H))$ eine C^* -Algebra.

(2.4) Satz

Sei \mathcal{A} eine C^* -Algebra, dann gibt es eine Norm bezüglich der $M_n(\mathcal{A})$ eine C^* -Algebra ist. ◇

Beweis

Sei (H, η) die universelle Darstellung von \mathcal{A} , dann ist

$$\tilde{\eta} : M_n(\mathcal{A}) \rightarrow M_n(B(H)), (a_{i,j})_{i,j} \mapsto (\eta(a_{i,j}))_{i,j}$$

ebenfalls eine injektive \star -Homomorphie, da η nach (1.6) injektiv und somit isometrisch ist. Definiere nun durch

$$\|\cdot\|_{M_n(\mathcal{A})} : M_n(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{R}^+, \|a\|_{M_n(\mathcal{A})} = \|\tilde{\eta}(a)\|_{M_n} \quad (4)$$

eine Norm auf $M_n(\mathcal{A})$. Die Normeigenschaften folgen unmittelbar aus der Injektivität und Linearität von $\tilde{\eta}$. Weiterhin gelten für a aus $M_n(\mathcal{A})$ und folgende Ungleichungen für (4)

$$\|a_{i,j}\|_{\mathcal{A}} \leq \|a\|_{M_n(\mathcal{A})} \leq \sum_{k,l=1}^n \|a_{k,l}\|_{\mathcal{A}} \quad \text{für alle } i, j \quad (5)$$

denn es gilt:

$$\|a\|_{M_n(\mathcal{A})} = \|\tilde{\eta}(a)\|_{M_n} \leq \sum_{k,l=1}^n \|(\tilde{\eta}(a))_{k,l}\|_{B(H)} = \sum_{k,l=1}^n \|(\eta(a_{k,l}))\|_{B(H)}$$

Da η eine Isometrie nach (1.6) ist, folgt die zweite Ungleichung und völlig analog:

$$\|a\|_{M_n(\mathcal{A})} = \|\tilde{\eta}(a)\|_{M_n} \geq \|(\tilde{\eta}(a))_{i,j}\|_{B(H)} = \|(\eta(a_{i,j}))\|_{B(H)} \quad \square$$

Ebenfalls völlig analog zu obigem zeigt man nun mit diesen Ungleichungen die Vollständigkeit von $M_n(\mathcal{A})$.

Als Abschluss kommt noch ein Satz, der mit Hilfe der GNS-Konstruktion eine Charakterisierung der positiven Elemente einer \mathbb{C}^* -Algebra liefert:

(2.5) Satz

Sei \mathcal{A} eine \mathbb{C}^* -Algebra und a aus \mathcal{A} selbstadjungiert. Dann ist a in \mathcal{A}^+ genau dann, wenn $\tau(a) \geq 0$ für alle positiven, linearen Funktionale τ von \mathcal{A} . \diamond

Beweis

Die Vorwärtsimplikation ist gerade die Definition der positiven, linearen Funktionale, für die Rückrichtung sei a aus \mathcal{A} und $\tau(a) \geq 0$ für alle positiven linearen Funktionale τ . Sei weiter (H, φ) die universelle Darstellung von \mathcal{A} und x aus H . Dann ist die Abbildung

$$\tau : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}, b \mapsto (\varphi(b)(x), x)_H \quad \square$$

ein positives, lineares Funktional auf \mathcal{A} , denn $b \mapsto \varphi(b)$ ist positiv. Nach Voraussetzung gilt damit $(\varphi(a)(x), x)_H \geq 0$. Da $\varphi(a)$ nach Konstruktion selbstadjungiert ist, und diese Ungleichung für alle x aus H gilt, ist $\varphi(a)$ aus $\varphi(\mathcal{A})^+$ und da φ eine Isometrie ist, folgt die Behauptung.