
Der Satz von Gelfand

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 23.10.2008

Cornelia Wirtz

In diesem Vortrag werden wir uns mit dem *Spektrum* (oder auch dem *maximalen Idealraum* oder *Strukturraum* genannt) einer kommutativen Banachalgebra mit Eins beschäftigen, einem wichtigen Werkzeug, welches zuerst systematisch von Gelfand und seinen Koautoren ausgenutzt wurde. Ziel dieses Vortrages ist es, die Gelfand-Transformation einzuführen und mit Hilfe dieser Transformation einen Zusammenhang zwischen oben genannten Spektrum und dem Spektrum eines Elements darzustellen. Desweiteren soll in diesem Vortrag der Satz von Gelfand bewiesen und der Satz von Gelfand-Naimark vorbereitet werden.

§1 Spektrum einer kommutativen Banachalgebra mit Eins

Im ersten Paragraphen werden wir zunächst den Begriff des Spektrums für eine Banachalgebra mit Eins einführen und daraus direkte Folgerungen herleiten.

— *Definition* —

(1.1) Definition

Sei \mathcal{A} eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Mit einem multiplikativen Funktional auf \mathcal{A} bezeichnen wir einen nicht verschwindenden, stetigen Algebren-Homomorphismus von \mathcal{A} nach \mathbb{C} . Die Menge aller multiplikativen Funktionale auf \mathcal{A} wird *Spektrum von \mathcal{A}* genannt und mit $\sigma(\mathcal{A})$ bezeichnet. \diamond

Den Zusammenhang zwischen dem oben genannten Spektrum und dem bereits im ersten Vortrag kennengelernten Spektrum eines Elements, werden wir im Verlauf des Vortrages klären. Zunächst wollen wir aber einige direkte Folgerungen aus der obigen Definition herleiten.

— Erste Folgerungen —

(1.2) Proposition

Sei \mathcal{A} eine kommutative Banachalgebra mit Eins und $h \in \sigma(\mathcal{A})$. Dann gilt

- a) $h(e) = 1$.
- b) Falls x in \mathcal{A} invertierbar ist, dann gilt $h(x) \neq 0$.
- c) $|h(x)| \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{A}$. ◇

Beweis

- a) Da $h \neq 0$ nach Definition von $\sigma(\mathcal{A})$, existiert ein $x \in \mathcal{A}$ mit $h(x) \neq 0$. Dann gilt, da e das Einselement in \mathcal{A} ist und h multiplikativ, dass

$$0 \neq h(x) = h(xe) = h(x)h(e),$$

also $h(e) = 1$.

- b) Sei x in \mathcal{A} invertierbar. Dann existiert ein $x^{-1} \in \mathcal{A}$ mit $xx^{-1} = x^{-1}x = e$. Aufgrund der Multiplikativität von h erhält man

$$1 = h(e) = h(xx^{-1}) = h(x)h(x^{-1}).$$

Da \mathbb{C} ein Integritätsbereich ist, folgt dass $h(x) \neq 0$ sein muss.

- c) Angenommen es existiert ein $x \in \mathcal{A}$ mit $|h(x)| > \|x\|$. Nach [1, (1.4)(a)] gilt dann aber, dass $h(x)e - x$ invertierbar ist. Nach Teil (b) ist dann aber $h(h(x)e - x) \neq 0$ und damit folgt

$$0 \neq h(h(x)e) - h(x) = h(x) \underbrace{h(e)}_{=1} - h(x) = h(x) - h(x) = 0,$$

wegen der Linearität von h , was jedoch einen Widerspruch darstellt und somit gilt $|h(x)| \leq \|x\|$ für alle $x \in \mathcal{A}$. □

Der Teil (c) von Proposition (1.2) besagt, dass $\sigma(\mathcal{A})$ eine Teilmenge der abgeschlossenen Einheitskugel B von \mathcal{A}^* ist, denn für alle $h \in \sigma(\mathcal{A})$ gilt

$$\|h\| = \sup_{\|x\|=1} |h(x)| \stackrel{(c)}{\leq} \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

Ausgestattet mit der von \mathcal{A}^* induzierten schwach* Topologie, wird dann $\sigma(\mathcal{A})$ zu einem topologischen Raum. Nach (1.2)(a) gilt für einen Algebrenhomomorphismus

$h : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$, dass die Bedingungen $h \neq 0$ und $h(e) = 1$ äquivalent sind, denn einerseits folgt aus $h(e) = 1 \neq 0$, dass $h \neq 0$ gilt. Andererseits folgt aus Proposition (1.2)(a) wie im Beweis, dass für $h \neq 0$ bereits $h(e) = 1$ gelten muss. Damit gilt

$$\begin{aligned} \sigma(\mathcal{A}) &= \{h; h \text{ ist multiplikatives Funktional auf } \mathcal{A} \text{ und } h \neq 0\} \\ &= \{h \in B; h(e) = 1 \text{ und } h(xy) = h(x)h(y) \text{ für alle } x, y \in \mathcal{A}\}. \end{aligned}$$

(1.3) Lemma

Sei \mathcal{A} eine kommutative Banachalgebra mit Eins, dann ist das Spektrum $\sigma(\mathcal{A})$ ein kompakter Hausdorffraum. ◇

Beweis

Die Bedingungen $h(e) = 1$ und $h(xy) = h(x)h(y)$ werden unter punktwiser Limesbildung erhalten, denn falls $h_n \xrightarrow{*} h$, also $h_n(z) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(z)$ für alle $z \in \mathcal{A}$, so setze $z = xy$. Dann gilt aufgrund der Limitenregeln

$$h(xy) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h_n(xy) = h_n(x)h_n(y) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(x)h(y),$$

und damit $h(xy) = h(x)h(y)$ wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes. Für $z = e$ folgt analog

$$1 = h_n(e) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(e),$$

und daher $h(e) = 1$ wegen der Eindeutigkeit des Grenzwertes. Dies zeigt, dass $\sigma(\mathcal{A})$ abgeschlossen in der Einheitskugel B in \mathcal{A}^* bezüglich der schwach* Topologie ist. Da B nach Alaoglu's Theorem schwach* kompakt, und $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq B$ abgeschlossen ist, folgt mit Hilfe der Topologie, dass $\sigma(\mathcal{A})$ bereits schwach* kompakt ist. Mit \mathcal{A}^* ist dann auch $\sigma(\mathcal{A})$ nach [2, (6.18)] hausdorffsch. □

Multiplikative Funtionale sind eng verbunden mit maximalen Idealen. Um darauf näher eingehen zu können, benötigen wir zunächst die Definition von maximalen Idealen.

— Definition —

(1.4) Definition

Falls \mathcal{A} eine Algebra ist, dann ist ein Linksideal (Rechtsideal) von \mathcal{A} eine Unter-algebra I von \mathcal{A} , so dass $xy \in I$ falls $x \in \mathcal{A}$ und $y \in I$ (beziehungsweise $x \in I$ und $y \in \mathcal{A}$). I ist ein echtes Ideal, falls $I \neq \mathcal{A}$ gilt. Enthält \mathcal{A} eine Eins, so ist I genau dann echt, wenn $e \notin I$, denn falls $e \in I$ ist, so gilt nach Definition auch $x = xe = ex \in I$ für alle $x \in \mathcal{A}$. Ist \mathcal{A} kommutativ, so spricht man nur von Idealen statt von Links- oder Rechtsidealen. In diesem Fall nennt man I ein maximales Ideal, falls I ein echtes Ideal ist, welches nicht in einem größeren echten Ideal enthalten ist. ◇

— Eigenschaften echter und maximaler Ideale —

Wir wollen nun einige Eigenschaften echter und maximaler Ideale herleiten, die wir im Verlauf des Vortrages noch benötigen werden.

(1.5) Proposition

Sei \mathcal{A} eine kommutative Banachalgebra mit Eins, und sei $I \subseteq \mathcal{A}$ ein echtes Ideal. Dann gilt

- a) I enthält keine invertierbaren Elemente.
- b) \bar{I} (der Abschluss von I) ist ein echtes Ideal.
- c) I ist enthalten in einem maximalen Ideal.
- d) Falls I maximal ist, so ist I bereits abgeschlossen. ◇

Beweis

a) Angenommen I enthält ein invertierbares Element x . Dann ist nach Definition des Ideals $xy \in I$ für alle $y \in \mathcal{A}$, also insbesondere $e = xx^{-1} \in I$ für $y = x^{-1}$. Nach Definition (1.4) ist dann aber bereits $I = \mathcal{A}$ und damit I kein echtes Ideal mehr, was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Demnach war die Annahme falsch und I enthält keine invertierbaren Elemente.

b) Wir zeigen zunächst, dass \bar{I} ein Ideal ist. Seien dazu $x, y \in \bar{I}$ beliebig sowie $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ zwei Folgen in I mit $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x$ und $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Dann folgt aufgrund der Idealeigenschaft von I , dass

$$\underbrace{\underbrace{x_n}_{\in I} + \underbrace{y_n}_{\in I}}_{\in I, \text{ da } I \text{ Ideal}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x + y \in \bar{I}$$

gilt, wodurch die Abgeschlossenheit von \bar{I} bezüglich der Addition gezeigt ist. Sei nun weiter $x \in \mathcal{A}$ beliebig und $y \in \bar{I}$, sowie $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq I$ eine Folge mit $y_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y$. Dann folgt

$$\underbrace{xy_n}_{\in I, \text{ da } I \text{ Ideal}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} xy \in \bar{I},$$

aufgrund der Banachalgebreneigenschaften. Damit ist gezeigt, dass \bar{I} ein Ideal ist. Da I nach Voraussetzung ein echtes Ideal ist, ist es nach Teil (a) in der Menge der nicht invertierbaren Elemente von \mathcal{A} enthalten, welche nach [1, (1.4)] abgeschlossen ist. Daraus folgt, dass $e \notin \bar{I}$ und damit nach Definition (1.4), dass \bar{I} ein echtes Ideal ist.

- c) Dies ist eine Anwendung von Zorn's Lemma. Die Vereinigung von einer aufsteigenden Kette von echten Idealen ist echt, weil sie nicht e enthält.
- d) Angenommen I wäre nicht abgeschlossen, aber ein maximales Ideal. Nach Definition eines maximalen Ideals ist dann I ein echtes Ideal und demnach nach Aufgabenteil (b) auch $\bar{I} \supsetneq I$ ein echtes Ideal in \mathcal{A} . Dies ist aber ein Widerspruch zur Maximalität von I . Damit war die Annahme falsch und I ist abgeschlossen. \square

— Zusammenhang zwischen $\sigma(\mathcal{A})$ und der Menge der maximalen Ideale von \mathcal{A} —

Für das weitere Vorgehen benötigen wir folgende Äquivalenz.

(1.6) Lemma

Für einen normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ sind äquivalent

- i) X ist vollständig
- ii) Jede absolut konvergente Reihe konvergiert, das heißt für jede Folge in X mit $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$ existiert ein Element $x \in X$ mit $\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - \sum_{n=1}^N x_n\| = 0$. \diamond

Beweis

Wir zeigen zunächst, dass aus (i) bereits (ii) folgt. Da $(\sum_{n=1}^N x_n)_{N \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist und X nach Voraussetzung vollständig, konvergiert die Folge $(\sum_{n=1}^N x_n)_{N \in \mathbb{N}}$ gegen ein $x \in X$, das heißt $\lim_{N \rightarrow \infty} \|x - \sum_{n=1}^N x_n\| = 0$.

Es bleibt für die Äquivalenz zu zeigen, dass aus (ii) auch (i) folgt. Sei dazu $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge. Wir müssen zeigen, dass diese unter den Voraussetzungen von (ii) bereits konvergiert. Wähle zu $\epsilon_k = 2^{-k}$ ein $N_k \in \mathbb{N}$ mit $\|x_n - x_m\| \leq 2^{-k}$ für alle $n, m \geq N_k$. Daraus ergibt sich die Existenz einer Teilfolge $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Definiere $y_k = x_{n_{k+1}} - x_{n_k}$. Dann gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \|y_k\| = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\| \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} < \infty.$$

Nach Voraussetzung existiert also ein $y \in X$ mit

$$\begin{aligned} \|y - \sum_{k=1}^K y_k\| &= \|y - \sum_{k=1}^K x_{n_{k+1}} + x_{n_k}\| \\ &= \|y - (x_{n_{K+1}} - x_{n_1})\| \xrightarrow{K \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Demnach konvergiert eine Teilfolge von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Da eine Cauchy-Folge, die eine konvergente Teilfolge besitzt, selbst konvergiert, folgt die Konvergenz von $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und damit die Vollständigkeit von X . \square

Einen Zusammenhang zwischen $\sigma(\mathcal{A})$ und der Menge der maximalen Ideal in \mathcal{A} liefert der folgende

(1.7) Satz

Sei \mathcal{A} eine kommutative Banachalgebra mit Eins. Die Abbildung $h \mapsto \text{Kern}(h)$ ist eine bijektive Abbildung zwischen $\sigma(\mathcal{A})$ und der Menge der maximalen Ideale in \mathcal{A} . ◇

Beweis

Wir zeigen zunächst die Wohldefiniertheit der Abbildung. Sei dazu $h \in \sigma(\mathcal{A})$. Dann ist $\text{Kern}(h)$ ein Ideal von \mathcal{A} , denn aus der linearen Algebra wissen wir, dass $\text{Kern}(h)$ eine Untergruppe von \mathcal{A} ist und für $x \in \text{Kern}(h)$ und $y \in \mathcal{A}$ gilt auch $xy \in \text{Kern}(h)$, da

$$h(xy) = h(x)h(y) = 0 \cdot h(y) = 0,$$

aufgrund der Multiplikativität von h . Zudem ist $\text{Kern}(h)$ ein echtes Ideal, denn $h(e) = 1 \neq 0$, also $e \notin \text{Kern}(h)$. Aus der Algebra wissen wir, dass $\text{Kern}(h)$ genau dann ein maximales Ideal in \mathcal{A} ist, falls $\mathcal{A}/\text{Kern}(h)$ ein Körper ist. Nach dem Homomorphiesatz gilt

$$\mathcal{A}/\text{Kern}(h) \cong \text{Bild}(h) \leq \mathbb{C}.$$

Als Untervektorraum von \mathbb{C} ist $\text{Bild}(h)$ aber entweder trivial oder \mathbb{C} selbst. Da aber $h \neq 0$ gegeben ist, kann nur noch $\text{Bild}(h) = \mathbb{C}$ gelten. Also ist $\mathcal{A}/\text{Kern}(h) \cong \mathbb{C}$ und da \mathbb{C} ein Körper ist, gilt auch, dass $\mathcal{A}/\text{Kern}(h)$ ein Körper ist und damit, dass $\text{Kern}(h)$ in der Menge der maximalen Ideal von \mathcal{A} enthalten ist. Demnach ist die obige Abbildung wohldefiniert.

Als nächstes wollen wir die Injektivität der Abbildung zeigen. Seien dazu $h, g \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $h \neq g$, aber $\text{Kern}(g) = \text{Kern}(h)$. Sei weiterhin $x \in \mathcal{A}$. Dann lässt sich x darstellen als $x = x + h(x)e - h(x)e$. Definiere nun $y = x - h(x)e$. Dann gilt $y \in \text{Kern}(h)$, denn wegen der Linearität von h erhält man

$$\begin{aligned} h(y) &= h(x - h(x)e) \\ &= h(x) - h(h(x)e) \\ &= h(x) - h(x) \underbrace{h(e)}_{=1} \\ &= h(x) - h(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wendet man nun g auf x an, so erhält man aufgrund der Linearität von g , dass

$$\begin{aligned} g(x) &= g(h(x) + y) \\ &= g(h(x)e) + g(y) \\ &= h(x) \underbrace{g(e)}_{=1} + g(y) \\ &= h(x) + g(y) \end{aligned}$$

gilt. Wegen $\text{Kern}(h) = \text{Kern}(g)$ hat man somit auch $y \in \text{Kern}(g)$, also $g(y) = 0$. Es folgt also

$$g(x) = h(x) + g(y) = h(x) + 0 = h(x) \quad \text{für alle } x \in \mathcal{A}.$$

Demnach ist $g \equiv h$ und damit $h \mapsto \text{Kern}(h)$ injektiv.

Nun wollen wir die Surjektivität der Abbildung $h \mapsto \text{Kern}(h)$ zeigen. Sei dazu \mathcal{M} ein maximales Ideal von \mathcal{A} und sei $\pi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}/\mathcal{M}$, $x \mapsto x + \mathcal{M}$, die Quotientenabbildung (kanonische Abbildung). Aus der Algebra wissen wir, dass \mathcal{A}/\mathcal{M} eine Algebrastruktur von \mathcal{A} erbt. Damit wird \mathcal{A}/\mathcal{M} zum Banachraum mit der sogenannten Quotientennorm definiert durch $\|x + \mathcal{M}\| = \inf\{\|x + m\| : m \in \mathcal{M}\}$. Dass diese Definition auch wirklich eine Norm darstellt, werden wir im Folgenden zeigen. Dafür prüfen wir zuerst, ob die Norm wohldefiniert ist. Dies ist aber der Fall, denn $x_1 + \mathcal{M} = x_2 + \mathcal{M} \in \mathcal{A}/\mathcal{M}$ impliziert $x_1 = x_2 + m$ für ein $m \in \mathcal{M}$ und deshalb gilt $\|x_1 + \mathcal{M}\| = \|x_2 + \mathcal{M}\|$. Die Gleichung $\|\lambda(x_1 + \mathcal{M})\| = |\lambda| \|x_1 + \mathcal{M}\|$ folgt für $\lambda \neq 0$ sofort daraus, dass mit m auch $\lambda \cdot m$ den Unterraum \mathcal{M} durchläuft und für $\lambda = 0$ ist die Gleichung trivial, da

$$\|0 + \mathcal{M}\| = \inf\{\|0 + m\|, m \in \mathcal{M}\} \stackrel{0 \in \mathcal{M}}{=} 0.$$

Um die Dreiecksungleichung zu beweisen, betrachte $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$. Wähle zu $\epsilon > 0$ Elemente $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ mit $\|x_i - m_i\| \leq \|x_i + \mathcal{M}\| + \epsilon$ für $i = 1, 2$. Es folgt

$$\begin{aligned} \|x_1 + \mathcal{M} + x_2 + \mathcal{M}\| &= \|x_1 + x_2 + \mathcal{M}\| \\ &\leq \|(x_1 + x_2) - (m_1 + m_2)\| \\ &\leq \|x_1 - m_1\| + \|x_2 - m_2\| \\ &\leq \|x_1 + \mathcal{M}\| + \|x_2 + \mathcal{M}\| + 2\epsilon, \end{aligned}$$

denn $m_1 + m_2 \in \mathcal{M}$. Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Dreiecksungleichung. Da \mathcal{M} nach Proposition (1.5)(d) als maximales Ideal abgeschlossen ist, können wir die

Definitheit $\|x + \mathcal{M}\| = 0 \Leftrightarrow x + \mathcal{M} = 0 + \mathcal{M}$ zeigen, denn

$$\begin{aligned} \|x + \mathcal{M}\| = 0 &\Leftrightarrow \inf\{\|x + m\|, m \in \mathcal{M}\} = 0 \\ &\stackrel{\text{Analysis}}{\Leftrightarrow} x \in \overline{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \\ &\Leftrightarrow x + \mathcal{M} = 0 + \mathcal{M}. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, dass obige Definition eine Norm darstellt. Wir wollen nun zeigen, dass \mathcal{A}/\mathcal{M} ein Banachraum ist, das heißt wir müssen zeigen, dass \mathcal{A}/\mathcal{M} vollständig ist. Dazu benötigen wir Lemma (1.6). Seien $x_k \in \mathcal{A}$ mit $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k + \mathcal{M}\| < \infty$. Nach Definition der Quotientennorm darf ohne Einschränkung $\|x_k\| \leq \|x_k + \mathcal{M}\| + 2^{-k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ angenommen werden. Dann gilt aber

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{N}} \|x_k\| &\leq \sum_{k \in \mathbb{N}} (\|x_k + \mathcal{M}\| + 2^{-k}) \\ &\stackrel{*}{=} \sum_{k \in \mathbb{N}} \|x_k + \mathcal{M}\| + \sum_{k \in \mathbb{N}} 2^{-k} \\ &< \infty, \end{aligned}$$

wobei wir in * die absolute Konvergenz beider Reihen benötigt haben. Da \mathcal{A} vollständig ist, existiert nach Lemma (1.6) ein $x \in \mathcal{A}$ mit $\lim_{K \rightarrow \infty} \|x - \sum_{k=1}^K x_k\| = 0$. Dann gilt aber auch

$$\begin{aligned} \|x + \mathcal{M} - \sum_{k=1}^K (x_k + \mathcal{M})\| &= \|(x - \sum_{k=1}^K x_k) + \mathcal{M}\| \\ &\leq \|x - \sum_{k=1}^K x_k\| \stackrel{K \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0, \end{aligned}$$

da stets $\|x + \mathcal{M}\| \leq \|x\|$ gilt. Nach Lemma (1.6) folgt nun, dass \mathcal{A}/\mathcal{M} vollständig ist. Demnach ist \mathcal{A}/\mathcal{M} ein Banachraum. Zudem gilt für $x, y \in \mathcal{A}$ und $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ beliebig, dass $xy + m_1y + m_2x + m_1m_2 \in xy + \mathcal{M}$ gilt, und demnach

$$\begin{aligned} \|xy + \mathcal{M}\| &\leq \|xy + m_1y + m_2x + m_1m_2\| \\ &= \|(x - m_1)(y + m_2)\| \\ &\leq \|x + m_1\| \|y + m_2\|. \end{aligned}$$

Da $m_1, m_2 \in \mathcal{M}$ beliebig waren, folgt

$$\|xy + \mathcal{M}\| \leq \|x + \mathcal{M}\| \|y + \mathcal{M}\|.$$

Insgesamt erhält man somit, dass \mathcal{A}/\mathcal{M} eine Banachalgebra ist. Da \mathcal{M} ein maximales Ideal ist, erhält man aus der Algebra, dass \mathcal{A}/\mathcal{M} ein Körper ist und dadurch keine nichttrivialen Ideale haben kann. Insbesondere ist damit jedes von Null verschiedene Element in \mathcal{A}/\mathcal{M} invertierbar. Da nach dem oben Gezeigten \mathcal{A}/\mathcal{M} eine Banachalgebra ist, folgt mit dem Gelfand-Mazur [1, (1.7)], dass $\mathcal{A}/\mathcal{M} \cong \mathbb{C}$ gilt. Bezeichnet man den Isomorphismus aus dem Gelfand-Mazur Theorem mit Φ , dann ist $\Phi \circ \pi$ ein multiplikatives Funktional von \mathcal{A} mit Kern \mathcal{M} . Die Abbildung $\Phi \circ \pi$ ist multiplikativ, denn es gilt

$$\pi(xy) = xy + \mathcal{M} =: (x + \mathcal{M})(y + \mathcal{M}) = \pi(x)\pi(y),$$

sowie

$$\Phi(xy) \stackrel{(1.7)}{=} \Phi(\underbrace{ae}_{=x} \cdot \underbrace{be}_{=y}) = \Phi(abe) \stackrel{(1.7)}{=} ab = \Phi(ae)\Phi(be) = \Phi(x)\Phi(y),$$

und damit

$$\Phi(\pi(xy)) = \Phi(\pi(x)\pi(y)) = \Phi(\pi(x))\Phi(\pi(y)).$$

Nach Definition der Abbildung $\Phi \circ \pi$ ist der Kern gerade \mathcal{M} , wodurch die Abbildung $h \mapsto \text{Kern}(h)$ surjektiv ist.

Insgesamt haben wir also gezeigt, dass die Abbildung $h \mapsto \text{Kern}(h)$ von $\sigma(\mathcal{A})$ in die Menge der maximalen Ideale von \mathcal{A} bijektiv ist. \square

§2 Der Satz von Gelfand

In diesem Paragraphen werden wir die sogenannte Gelfand-Transformation einführen und anschließend den Satz von Gelfand beweisen. Zudem werden wir symmetrische *-Algebren behandeln und abschließend eine Motivation finden, $\sigma(\mathcal{A})$ das Spektrum von \mathcal{A} zu nennen.

— Die Gelfand-Transformation —

(2.1) Definition

Für $x \in \mathcal{A}$ definieren wir die Funktion \hat{x} auf $\sigma(\mathcal{A})$ durch

$$\hat{x}(h) = h(x), \quad h \in \sigma(\mathcal{A}).$$

Weil die Topologie der punktweisen Konvergenz auf \mathcal{A} die Topologie auf $\sigma(\mathcal{A})$ ist, ist \widehat{x} stetig auf $\sigma(\mathcal{A})$, denn wegen

$$\widehat{x}(h_n) = h_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} h(x) = \widehat{x}(h),$$

ist \widehat{x} schwach-*stetig, also $\widehat{x} \in \mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$. Die Abbildung $x \mapsto \widehat{x}$ von \mathcal{A} nach $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$ wird *Gelfand – Transformation auf \mathcal{A}* genannt und mit Γ oder $\Gamma_{\mathcal{A}}$ bezeichnet (falls Missverständnisse zu befürchten sind). \diamond

— Der Satz von Gelfand —

(2.2) Satz (Gelfand)

Sei \mathcal{A} eine kommutative Algebra mit Eins und sei $x \in \mathcal{A}$. Dann gilt

- Die Gelfand-Transformation ist ein Homomorphismus von \mathcal{A} nach $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$ und \widehat{e} ist die konstante Funktion 1.
- x ist invertierbar $\Leftrightarrow \widehat{x}$ verschwindet nirgends.
- $\text{Range}(\widehat{x}) = \sigma(x)$.
- $\|\widehat{x}\|_{\text{sup}} = \varrho(x) \leq \|x\|$. \diamond

Beweis

- Dass die Gelfand-Transformation wohldefiniert ist, haben wir bereits in der Definition gesehen. Weiter gilt

$$\widehat{xy}(h) = h(xy) = h(x)h(y) = \widehat{x}(h)\widehat{y}(h),$$

sowie

$$\widehat{\alpha x}(h) = h(\alpha x) = \alpha h(x) = \alpha \widehat{x}(h)$$

und

$$\widehat{x+y}(h) = h(x+y) = h(x) + h(y) = \widehat{x}(h) + \widehat{y}(h),$$

also ist Γ ein Homomorphismus. Sei nun $h \in \sigma(\mathcal{A})$ beliebig. Nach Proposition (1.2)(a) gilt dann $\widehat{e}(h) = h(e) = 1$. Demnach ist $\widehat{e} \equiv 1$.

- Sei $x \in \mathcal{A}$ nicht invertierbar. Nach Proposition (1.5) ist das von x erzeugte Ideal echt. Daraus folgt ebenfalls nach Proposition (1.5), dass x in einem maximalen Ideal enthalten ist. Nach Satz (1.7) ist dann aber $x \in \text{Kern}(h)$ für ein $h \in \sigma(\mathcal{A})$, das heißt $h(x) = 0$ für ein $h \in \sigma(\mathcal{A})$. Damit ist also $\widehat{x}(h) = h(x) = 0$ für ein $h \in \sigma(\mathcal{A})$, also hat \widehat{x} eine Nullstelle. Hat umgekehrt \widehat{x} eine Nullstelle, dann existiert ein $h \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $\widehat{x}(h) = 0 = h(x)$, das heißt $h(x) = 0$ für ein $h \in \sigma(\mathcal{A})$. Also ist

$x \in \text{Kern}(h)$ für ein $h \in \sigma(\mathcal{A})$ und nach Satz (1.7) ist x dann in einem maximalen Ideal enthalten. Da maximale Ideale nach Definition echte Ideale sind, ist auch das von x erzeugte Ideal echt und damit kann x nach Proposition (1.5) nicht invertierbar sein.

- c) Nach Definition des Spektrums gilt $\lambda \in \sigma(x)$ genau dann, wenn $\lambda e - x$ nicht invertierbar ist. Dies ist aber nach Teil (b) äquivalent dazu, dass $h(\lambda e - x) = 0$ für ein $h \in \sigma(\mathcal{A})$ gilt. Dies ist wiederum genau dann der Fall, wenn $\lambda h(e) - h(x) = 0$ beziehungsweise $\lambda = h(x) = \widehat{x}(h)$ für ein $h \in \sigma(\mathcal{A})$ gilt. Äquivalent dazu ist dann aber $\lambda \in \text{Range}(\widehat{x})$. Insgesamt folgt also die Behauptung.
- d) Mit Hilfe von Aufgabenteil (c) und [1, (1.4)(a)] folgt

$$\begin{aligned} \|\widehat{x}\|_{\text{sup}} &= \sup_{h \in \sigma(\mathcal{A})} |\widehat{x}(h)| \\ &\stackrel{(c)}{=} \sup\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(x)\} \\ &= \varrho(x) \\ &\stackrel{[F](1.4)(a)}{\leq} \|x\|, \end{aligned}$$

was die Behauptung zeigt. □

— Symmetrische *-Algebren —

Falls \mathcal{A} eine *-Algebra ist, dann kann man sich fragen, ob die Involution auf \mathcal{A} auf die komplexe Konjugation auf $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$ transformiert wird, das heißt wann $\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$ für $x \in \mathcal{A}$ gilt. Dies ist nicht immer möglich, wie wir im nächsten Vortrag sehen werden.

(2.3) Definition

Man nennt eine *-Algebra \mathcal{A} symmetrisch, wenn $\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}$ für $x \in \mathcal{A}$ gilt. ◇

Für das weitere Vorgehen benötigen wir den folgenden

(2.4) Satz (Stone-Weierstrass)

Sei T ein kompakter Raum und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{C}(T)$ eine Algebra mit folgenden Eigenschaften:

- 1) \mathcal{A} enthält die konstanten Funktionen,
- 2) \mathcal{A} ist punktgetrennend, das heißt zu $s, t \in T$ mit $s \neq t$ existiert ein $f \in \mathcal{A}$ mit $f(s) \neq f(t)$, sowie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

3) \mathcal{A} ist selbstadjungiert, das heißt für $f \in \mathcal{A}$ muss bereits $\bar{f} \in \mathcal{A}$ sein.

Dann ist \mathcal{A} dicht in $\mathcal{C}(T)$ bezüglich $\|\cdot\|_\infty$. ◇

Beweis

Einen Beweis findet man in [3, VIII (4.7)]. □

(2.5) Proposition

Sei \mathcal{A} eine kommutative Banach $*$ -Algebra. Dann gilt

a) \mathcal{A} ist symmetrisch genau dann, wenn \hat{x} reellwertig ist für alle x mit $x = x^*$.

b) Falls \mathcal{A} eine C^* -Algebra ist, ist \mathcal{A} symmetrisch.

c) Falls \mathcal{A} symmetrisch ist, ist $\Gamma(\mathcal{A})$ dicht in $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$. ◇

Beweis

a) Sei zunächst \mathcal{A} symmetrisch und $x \in \mathcal{A}$ mit $x = x^*$. Dann gilt

$$\hat{x} = \widehat{x^*} = \overline{\hat{x}},$$

also ist \hat{x} reell.

Zu $x \in \mathcal{A}$ definiere für die Rückrichtung u und v durch $u = \frac{1}{2}(x + x^*)$ sowie $v = \frac{1}{2i}(x - x^*)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} u^* &= \left(\frac{1}{2}(x + x^*)\right)^* \stackrel{*}{=} \overline{\left(\frac{1}{2}\right)}(x^* + x^{**}) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{1}{2}(x^* + x) = u, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} v^* &= \left(\frac{1}{2i}(x - x^*)\right)^* \stackrel{*}{=} \overline{\left(\frac{1}{2i}\right)}(x^* - x^{**}) \\ &\stackrel{*}{=} \frac{-1}{2i}(x^* - x) \stackrel{*}{=} \frac{1}{2i}(x - x^*) \\ &= v, \end{aligned}$$

wobei wir in $*$ die Eigenschaften einer $*$ -Algebra nach [1, (1.1)] verwendet haben.

Es folgt also nach Voraussetzung, dass \hat{u} und \hat{v} reell sind. Weiter gilt

$$\begin{aligned} u + iv &= \frac{1}{2}(x^* + x) + i\left(\frac{1}{2i}(x - x^*)\right) \\ &= \frac{1}{2}(x^* + x) + \frac{1}{2}(x - x^*) \\ &= x, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} u - iv &= \frac{1}{2}(x^* + x) - i \left(\frac{1}{2i}(x - x^*) \right) \\ &= \frac{1}{2}(x^* + x) - \frac{1}{2}(x - x^*) \\ &= x^*. \end{aligned}$$

Damit erhält man aufgrund der Linearität der Gelfand-Transformation nach Satz (2.2) und der Tatsache, dass \widehat{u} und \widehat{v} reell sind, dass

$$\begin{aligned} \widehat{x^*} &= \widehat{u - iv} = \widehat{u} - i\widehat{v} \\ &= \widehat{u} - i\widehat{v} = \overline{\widehat{u}} - i\overline{\widehat{v}} \\ &= \overline{\widehat{u} + i\widehat{v}} = \overline{\widehat{u} + i\widehat{v}} \\ &= \overline{u + iv} = \widehat{x} \end{aligned}$$

gilt. Da $x \in \mathcal{A}$ beliebig gewählt war, ist \mathcal{A} nach Definition (2.3) symmetrisch.

- b) Um die Behauptung zu zeigen, wollen wir Aufgabenteil (a) verwenden. Sei dazu $x \in \mathcal{A}$ mit $x = x^*$. Falls wir zeigen können, dass \widehat{x} reellwertig ist, folgt mit Aufgabenteil (a) die Behauptung. Sei weiterhin $h \in \sigma(\mathcal{A})$ beliebig und $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\widehat{x}(h) = h(x) = \alpha + i\beta$. Für $t \in \mathbb{R}$ definiere $z = x + ite$. Dann gilt

$$\begin{aligned} h(z) &= h(x + ite) = h(x) + ith(e) \\ &= h(x) + it = \alpha + i\beta + it \\ &= \alpha + i(\beta + t) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} z^*z &= (x + ite)^*(x + ite) \stackrel{*}{=} (x^* + (ite)^*) (x + ite) \\ &\stackrel{*}{=} (x^* + \overline{ite^*}) (x + ite) = (x^* - ite^*) (x + ite) \\ &\stackrel{x \equiv x^*}{=} (x - ite^*) (x + ite) \stackrel{e \equiv e^*}{=} (x - ite) (x + ite) \\ &= x^2 - (ite)^2 = x^2 + t^2e, \end{aligned}$$

wobei wir in $*$ die Eigenschaften einer $*$ -Algebra nach [1, (1.1)] verwendet haben,

aus denen ebenfalls folgt, dass $e = e^*$ gilt. Mit Proposition (1.2) (c) folgt nun

$$\begin{aligned} (\alpha)^2 + (\beta + t)^2 &= |\alpha + i(\beta + t)|^2 = |h(z)|^2 \\ &\leq \|z\|^2 = \|z^*z\| \\ &= \|x^2 + t^2e\| \leq \|x^2\| + \|t^2e\| \\ &= \|x^2\| + t^2\|e\| \stackrel{\|e\|=1}{=} \|x^2\| + t^2, \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t + t^2 &\leq \|x^2\| + t^2 \\ \Leftrightarrow \alpha^2 + \beta^2 + 2\beta t &\leq \|x^2\| \end{aligned}$$

für alle $t \in \mathbb{R}$. Daraus folgt aber bereits, dass $\beta = 0$ gelten muss. Damit erhält man dann

$$\hat{x}(h) = h(x) = \alpha \in \mathbb{R}.$$

Da h beliebig gewählt war, muss \hat{x} reell sein. Nach Aufgabenteil (a) ist \mathcal{A} dann symmetrisch.

- c) Sei $\hat{x} \in \Gamma(\mathcal{A})$. Da sich jedes $\bar{\hat{x}}$ als \hat{y} für ein $y \in \mathcal{A}$ darstellen lässt, mit $y = x^*$, ist $\Gamma(\mathcal{A})$ abgeschlossen unter komplexer Konjugation. Zudem enthält $\Gamma(\mathcal{A})$ nach dem Satz von Gelfand die konstante Funktion $\hat{e} = 1$ und demnach auch alle konstanten Funktionen. Weiter ist $\Gamma(\mathcal{A})$ punktetrennend, denn seien $f, g \in \sigma(\mathcal{A})$ Homomorphismen mit $f \neq g$, dann existiert ein $x \in \mathcal{A}$ mit $f(x) \neq g(x)$, also $\hat{x}(f) \neq \hat{x}(g)$. Da $\sigma(\mathcal{A})$ nach Lemma (1.3) kompakt ist und $\Gamma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$ eine Algebra ist (da bereits \mathcal{A} eine kommutative Banach $*$ -Algebra ist und Γ ein Homomorphismus), sowie die Voraussetzungen (1) bis (3) von Satz (2.4) nach oben Gezeigtem erfüllt sind, folgt nach dem Satz von Stone-Weierstrass, dass $\Gamma(\mathcal{A})$ dicht in $\mathcal{C}(\sigma(\mathcal{A}))$ ist. \square

— Zusammenhang zwischen $\sigma(\mathcal{A})$ und $\sigma(x)$ —

Für das weitere Vorgehen benötigen wir ein bekanntes Lemma aus der Topologie.

(2.6) Lemma

Sei $f : T \rightarrow S$ stetig und bijektiv, sowie T und S kompakt. Dann ist $f^{-1} : S \rightarrow T$ ebenfalls stetig. \diamond

Beweis

Sei $A \subseteq T$ abgeschlossen. Dann ist $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A)$ kompakt, da abgeschlossene Teilmengen kompakter Räume selbst kompakt sind und kompakte Mengen unter stetigen Abbildungen auf kompakte Mengen abgebildet werden. Insbesondere ist damit $(f^{-1})^{-1}(A)$ abgeschlossen, das heißt Urbilder abgeschlossener Mengen sind abgeschlossen, also ist f^{-1} stetig. \square

Die Motivation dafür, dass $\sigma(\mathcal{A})$ das Spektrum von \mathcal{A} genannt wird, liefert uns das folgende Resultat.

(2.7) Proposition

Falls $x_0 \in \mathcal{A}$ gilt, so ist \hat{x}_0 ein Homöomorphismus von $\sigma(\mathcal{A})$ nach $\sigma(x_0)$ in jedem der folgenden Fälle:

- i) \mathcal{A} wird erzeugt von x_0 und e , oder
- ii) x_0 ist invertierbar und \mathcal{A} wird erzeugt von x_0 und x_0^{-1} , oder
- iii) \mathcal{A} ist symmetrisch und \mathcal{A} wird erzeugt von x_0, x_0^* und e . \diamond

Beweis

Nach Satz (2.2) (c) gilt $\text{Range}(\hat{x}_0) = \sigma(x_0)$, also wird $\sigma(\mathcal{A})$ unter \hat{x}_0 auf $\sigma(x_0)$ abgebildet. Da sowohl $\sigma(\mathcal{A})$ (nach Lemma (1.3)) als auch $\sigma(x_0)$ (bekannt aus der Funktionalanalysis) kompakte Hausdorffräume sind, genügt es zu prüfen, dass \hat{x}_0 injektiv ist, denn mit obiger Surjektivität und der Tatsache, dass \hat{x}_0 nach Definition (2.1) stetig ist, folgt aus dem Lemma (2.6), dass \hat{x}_0^{-1} ebenfalls stetig ist. Wir müssen also in allen drei Fällen die Injektivität von \hat{x}_0 nachweisen.

- i) Seien dazu $h, g \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $\hat{x}_0(h) = \hat{x}_0(g)$, also $h(x_0) = g(x_0)$. Zudem wissen wir $h(e) = 1 = g(e)$. Da aber \mathcal{A} nach Voraussetzung von x_0 und e erzeugt wird, stimmen g und h bereits auf dem Erzeugnis von x_0 und e überein und damit gilt $h \equiv g$. Demnach ist \hat{x}_0 injektiv.

- ii) Zunächst gilt $h(x_0^{-1}) = h(x_0)^{-1}$, denn

$$\begin{aligned} h(x_0^{-1}) &= \underbrace{h(x_0)^{-1}h(x_0)}_{=1} h(x_0^{-1}) = h(x_0)^{-1}h(x_0x_0^{-1}) \\ &= h(x_0)^{-1} \underbrace{h(e)}_{=1} = h(x_0)^{-1}. \end{aligned}$$

Seien nun $h, g \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $\hat{x}_0(h) = \hat{x}_0(g)$, also $h(x_0) = g(x_0)$. Weiter gilt aber

$$h(x_0^{-1}) = h(x_0)^{-1} = g(x_0)^{-1} = g(x_0^{-1}).$$

Da \mathcal{A} nach Voraussetzung von x_0 und x_0^{-1} erzeugt wird, stimmen g und h bereits auf dem Erzeugnis von x_0 und x_0^{-1} überein und damit gilt $h \equiv g$. Demnach ist \widehat{x}_0 injektiv.

iii) Es gilt $h(x_0^*) = \overline{h(x_0)}$, denn

$$h(x_0^*) = \widehat{x}_0^*(h) \stackrel{\mathcal{A} \text{ symmetrisch}}{=} \overline{\widehat{x}_0(h)} = \overline{h(x_0)}.$$

Seien nun $h, g \in \sigma(\mathcal{A})$ mit $\widehat{x}_0(h) = \widehat{x}_0(g)$, also $h(x_0) = g(x_0)$. Weiter gilt aber

$$h(x_0^*) = \overline{h(x_0)} = \overline{g(x_0)} = g(x_0^*).$$

Da \mathcal{A} nach Voraussetzung von x_0, x_0^* und e erzeugt wird, stimmen g und h bereits auf dem Erzeugnis von x_0, x_0^* und e überein und damit gilt $h \equiv g$. Demnach ist \widehat{x}_0 injektiv.

Da wir in allen drei Fällen auf die Injektivität von \widehat{x}_0 schließen konnten, ist aus obigen Gründen \widehat{x}_0 in eben diesen Fällen ein Homöomorphismus von $\sigma(\mathcal{A})$ nach $\sigma(x_0)$. \square

Literatur

- [1] Folland, A course in abstract harmonic analysis
- [2] Funktionalanalysis I, Vorlesung aus dem WS 07/08
- [3] Werner, Funktionalanalysis