Der Satz von Gelfand-Naimark

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 6.11.2008

Till Dieckmann

Wesentlicher Gegenstand des Vortrages ist der Satz von Gelfand-Naimark und seine Konsequenzen.

§1 Der Satz von Wiener

In diesem Abschnitt wird der Satz von Wiener über absolut konvergente Fourierreihen mit Gelfand-Theorie bewiesen.

Da wir im Folgenden wiederholt topologische Lemmata benötigen, wiederholen wir sie an dieser Stelle.

(1.1) Lemma

a) Seien X, Y topologische Räume, X kompakt, sowie Y hausdorffsch. Ist $f : X \longrightarrow Y$ bijektiv und stetig, dann ist f bereits ein Homöomorphismus.

b) Sei X ein normaler Raum, sowie $A, B \subseteq X$ abgeschlossen und disjunkt. Dann existiert ein $f \in C(X)$ mit $f_{|A} = 0$ und $f_{|B} = 1$.

c) Jeder kompakte Hausdorffraum ist normal. $\diamond$

Beweis

a) Abgeschlossene Teilmengen von X sind kompakt und f bildet kompakte Mengen wieder auf kompakte, also abgeschlossene ab.

b) Siehe [Krieg] [Topologie] III 5.9.

c) Siehe [Krieg] [Topologie] V 2.3. $\square$

(1.2) Bemerkung

a) Eine Menge $I \neq \emptyset$ heißt gerichtet, wenn auf ihr eine Relation $\triangleleft$ existiert, welche reflexiv und transitiv ist, sowie zusätzlich

$$\forall i, j \in I \ \exists k \in I : (i \triangleleft k) \wedge (j \triangleleft k)$$

erfüllt. Das Paar $(I, \triangleleft)$ heisst dann gerichtete Menge.

b) Sei X ein topologischer Raum und $x \in X$. Ein gegen x konvergentes Netz auf X ist eine durch eine gerichtete Menge $(I, \triangleleft)$ indizierte Menge $(x_i)_{i \in I} \subset X$ mit der Eigenschaft

$$\forall U \in \mathcal{U}(x) \ \exists i_0 \in I \ \forall i_0 \triangleleft i \Rightarrow x_i \in U.$$

In diesem Fall schreibt man $x_i \rightarrow x$.

c) Seien X, Y topologische Räume und $x \in X$, sowie $f : X \to Y$ eine Abbildung. f ist genau dann stetig in x, wenn für jedes Netz $(x_i)_{i \in I}$ aus $x_i \to x$ bereits $f(x_i) \to f(x)$ folgt. $\diamond$

Beweis
c) Ohne Beweis. $\square$

Als erstes wollen wir den Beweis des Wiener'schen Lemmas für trigonometrische Reihen vorbereiten.

(1.3) Beispiel (Folgenalgebra l_1)
Wir betrachten den aus der Funktionalanalysis bekannten Folgenraum

$$l_1(\mathbb{Z}^n) = \{c = (c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n} \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}^n} : \|c\|_1 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} |c_m| < \infty\}.$$

Zu $c, d \in l_1(\mathbb{Z}^n)$ definiert man ihre Faltung $c * d$ durch

$$(c * d)_m = \sum_{i,j \in \mathbb{Z}^n, i+j=m} c_i d_j \text{ für } m \in \mathbb{Z}^n.$$

$\diamond$

Es gilt $c * d \in l_1(\mathbb{Z}^n)$, und $l_1(\mathbb{Z}^n)$, versehen mit dem Faltungsprodukt, ist eine Banachalgebra.

Beweis
Ohne Beweis. $\square$

(1.4) Definition
Sei $\mathcal{W}_n \subseteq C(\mathbb{R}^n)$ die $\mathbb{C}$-Algebra aller Funktionen der Form

$$x \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} a_m e^{imx},$$

für die $\|f\| := \|(a_m)_{m \in \mathbb{Z}^n}\|_1 < \infty$. Die Algebra $(\mathcal{W}_n, \|\cdot\|)$ heißt Wiener-Algebra. $\diamond$

Die Eindeutigkeit der Fourierentwicklung impliziert sofort die folgende

(1.5) Bemerkung
$\mathcal{W}_n$ ist isometrisch isomorph zu $l_1(\mathbb{Z}^n)$ durch

$$\theta : l_1(\mathbb{Z}^n) \longrightarrow \mathcal{W}_n, \quad (c_m)_{m \in \mathbb{Z}^n} \mapsto \left(x \mapsto \sum_{m \in \mathbb{Z}^n} c_m e^{imx} \right).$$

Inbesondere ist $\mathcal{W}_n$ eine Banachalgebra. $\diamond$

Im Folgenden arbeiten wir auf eine Identifizierung von $\sigma(\mathcal{W}_n)$ als n-dimensionaler Torus $\mathbb{T}^n = \{(z_1, \ldots, z_n) : |z_i| = 1 \text{ für } 1 \leq i \leq n\}$ hin.

(1.6) Satz
Die Abbildung
$$[0, 2\pi)^n \longrightarrow \sigma(\mathcal{W}_n), \quad x \mapsto h_x$$
ist stetig und bijektiv. Hierbei bezeichnet h_x das Auswertungsfunktional an der Stelle x. ◇

Beweis
Für $r \in \{1, \ldots, n\}$ definieren wir $g_r \in \mathcal{W}_n$ durch $g_r(x_1, \ldots, x_n) = e^{ix_r}$. Nach Konstruktion ist dann auch $1/g_r \in \mathcal{W}_n$ sowie $\|g_r\| = \|1/g_r\| = 1$. Nach [F] 1.10 c) gilt für $\omega \in \sigma(\mathcal{W}_n)$ nun $|\omega(g_r)| \leq 1$, sowie $1/|\omega(g_r)| = |\omega(1/g_r)| \leq 1$ und somit $\omega(g_r) \in \mathbb{T}$. Deshalb existiert ein eindeutiges $y_r \in [0, 2\pi)$ mit $\omega(g_r) = \exp(iy_r)$. Setzt man $y = (y_1, \ldots, y_n)$, so ergibt sich $\omega(g_r) = g_r(y) = h_y(g_r)$ für $1 \leq r \leq n$. Da $\mathcal{W}_n$ als Banachalgebra (nach Definition ihrer Norm) von $\{g_r, 1/g_r : 1 \leq r \leq n\}$ erzeugt wird, ergibt sich wegen der Stetigkeit und der Multiplikativität von ω dann auch $\omega = h_y$ auf ganz $\mathcal{W}_n$.

(1.7) Bemerkung
Die Abbildung $x \mapsto e^{ix} := (e^{ix_1}, \ldots, e^{ix_n})$ bildet $[0, 2\pi)^n$ bekanntlich bijektiv auf $\mathbb{T}^n$ ab. Fasst man via der Abbildung $\mathcal{W}_n \subseteq C(\mathbb{T}^n)$ auf, so ist $\mathbb{T}^n \longrightarrow \sigma(\mathcal{W}_n), z \mapsto h_z$ nach 1.1 a) sogar topologisch. ◇

(1.8) Satz (Wiener)
Ist $f \in \mathcal{W}_n$ mit $f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, dann ist auch $1/f \in \mathcal{W}_n$. ◇

Beweis
Nach 1.6 gilt $\sigma(\mathcal{W}_n) = \{h_x, x \in \mathbb{R}^n\}$, und nach Voraussetzung $\widehat{f}(h_x) = h_x(f) = f(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$. Mit dem Satz von Gelfand [F] 1.13 b) folgt dann, dass f eine Einheit in $\mathcal{W}_n$ ist.

Als nächstes charakterisieren wir das Spektrum von Funktionenalgebren kompakter Hausdorffräume.

(1.9) Satz
Sei X ein kompakter Hausdorffraum. Für $x \in X$ sei $h_x \in \sigma(C(X))$ definiert durch $h_x(f) = f(x)$ für $f \in C(X)$. Dann ist die Abbildung $x \mapsto h_x$ ein Homöomorphismus von X auf $\sigma(C(X))$. ◇

Beweis
Für $x \in X$ ist h_x definitionsgemäß ein multiplikatives Funktional auf $C(X)$. Sei nun $(x_i)_{i \in I} \subseteq X$ ein gegen x konvergentes Netz. Für beliebiges $f \in C(X)$ hat man somit

$$h_{x_i}(f) = f(x_i) \to f(x) = h_x(f)$$

aus der Stetigkeit. Folglich konvergiert $(h_{x_i})_{i \in I}$ schwach-* gegen h_x. Die Abbildung $x \mapsto h_x$ ist also stetig. Zu $x, y \in X$ mit $x \neq y$ wähle nun gemäß 1.1 b) ein $f \in C(X)$ mit $f(x) = 0$ und $f(y) = 1$. Es folgt $h_x(f) \neq h_y(f)$ und somit die Injektivität. Zu $x \in X$ setzen wir $M_x = \ker h_x = \{f \in C(X) : f(x) = 0\}$. Wir zeigen als nächstes $\operatorname{Max} C(X) = \{M_x : x \in X\}$. Als Kerne von nichttrivialen Funktionalen sind alle M_x maximal. Um die Gleichheit zu beweisen, genügt es für beliebiges maximales $I \trianglelefteq C(X)$ ein $x \in X$ zu finden mit $I \subseteq M_x$, also $I = M_x$ aus der Maximalität. Man nehme das Gegenteil an, also die Existenz einen maximalen Ideals I mit $I \nsubseteq M_x$ für alle $x \in X$. Es existiert also eine Familie $(f_x)_{x \in X} \subseteq I$ mit $h_x(f_x) = f_x(x) \neq 0$ für $x \in X$. Das System der Mengen $U_x := f_x^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ ist also eine offene Überdeckung von X, aus der man wegen der Kompaktheit von X eine endliche Teilüberdeckung $U_j = f_j^{-1}(\mathbb{C}^\times)$ mit $j = 1, \ldots, n$ erhält. Nun impliziert $X = \bigcup_{j=1}^n U_j$ sofort

$$\emptyset = \bigcap_{j=1}^n X \setminus U_j = \bigcap_{j=1}^n f_j^{-1}(0),$$

das heisst $f_1, \ldots, f_n$ haben keine gemeinsame Nullstelle. Wir setzen

$$g = \sum_{j=1}^n |f_j|^2 = \sum_{j=1}^n \overline{f_j} f_j \in I$$

Nun ist also $g > 0$ auf X, und somit g eine Einheit in $C(X)$. Dies impliziert bereits $I = C(X)$ im Widerspruch zur Maximalität von I, und es folgt die Behauptung.
Sei nun also $h \in \sigma(C(X))$. Da $\ker h$ ein maximales Ideal ist, existiert somit ein $x \in X$ mit $\ker h = \ker h_x$, also $h = h_x$. Nach Lemma 1.1 a) bildet $x \mapsto h_x$ also X homöomorph auf $\sigma(C(X))$ ab. □

(1.10) Bemerkung
Durch die Identifikation $x \leftrightarrow h_x$ wie in Satz 1.9 kann man wegen $\widehat{f}(h_x) = h_x(f) = f(x)$ für alle $f \in C(X)$ die Gelfand-Transformation $\Gamma_{C(X)}$ mit $id_{C(X)}$ identifizieren. ⋄

Diese Charakterisierung liefert noch ein weiteres interessantes

(1.11) Korollar
Für kompakte Hausdorffräume X, Y sind $C(X)$ und $C(Y)$ genau dann als C^*-Algebren isomorph, wenn X und Y homöomorph sind ⋄

Beweis
Ist $f : X \longrightarrow Y$ ein Homöomorphismus, so definiert ${}^{tr}f^{-1} : g \mapsto g \circ f^{-1}$ einen $*$-Isomorphismus $C(X) \longrightarrow C(Y)$. Umgekehrt induziert ein *-Isomorphismus $\theta : C(X) \longrightarrow C(Y)$ einen Homöomorphismus ${}^{tr}\theta^{-1} : h \mapsto h \circ \theta^{-1}$ von $\sigma(C(X))$ nach $\sigma(C(Y))$. Nach Satz 1.9 sind also X und Y homöomorph. □

§2 Halbeinfache Banach-Algebren

(2.1) Definition (Radikal/Halbeinfach)
Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitäre Banachalgebra und Γ ihre Gelfand-Transformation. Dann nennt man $\ker \Gamma$ das Radikal von $\mathcal{A}$, welches mit $\operatorname{rad} \mathcal{A}$ bezeichnet wird. $\mathcal{A}$ heißt halbeinfach, falls $\operatorname{rad} \mathcal{A} = \{0\}$, wenn also Γ injektiv ist. ◇

(2.2) Bemerkung
Da die maximalen Ideale einer unitären kommutativen Banachalgebra nach [F] 1.1 gerade die Kerne ihrer Charaktere sind, stimmt Definition 2.1 mit der aus der Algebra bekannten überein, denn in diesem Fall ist $\ker \Gamma = \bigcap \operatorname{Max} \mathcal{A}$. ◇

Mit dem Satz vom abgeschlossenen Graphen kann man einige interessante Aussagen über Homomorphismen in halbeinfache Banachalgebren treffen:

(2.3) Satz
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ kommutative unitäre Banachalgebren, wobei $\mathcal{A}$ zusätzlich als halbeinfach vorausgesetzt sei. Dann ist jeder Homomorphismus $\psi : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{A}$ stetig. ◇

Beweis
Sei $x \in \mathcal{B}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_n \to x$ und $\psi(x_n) \to y$ in $\mathcal{A}$. Sei nun $h \in \sigma(\mathcal{A})$ und $\phi := h \circ \psi$. Mit h und ψ ist auch ϕ multiplikativ, also nach [F] 1.10 c) auch stetig. Es ergibt sich

$$h(y) = \lim_{n\to\infty} h(\psi(x_n)) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x) = h(\psi(x)).$$

Da h beliebig war, folgt $y - \psi(x) \in \ker \Gamma_{\mathcal{A}} = \{0\}$, also $y = \psi(x)$. Nach dem Satz vom abgeschlossenen Graphen ist ψ also stetig. □

(2.4) Korollar
Jeder Isomorphismus von halbeinfachen Banachalgebren ist bereits ein Homöomorphismus. ◇

Da dies insbesondere für Automorphismen halbeinfacher Banachalgebren gilt, ist deren topologische Struktur bereits durch die algebraische festgelegt.

(2.5) Satz
Sei $\mathcal{A}$ eine halbeinfache *-Algebra. Dann ist $x \mapsto x^*$ stetig.

Beweis
Sei $h \in \sigma(\mathcal{A})$, und $\phi : x \mapsto \overline{h(x^*)}$. Dann ist auch ϕ ein Charakter von $\mathcal{A}$. Sei nun $x \in \mathcal{A}$ und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n \to x$ und $x_n^* \to y$. Nun hat man

$$\overline{h(x^*)} = \phi(x) = \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \lim_{n\to\infty} \overline{h(x_n^*)} = \overline{h(y)}.$$

Wieder schliesst man $x^* - y \in \ker\Gamma = \{0\}$, also $x^* = y$. Nach dem Satz vom abgeschlossen Graphen ist $x \mapsto x^*$ stetig. □

§3 Der Satz von Gelfand-Naimark

(3.1) Lemma
Sei $\mathcal{A}$ eine unitäre C^*-Algebra und $x \in \mathcal{A}$ normal. Dann gilt $\|x\| = \rho(x)$. ◇

Beweis
Wegen der C^*-Eigenschaft hat man

$$\|x^2\|^2 = \|(x^2)^* x^2\| = \|(x^*x)^2\| = \|(x^*x)^* x^* x\| = \|x^*x\|^2 = \|x\|^4.$$

Somit gilt $\|x^2\| = \|x\|^2$. Induktiv erhält man daraus $\|x^{2^k}\| = \|x\|^{2^k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also

$$\rho(x) = \lim_{k\to\infty} \|x^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim_{k\to\infty} \|x\| = \|x\|.$$

□

(3.2) Satz (Gelfand-Naimark)
Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative, unitäre C^*-Algebra. Dann ist die Gelfand-Transformation Γ ein isometrischer $*$-Isomorphismus. ◇

Beweis
Da $\mathcal{A}$ kommutativ ist, ist jedes Element normal. Nach 3.1 gilt also $\|\Gamma x\|_\infty = \rho(x) = \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{A}$, also ist Γ isometrisch, und nach [1] 1.14 c) ist $\Gamma(\mathcal{A})$ dicht in $C(\sigma(\mathcal{A}))$. Da das isometrische Bild von $\mathcal{A}$ wieder vollständig und somit abgeschlossen ist, folgt $\Gamma(\mathcal{A}) = C(\sigma(\mathcal{A}))$. Als C^*-Algebra ist $\mathcal{A}$ nach [1] 1.14 b) symmetrisch, das bedeutet Γ ist ein *-Isomorphismus. □

(3.3) Definition
Sei $\mathcal{A} = (\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ eine Banach-Algebra. Für $M \subseteq \mathcal{A}$ definieren wir

$$\mathcal{A}(M) := \overline{\mathbb{C}[M]}^{\|\cdot\|}, \qquad \diamond$$

das heisst $\mathcal{A}(M)$ ist der $\|\cdot\|$ -Abschluss der von M erzeugten Unteralgebra von $\mathcal{A}$.

(3.4) Korollar
Sei $\mathcal{A}$ eine unitäre C^*-Algebra. Dann ist die C^*-Norm auf $\mathcal{A}$ eindeutig. $\diamond$

Beweis
Sei $\|\cdot\|_1$ eine weitere Norm, welche $\mathcal{A}$ zur C^*-Algebra macht. Zu $x \in \mathcal{A}$ sei $y := xx^*$ und $\mathcal{C} := \mathcal{A}(e, y)$. Wegen der Selbstadjungiertheit von y ist $\mathcal{C}$ eine unitäre kommutative C^*-Algebra. Wir können also den Satz von Gelfand-Naimark sowohl auf $(\mathcal{C}, \|\cdot\|_1)$ als auch auf $(\mathcal{C}, \|\cdot\|)$ anwenden und erhalten

$$\|x\|_1^2 = \|y\|_1 = \|\Gamma_{\mathcal{C}}^{\|\cdot\|_1} y\|_\infty = \rho_{\mathcal{C}}(y) = \|\Gamma_{\mathcal{C}}^{\|\cdot\|} y\|_\infty = \|y\| = \|x\|^2,$$

da der Spektralradius normunabhängig ist. $\square$

Ohne Beweis verwenden wir folgenden

(3.5) Satz
Sei $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra, und $\mathcal{M}$ ein abgeschlossenes Ideal in $\mathcal{A}$. Versehen mit der Quotientennorm wird $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ eine C^*-Algebra. Ist $\mathcal{A}$ unitär, dann auch $\mathcal{A}/\mathcal{M}$. $\diamond$

Als nächstes Stellen wir eine Beziehung zwischen Idealen und Teilmengen des Spektrums her:

(3.6) Satz
Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative unitäre C^*-Algebra. Dann definiert die Beziehung

$$\mathcal{M} \mapsto \Gamma_{\mathcal{M}} := \{\omega \in \sigma(\mathcal{A}) : \omega_{|\mathcal{M}} = 0\},$$
$$\Gamma \mapsto \mathcal{M}_\Gamma := \{x \in \mathcal{A} : \widehat{x}_{|\Gamma} = 0\}.$$

eine inklusionsumkehrende Bijektion zwischen den abgeschlossenen Idealen $\mathcal{M}$ von $\mathcal{A}$ und den abgeschlossenen Teilmengen Γ von $\sigma(\mathcal{A})$. $\diamond$

Beweis
Als Schnitt von Kernen stetiger Homomorphismen ist $\mathcal{M}_\Gamma$ sicherlich abgeschlossen. Ebenso ist nach Definition auch $\Gamma_\mathcal{M}$ schwach-*-abgeschlossen, also abgeschlossen in $\sigma(\mathcal{A})$. Aus der Definition ersichtlich sind bereits die beiden Inklusionen $\mathcal{M}_{\Gamma_\mathcal{M}} \subseteq \mathcal{M}_\Gamma$ sowie $\Gamma \subseteq \Gamma_{\mathcal{M}_\Gamma}$. Sei $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$ die kanonische Surjektion, und $x_0 \notin \mathcal{M}$, also $\pi(x_0) \neq 0$. Nach 3.2 ist $\widehat{\pi(x_0)} \neq 0$ in $C(\sigma(\mathcal{A}/\mathcal{M}))$. Es existiert somit $\omega' \in \sigma(\mathcal{A}/\mathcal{M})$ mit $\widehat{\pi(x_0)}(\omega') = \omega'(\pi(x_0)) \neq 0$. Der Charakter $\omega := \omega' \circ \pi$ von $\mathcal{A}$ erfüllt dann $\omega(x_0) \neq 0$, sowie $\omega_{|\mathcal{M}} = 0$. Also ist $\omega \in \Gamma_\mathcal{M}$ nach Definition, und somit $x_0 \notin \mathcal{M}_{\Gamma_\mathcal{M}}$. Das zeigt die umgekehrte Inklusion. Sei also nun $\omega_0 \in \Gamma^c$. Da $\sigma(\mathcal{A})$ kompakt und hausdorffsch ist, gibt es somit nach dem Urysohn'schen Lemma 1.1 b) eine stetige Funktion f auf $\sigma(\mathcal{A})$ mit $f_{|\Gamma} = 0$ und $f(w_0) = 1$. Wieder nach 3.2 hat man nun $\widehat{x} = f$ für ein $x \in \mathcal{A}$, und folglich $\omega(x) = f(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Gamma$. Man schliesst $x \in \mathcal{M}_\Gamma$, aber $\omega_0(x) \neq 0$ und somit $\omega_0 \notin \Gamma_{\mathcal{M}_\Gamma}$.

(3.7) Satz
Sei $\mathcal{A}$ eine unitäre, kommutative C^*-Algebra und $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$ ein abgeschlossenes Ideal. Bezeichnet $\pi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$ die kanonische Surjektion, dann ist die Abbildung

$$^{tr}\pi : \sigma(\mathcal{A}/\mathcal{M}) \longrightarrow \Gamma_\mathcal{M}, \quad h \mapsto h \circ \pi \qquad \diamond$$

ein Homöomorphismus.

Beweis
Für $h \in \sigma(\mathcal{A}/\mathcal{M})$ ist $^{tr}\pi(h) = h \circ \pi$ ein Charakter von $\mathcal{A}$ mit $^{tr}\pi(h) \in \Gamma_\mathcal{M}$ nach Definition. Jedes $\omega \in \Gamma_\mathcal{M}$ faktorisiert wegen $\mathcal{M} \subseteq \ker(\omega)$ über $\mathcal{M}$ in $^{tr}\pi(\overline{\omega}) = \overline{\omega} \circ \pi = \omega$ mit $\overline{\omega} \in \sigma(\mathcal{A}/\mathcal{M})$. Also ist $^{tr}\pi$ surjektiv, und nach Definition auch isometrisch, inbesondere injektiv. Wegen der Stetigkeit bildet es nach 1.1 a) sogar homöomorph ab.

§4 Spektren

Wir betrachten im Folgenden Spektren in unitären (nicht notwendig kommutativen) Banachalgebren.

(4.1) Definition
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ eine unitäre Banachalgebren mit $e = e_\mathcal{A} \in \mathcal{B}$. Für $x \in \mathcal{B}$ definiert man

$$\sigma_\mathcal{B}(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda e - x \text{ ist nicht invertierbar in B }\}. \qquad \diamond$$

Offensichtlich gilt stets $\sigma_{\mathcal{A}}(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ für $x \in \mathcal{B}$. Hauptergebnis dieses Abschnittes wird es sein, dass für C*-Algebren sogar die Gleichheit gilt.

(4.2) Lemma
Sei $\mathcal{A}$ eine unitäre Banachalgebra und $x_0 \in \mathcal{A}$ ein Randpunkt der Menge der Einheiten in $\mathcal{A}$. Ist $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge invertierbarer Elemente mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, so folgt $\lim_{n\to\infty} \|x_n^{-1}\| = \infty$. $\diamond$

Beweis
Wir nehmen an, die Behauptung ist falsch. Dann existiert $C \in \mathbb{R}_{>0}$, so dass es für alle $k \in \mathbb{N}$ ein $n_k \in \mathbb{N}$ gibt, mit $\|x_{n_k}^{-1}\| \leq C$. Wir können also ohne Einschränkung $\|x_n^{-1}\| \leq C$ für alle $n \in \mathbb{N}$ annehmen. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x_0 konvergiert, existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\|x_N - x_0\| \leq C^{-1}$. Nach [F] 1.4 b) ist somit $x_0 = x_N - (x_N - x_0)$ invertierbar. Da die Menge der Einheiten nach [F] 1.4 d) offen ist, widerspricht dies der Annahme, x_0 sei ein Randpunkt. $\square$

(4.3) Lemma
Sei $\mathcal{A}$ eine unitäre Banach-Algebra, und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine Banach-Algebra mit $e \in \mathcal{B}$. Ist $x \in \mathcal{B}$ und liegt $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ nirgends dicht in $\mathbb{C}$, dann gilt $\sigma_{\mathcal{A}}(x) = \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. $\diamond$

Beweis
Sei $\lambda_0 \in \sigma_{\mathcal{B}}(x)$. Nach Annahme liegt $\mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ dicht in $\mathbb{C}$. Somit existiert eine Folge $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{C} \setminus \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ mit $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \lambda_0$. Es folgt $\lim_{n\to\infty} \lambda_n e - x = \lambda_0 e - x =: x_0$. Nach Annahme ist x_0 nicht invertierbar in $\mathcal{B}$, und insgesamt ist x_0 ein Randpunkt der Einheiten in $\mathcal{B}$. Mit vorigem Lemma hat man $\lim_{n\to\infty} \|(\lambda_n e - x)^{-1}\| = \infty$, und wegen der Stetigkeit von $y \mapsto y^{-1}$ ist x_0 auch nicht in A invertierbar, das bedeutet $\lambda_0 \in \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. $\square$

(4.4) Satz
Sei $\mathcal{A}$ eine unitäre C^*-Algebra und $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ eine C^*-Unteralgebra mit $e = e_{\mathcal{A}} \in \mathcal{B}$. Für $x \in \mathcal{B}$ gelten dann folgende Aussagen

a) Ist x invertierbar in $\mathcal{A}$, dann auch in $\mathcal{B}$.

b) Es gilt $\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$. $\diamond$

Beweis

a) Wir setzen $y = x^*x \in \mathcal{B}$ und $\mathcal{C} := \mathcal{A}(e, y)$. Man hat also wegen der Abgeschlossenheit von $\mathcal{B}$ die Inklusionskette $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$. Da mit x auch y invertierbar ist, schliesst man somit $0 \notin \sigma_{\mathcal{A}}(y)$. Wegen der Selbstadjungiertheit von y ist $\mathcal{C}$ eine kommutative unitäre C*-Algebra mit $\sigma_{\mathcal{C}}(y) \subseteq \mathbb{R}$. Da $\mathbb{R}$ nirgends dicht in

$\mathbb{C}$ liegt, kann man Lemma 4.3 anwenden und erhält $\sigma_{\mathcal{C}}(x) = \sigma_{\mathcal{A}}(x)$, und somit auch $0 \notin \sigma_{\mathcal{C}}(x)$. Das bedeutet aber, dass y eine Einheit in $\mathcal{C}$ ist, und somit auch in $\mathcal{B}$. Wegen $x^* \in \mathcal{B}$ ist dann $x^{-1} = y^{-1}x^* \in \mathcal{B}$.

b) Nach a) ist $y \in \mathcal{B}$ genau dann invertierbar, wenn $y \in \mathcal{A}$ invertierbar ist. Mit $y = \lambda e - x$ folgt nun der Gleichheit der Spektren. □

Wir zeigen als nächstes, dass *-Homomorphismen in C^*-Algebren normbeschränkt sind.

(4.5) Satz
Seien $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ unitäre *-Algebren, wobei $\mathcal{B}$ die C^*-Eigenschaft habe. Ist $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein *-Homomorphismus, dann gilt $\|\phi(x)\| \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{A}$. ◇

Beweis
Sei $y \in \mathcal{A}$ mit $y = y^*$. Wir nehmen ohne Einschränkung an, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kommutativ sind, da wir sonst zu $\mathcal{A}(e, y)$ und $\mathcal{B}(e, \phi(y))$ übergehen können. Aus der Multiplikativität von ϕ schliesst man, dass mit $\lambda e - y$ auch $\lambda e - \phi(y)$ invertierbar ist. Also gilt $\sigma_{\mathcal{B}}(\phi(y)) \subseteq \sigma_{\mathcal{A}}(y)$, und somit

$$\|\Gamma_{\mathcal{B}}\phi(y)\|_\infty = \rho_{\mathcal{B}}(\phi(y)) \leq \rho_{\mathcal{A}}(y) = \|\Gamma_{\mathcal{A}}y\| \leq \|y\|.$$

Für $x \in \mathcal{A}$ erhält man aus der C^*-Eigenschaft von $\mathcal{B}$ schliesslich

$$\|\phi(x)\|^2 = \|\phi(x)\phi(x)^*\| = \|\phi(x^*x)\| = \|\Gamma_{\mathcal{B}}\phi(x^*x)\|_\infty \leq \|x^*x\|\|x\|^2.$$ □

(4.6) Satz
Sei $\mathcal{A}$ eine unitäre C^*-Algebra, $\mathcal{B}$ eine unitäre *-Algebra sowie $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ ein injektiver $*$-Homomorphismus. Dann ist $\|\phi(x)\| \geq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{A}$. ◇

Beweis
Zu $x \in \mathcal{A}$ setze $h := xx^*$ und $k := \phi(h)$. Da wir gegebenenfalls zu der jeweils von h beziehungsweise k erzeugten kommutativen unitären C^*- beziehungsweise *-Algebren übergehen können, nehmen wir direkt an, dass $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ kommutativ sind. Das Bild $\Omega :=^{tr} \phi(\sigma(\mathcal{B})) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$ unter der stetigen Abbildung

$$^{tr}\phi : \sigma(\mathcal{B}) \longrightarrow \sigma(\mathcal{A}), \quad h \mapsto h \circ \phi$$

ist wegen der Kompaktheit von $\sigma(\mathcal{B})$ auch kompakt, also insbesondere abgeschlossen. Wir nehmen an, dass $^{tr}\phi$ nicht surjektiv ist, das heisst es existiert $\omega_0 \notin \Omega$. Zu ω_0 beziehungsweise Ω gibt es dann disjunkte Umgebungen $U_0 \ni \omega_0$ und $U \supseteq \Omega$, sowie auf $\sigma(\mathcal{A})$ stetige Funktionen f, g mit $f_{|\Omega} = 1$ und$f_{|U^c} = 0$, sowie $g(\omega_0) = 1$

und $g_{|U_0^c} = 0$. Nach Gelfand-Naimark existieren also $a, b \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ mit $\widehat{a} = f$ und $\widehat{b} = g$. Man hat also $\widehat{ab} = \widehat{a}\widehat{b} = fg = 0$ nach Konstruktion von f und g und wegen der Injektivität von $\Gamma_{\mathcal{A}}$ also $ab = 0$. Es folgt $\phi(a)\phi(b) = 0$, sowie $\omega(\phi(a)) =^{tr} \phi(\omega)(a) = \widehat{a}(\phi^{tr}(\omega)) = f(\phi^{tr}(\omega)) = 1$ für alle $\omega \in \sigma(\mathcal{B})$ nach Konstruktion. Nach dem Satz von Gelfand ist $\phi(a)$ also eine Einheit in $\mathcal{B}$. Dies widerspricht $\phi(a)\phi(b) = 0$, wegen $\phi(b) \neq 0$ aus der Injektivität von ϕ. Dies zeigt die Surjektivität. Damit erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
\|k\| &\geq \|\widehat{k}\|_\infty \\
&= \sup_{\omega \in \sigma(\mathcal{B})} |\omega(k)| \\
&= \sup_{\omega \in \sigma(\mathcal{B})} |(\omega \circ \phi)(h)| \\
&= \sup_{\omega \in \sigma(\mathcal{A})} |\omega(h)| \\
&= \|\widehat{h}\|_\infty \\
&= \|h\|.
\end{aligned}$$

Aus der C^*-Eigenschaft von $\mathcal{A}$ schliesst man somit

$$\|x\|^2 = \|xx^*\| \leq \|\phi(xx^*)\| = \|\phi(x)\phi(x)^*\| \leq \|\phi(x)\|^2$$

für alle $x \in \mathcal{A}$. □

(4.7) Korollar
Jeder *-Monomorphismus zwischen unitären C^*-Algebren ist isometrisch. ◇