Spektraltheorie von Toeplitz-Operatoren

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 15.01.2009

Matthias Röhser

Nachdem im Vortrag vom 08.01.09 bereits wichtige Grundlagen vorgestellt wurden, werden wir nun die Toeplitz-Algebra und deren Elemente, die Toeplitz-Operatoren, studieren. Wir betrachten im ersten Abschnitt zunächst die Klasse der Fredholm-Operatoren und beweisen den Satz von Atkinson. Im zweiten Abschnitt stellen wir dann den Zusammenhang zur Toeplitz-Algebra her.

§ 1 Fredholm-Operatoren

Zunächst wiederholen wir einige Definitionen und erledigen weitere Vorarbeiten.

(1.1) Definition (Fredholm-Operator)
Seien X, Y Banachräume und $u \in \mathscr{L}(X,Y)$. Der Operator u heißt *Fredholm* oder auch *Fredholm-Operator*, falls sein Kern $kern(u)$ endlich-dimensional und sein Bild $u(X)$ endlich-kodimensional ist. $\diamond$

(1.2) Definition (Fredholm-Index)
Wir bezeichnen $nul(u) := dim(kern(u))$ als *Nulldefekt* und $def(u) := codim(u(X), Y)$ als *Bilddefekt*. Der *Fredholm-Index* oder auch nur *Index* ist definiert durch
$ind(u) := nul(u) - def(u)$. $\diamond$

(1.3) Satz
Seien X, Y Banachräume und sei $u \in \mathscr{L}(X,Y)$ ein Fredholm-Operator. Dann existiert zu u eine Pseudoinverse v (d.h. $uvu = u$), die Fredholm ist, und die Operatoren $1 - uv$ und $1 - vu$ haben endlichen Rang.

Gilt zusätzlich $ind(u) = 0$, so ist v invertierbar. $\diamond$

Beweis
Der Beweis besteht im Wesentlichen aus einer geschickten Konstruktion des Elementes v. Die gewünschten Eigenschaften ergeben sich dann ohne großen Aufwand.

Zunächst teilen wir die Räume X und Y in Summen von "wichtigen" Teilräumen auf: Sei X_1 ein abgeschlossener Unterraum von X so, dass $kern(u) \oplus X_1 = X$. Sei Y_1 ein endlich-dimensionaler Teilraum von Y so, dass $u(X) \oplus Y_1 = Y$.

Wir zeigen die Abgeschlossenheit von X_1:
Man wähle eine Basis $x_1, \ldots, x_k$ von $kern(u)$. $kern(u)$ ist nach Vorraussetzung endlichdimensional. Wähle dazu lineare Funktionale $x_1^*, \ldots, x_k^* \in X^*$ mit $x_i^*(x_j) = \delta_{i,j}$. Diese Funktionale konstruiert man leicht auf $kern(u)$, und setzt sie dann mittels Satz von Hahn-Banach fort. Es sei $X_1 = \bigcap_{i=1}^k kern(x_i^*)$.
Damit ist X_1 nach Konstruktion abgeschlossen. Es bleibt nun noch zu zeigen, dass X_1 tatsächlich Komplement zu $kern(u)$ ist:
Sei $x \in kern(u) \cap X_1$. Dann liegt x im Erzeugnis der x_i, also $x = \sum_{i=1}^k a_i x_i$. Wegen $x \in X_1$ gilt $0 = x_j^*(x) = a_j$, für $j = 1, \ldots, k$, und damit $x = 0$.
Also $kern(u) \cap X_1 = \{0\}$.
Sei nun $x \in X$ beliebig. Es sei $v = \sum_{i=1}^k x_i^*(x) x_i$, $w = x - v$. Dann gilt: $v \in kern(u)$. Ausserdem gilt, für $j = 1, \ldots, k$, dass

$$\begin{aligned} x_j^*(x - v) &= x_j^*(x - \sum_{i=1}^k x_i^*(x) x_i) = x_j^*(x) - \sum_{i=1}^k x_i^*(x) x_j^*(x_i) \\ &= x_j^*(x) - x_j^*(x) = 0. \end{aligned}$$

Also $x - v \in X_1$, und es folgt $x = v + x - v \in kern(u) \oplus X_1$.

Nun beginnen wir mit der Konstruktion der Pseudoinversen v:

u ist nach Voraussetzung linear und beschränkt (somit stetig), also ist die Restriktion $u_1 : X_1 \to u(X)$, $x \mapsto u(x)$ ebenfalls stetig und linear. Außerdem ist u_1 injektiv (da $kern(u_1) = \{0\}$) aufgrund der Wahl des Raumes X_1, der bis auf die Null nur Elemente enthält, die gerade *nicht* im Kern von u liegen. Desweiteren werden durch die Einschränkung von u auf X_1 nur die Elemente (außer der Null) aus dem Definitionsbereich entfernt, die ohnehin auf die Null abgebildet werden. Der übrige Teil des Bildes von u bleibt unverändert. Darum ist die Surjektivität von u_1 klar. Somit ist u_1 also ein stetiger Isomorphismus zwischen X_1 und $u(X)$. Nach dem Open-Mapping-Theorem (siehe Satz (3.11)) ist u_1 offen und damit folgt, dass $v_1 : u(X) \to X_1$ als Inverse von u_1 stetig ist.

Falls $ind(u) = 0$, so bedeutet dies, dass $kern(u)$ und Y_1 die gleiche, endliche Dimension haben, also ein beschränkter Isomorphismus $w : Y_1 \to kern(u)$ existiert.

Aus diesen Bestandteilen definieren wir jetzt die Abbildung

$$v : Y \to X, x \mapsto \begin{cases} v_1(x), & \text{falls } x \in u(X) \\ 0, & \text{falls } x \in Y_1, ind(u) \neq 0 \\ w(x), & \text{falls } x \in Y_1, ind(u) = 0 \end{cases}$$

Die Linearität von v folgt aus der Linearität der Teilabbildungen. v ist beschränkt und stetig, denn für alle $f \in Y$ mit $||f|| \leq 1$ gilt:

$$||v(f)|| = \begin{cases} ||v_1(f)|| < \infty, & \text{für } f \in u(X) \\ 0 < \infty, & \text{für } f \in Y_1, ind(u) \neq 0 \\ ||w(f)|| < \infty, & \text{für } f \in Y_1, ind(u) = 0 \end{cases}$$

Da u Fredholm ist muss sowohl Y_1 als auch $kern(u)$ endliche Dimension haben. Durch die Wahl von v ist nun $kern(v) \subset Y_1$ und $X_1 \subset v(Y)$. Darum sind

$$dim(kern(v)) < dim(Y_1) < \infty$$

$$codim(v(Y), X) \leq codim(X_1, X) = dim(kern(u)) < \infty$$

und somit ist v Fredholm ist.

Aus der Konstruktion von v folgt $uvu = u$. Damit kann man nun folgern:
$u - uvu = 0 \Rightarrow u(1 - vu) = 0 \Rightarrow (1 - vu)(X) \subset kern(u)$ womit $1 - vu$ endlichen Rang haben muss da $kern(u)$ endlich-dimensional ist. Nun berechnen wir $(1 - uv)(Y)$: Falls $x \in u(X)$, so ist $uv(x) = x$ nach Konstruktion von v und damit $(1 - uv)(x) = 0$. Falls $x \in Y_1$, so ist $v(x) \in kern(u)$, also $uv(x) = 0$ und damit $(1 - uv)(x) = x$. Damit wurde gezeigt, dass $(1 - uv)(Y) \subset (1 - uv)(Y_1) \subset Y_1$ und mit Y_1 ist auch $1 - uv$ endlich-dimensional.

Abschließend betrachten wir den Fall $ind(u) = 0$. Dann ist v nach Konstruktion bijektiv, also invertierbar. □

(1.4) Bemerkung
Auf endlich-dimensionalen Vektorräumen sind alle Operatoren Fredholm. Wir betrachten daher ausschließlich unendlich-dimensionale Vektorräume. ◇

Fredholm-Operatoren lassen sich auch durch folgende Eigenschaft charakterisieren:

(1.5) Satz (Atkinson)
Sei X unendlich-dimensionaler Banachraum und sei $u \in \mathscr{L}(X)$. Dann ist u Fredholm genau dann, wenn $u + \mathscr{K}(X)$ invertierbar in der Quotientenalgebra $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$ ist. ◇

Beweis
Definiere den surjektiven, kanonischen Homomorphismus π durch

$$\pi : \mathscr{L}(X) \to \mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X), x \mapsto x + \mathscr{K}(x)$$

Sei nun u Fredholm. Damit existiert nach dem vorhergehendem Satz (1.3) ein Fredholmoperator v in $\mathscr{L}(X)$ so, dass $1 - uv$ und $1 - vu$ endlichen Rang haben. Damit sind $1 - uv$ und $1 - vu$ kompakt. Also gilt $0 = \pi(1 - uv) = 1 - \pi(u)\pi(v)$ und $0 = \pi(1 - vu) = 1 - \pi(v)\pi(u)$. Daraus folgt die Invertierbarkeit von $\pi(u)$ in $\mathscr{L}(X)/\mathscr{K}(X)$.

Sei andererseits $\pi(u)$ invertierbar mit Inverse $\pi(v)$. Dann ist $uv = 1 + w_1$ und $vu = 1 + w_2$ mit $w_1, w_2 \in \mathscr{K}(X)$. Daraus kann man ablesen, dass

$$kern(u) \subset kern(vu) = kern(1 + w_2)$$

Der Kern $kern(1 + w_2)$ ist jedoch endlich dimensional nach Satz (3.2), also ist $kern(u)$ ebenfalls endlich-dimensional und $nul(u)$ ist endlich. Außerdem ist $(1 + w_1)(X) = uv(X) \subset u(X)$ und $(1 + w_1)(X)$ hat nach Satz (3.2) endliche Kodimension in X, folglich ist $def(u)$ endlich. Damit ist $ind(u)$ endlich und u Fredholm. □

§2 Toeplitz-Operatoren

(2.1) Definition (Toeplitz-Operator)
Sei p die Projektion von $L^2(\mathbb{T})$ auf H^2 und sei $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. Wir definieren den *Toeplitz-Operator* T_φ mit *Symbol* φ durch

$$T_\varphi : H^2 \to H^2, f \mapsto p(\varphi f)$$ ◇

(2.2) Satz
Sei $\varphi \in L^\infty(\mathbb{T})$. T_φ ist kompakt genau dann, wenn $\varphi = 0$. ◇

Beweis
Wir wissen bereits, dass die Menge der trigonometrischen Polynome $\epsilon_n : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$, $\lambda \mapsto \lambda^n$, $n \in \mathbb{N}$ eine Orthonormalbasis von H^2 bildet. Darauf aufbauend definiert ist die (einseitige) Verschiebungsabbildung $u : H^2 \to H^2$, $u(\epsilon_n) := \epsilon_{n+1}$.

Dann gilt:

$$u^{*n}(\epsilon_m) = \begin{cases} \epsilon_{m-n} & \text{, falls } m \geq n \\ 0 & \text{, falls } m < n \end{cases}$$

H^2 ist ein Hilbertraum und die ϵ_m bilden eine Orthonormalbasis. Für die Orthogonalentwicklung eines $f \in H^2$ gilt deshalb unter der Abbildung u^{*n}:

$$||u^{*n}(f)||^2 = \left|\left| \sum_{m=n}^{\infty} \langle f, \epsilon_m \rangle \, \epsilon_{m-n} \right|\right|^2 = \sum_{m=n}^{\infty} |\langle f, \epsilon_m \rangle|^2$$

Die Folge $(u^{*n}(f))_n$ konvergiert also gegen 0 für $n \to \infty$.

Für die Operatoren $v \in \mathscr{L}(H^2)$ mit endlichem Rang existiert eine Darstellung (Satz (3.4)) der Form: $v = \sum_{j=1}^{n} f_j \otimes g_j$ mit Elementen $f_1, \dots, f_n, g_1, \dots, g_n \in H^2$. Damit ergibt sich für alle $m \in \mathbb{N}$ $u^{*m}v = \sum_{j=1}^{n} u^{*m}(f_j) \otimes g_j$ und es folgt, dass $\lim_{m\to\infty} u^{*m}v = 0$. v hat endlichem Rang, außerdem sind die Rang-endlichen Operatoren dicht in $\mathscr{K}(H^2)$, also gilt $\lim_{m\to\infty} u^{*m}v = 0\ \forall v \in \mathscr{K}(H^2)$.
Wir berechnen (mit (3.10)) $u^*T_\varphi u = T_{\overline{\epsilon_1}} T_\varphi T_{\epsilon_1} = T_{\overline{\epsilon_1}\varphi\epsilon_1} = T_\varphi$. Damit gilt:

$$\left|\left|T_\varphi\right|\right| = \left|\left|u^{*m}T_\varphi u^m\right|\right| \leq \left|\left|u^{*m}T_\varphi\right|\right|$$

Wir haben eben gezeigt, dass für alle kompakten Operatoren $v \in \mathscr{K}(H^2)$ gilt:
$\lim_{m\to\infty} u^{*m}v = 0$.

Ist also T_φ kompakt folgt aus der eben gezeigten Normabschätzung sofort $T_\varphi = 0$, also $\varphi = 0$.

Ist andererseits $\varphi = 0$, so ist $T_\varphi = 0$ und deshalb kompakt. □

(2.3) Satz
Sei $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ und $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$, dann sind $T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}$ und $T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi}$ kompakte Operatoren. ◇

Beweis
Wir zeigen zunächst $T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi} \in \mathscr{K}(H^2)$ für $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ und $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$: Die trigonometrischen Polynome Γ liegen dicht in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Dies können wir mit Hilfe der aus (3.7) bekannten Abschätzung $\left|\left|T_\varphi\right|\right| \leq ||\varphi||_\infty$ und der Linearität von $\varphi \mapsto T_\varphi$ ausnutzen und o.B.d.A annehmen dass φ trigonometrisches Polynom ist, denn für eine Folge von trigonometrischen Polynomen φ_n mit $\varphi_n \to \varphi$ gilt:
$\left|\left|T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi} - (T_\psi T_{\varphi_n} - T_{\psi\varphi_n})\right|\right| = \left|\left|T_\psi(T_\varphi - T_{\varphi_n}) - (T_{\psi\varphi} - T_{\psi\varphi_n})\right|\right| =$
$\left|\left|T_\psi T_{\varphi-\varphi_n} - T_{\psi(\varphi-\varphi_n)}\right|\right| \leq \left|\left|T_\psi\right|\right| ||\varphi - \varphi_n|| + ||\psi|| \, ||\varphi - \varphi_n|| \to 0$ für $n \to \infty$.

Wir nutzen nochmals die Linearität von $\varphi \mapsto T_\varphi$ und können deshalb sogar O.B.d.A $\varphi = \epsilon_n$ annehmen für eine ganze Zahl n. Falls $n \geq 0$ so gilt nach Satz (3.10) $T_\psi T_{\epsilon_n} = T_{\psi\epsilon_n}$. Also bleibt nur zu zeigen: $T_\psi T_{\epsilon_{-k}} - T_{\psi\epsilon_{-k}} \in \mathscr{K}(H^2)$ für alle positiven k. Dies zeigen wir mit Induktion:

Sei $f \in H^2$, dann gilt unter Verwendung der Orthogonalentwicklung von f:

$$T_\psi T_{\epsilon_{-1}}(f) = p(\psi p(\epsilon_{-1}f)) = p(\psi(\epsilon_{-1}f - \langle f, \epsilon_0\rangle\epsilon_{-1})) = T_{\psi\epsilon_{-1}}(f) - \langle f, \epsilon_0\rangle p(\psi\epsilon_{-1})$$

Damit hat der Operator $T_\psi T_{\epsilon_{-1}} - T_{\psi\epsilon_{-1}}$ höchstens Rang 1, ist also kompakt.

Sei also für $k \in \mathbb{N}$ $T_\psi T_{\epsilon_{-k}} - T_{\psi\epsilon_{-k}} \in \mathcal{K}(H^2)$ für alle $\psi \in L^\infty(\mathbb{T})$.Dann gilt:

$$T_\psi T_{\epsilon_{-k-1}} - T_{\psi\epsilon_{-k-1}} = \underbrace{(T_\psi T_{\epsilon_{-k}} - T_{\psi\epsilon_{-k}})}_{\text{nach Ind. Vor. kompakt}} \underbrace{T_{\epsilon_{-1}}}_{\text{stetig}} + \underbrace{T_{\psi\epsilon_{-k}} T_{\epsilon_{-1}} - T_{(\psi\epsilon_{-k})\epsilon_{-1}}}_{\substack{\text{Ind. Vor., da } \psi\epsilon_{-k} \in L^\infty,\ \epsilon_{-1} \in \mathcal{C}(\mathbb{T}) \\ ||\psi\epsilon_{-k}|| \leq ||\psi||, \text{ denn: } ||\epsilon_{-k}||=1}}$$

Dies ist also kompakt und damit folgt der zweite Teil der Behauptung. Die Kompaktheit des Operators $T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}$ lässt sich nun auf den schon bewiesenen Teil zurückführen: Mit ψ ist auch $\overline{\psi}$ in $L^\infty(\mathbb{T})$, ebenso ist für φ auch $\overline{\varphi}$ in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Die eben gezeigte Behauptung gilt für alle solche ψ und φ. Außerdem ist ein Operator kompakt genau dann, wenn sein Adjungierter Operator kompakt ist. Damit erhält man:

$$T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi} = (T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi})^{**} = \underbrace{(T_{\overline{\psi}} T_{\overline{\varphi}} - T_{\overline{\psi}\overline{\varphi}})}_{\in \mathcal{K}(H^2) \text{ s.o.}}{}^* \in \mathcal{K}(H^2)$$

□

(2.4) Definition (Toeplitz-Algebra)
Die von den Toeplitz-Operatoren T_φ mit stetigem Symbol φ erzeugte C^*-Algebra A heißt *Toeplitz-Algebra*. ◇

(2.5) Satz
$\mathcal{K}(H^2)$ ist das Kommutator-Ideal der Toeplitz-Algebra A. ◇

Beweis
Sei K ein abgeschlossener Untervektorraum von H^2, der bezüglich A invariant ist. Die einseitige Verschiebungsabbildung u liegt in A, also ist speziell K invariant unter u. Es folgt außerdem, dass auch $K^\perp$ invariant unter u ist: Sei $f \in K^\perp, x \in K$. Zeige $u(f) \in K^\perp$: $\langle u(f), x\rangle = \langle f, u^*(x)\rangle = 0$, denn $u^*(x) \in K$, da K invariant unter A und $u^* \in A$ liegt. x war beliebig, also gilt $\langle u(f), x\rangle = 0$ für alle $x \in K$. Demnach ist $K^\perp$ invariant unter u.

In anderen Worten: K reduziert die einseitige Verschiebungsabbildung u.

Damit kann K nach Satz (3.9) nur 0 oder H^2 selbst sein. Deshalb ist (nach Definition) A eine irreduzible Unteralgebra von $\mathcal{L}(H^2)$.

$p = 1 - uu^* = T_1 - T_{\epsilon_1} T_{\epsilon_{-1}}$ ist ein Operator mit Rang 1, denn:
$u^*(\epsilon_m) = \begin{cases} \epsilon_{m-1} & m > 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases}$, $uu^*(\epsilon_m) = \begin{cases} \epsilon_m & m > 0 \\ 0 & m = 0 \end{cases}$, $1 - uu^*(\epsilon_m) = \begin{cases} 0 & m > 0 \\ \epsilon_0 & m = 0 \end{cases}$
Da nun p den Rang 1 hat ist also $p \in A \cap \mathcal{K}(H^2)$. Nach (3.6) ist damit $\mathcal{K}(H^2) \subset A$.

$\mathscr{K}(H^2)$ enthält das Kommutator-Ideal I von A: Für $T_\varphi, T_\psi \in A$ ist $T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi}$ und $T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi}$ in $\mathscr{K}(H^2)$, also auch die Differenz $T_\varphi T_\psi - T_{\varphi\psi} - (T_\psi T_\varphi - T_{\psi\varphi})$. Wegen $T_{\psi\varphi} = T_{\varphi\psi}$ ergibt dies gerade $T_\varphi T_\psi - T_\psi T_\varphi = [T_\varphi, T_\psi] \in \mathscr{K}(H^2)$.

$I \neq 0$, denn $p = [u, u^*] \in I$. $\mathscr{K}(H^2)$ ist einfach (Satz (3.8)), deshalb gilt $I = \mathscr{K}(H^2)$.□

(2.6) Satz
Die Abbildung ψ ist ein $*$-Isomorphismus.

$$\psi : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to A/\mathscr{K}(H^2), \varphi \mapsto T_\varphi + \mathscr{K}(H^2)$$ ◇

Beweis
Aus Satz (3.7) folgt sofort: ψ ist linear und erhält die Adjungierten.

Nach Lemma (2.3) ist ψ multiplikativ: Für $f, g \in C(\mathbb{T})$ ist

$$\psi(fg) = T_{fg} + \mathscr{K}(H^2) = T_{fg} + T_f T_g - T_{fg} + \mathscr{K}(H^2) = T_f T_g + \mathscr{K}(H^2) = \psi(f)\psi(g)$$

Also ist ψ ein $*$-Homomorphismus. Die Toeplitz-Operatoren T_φ, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, erzeugen die Toeplitz-Algebra A, also wird $A/\mathscr{K}(H^2)$ durch die Elemente $T_\varphi + \mathscr{K}(H^2)$, $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, erzeugt. Somit ist ψ surjektiv. Injektivität folgt aus Satz (2.2). □

(2.7) Korollar
Sei $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. T_φ ist Fredholm genau dann, wenn φ nirgends verschwindet. ◇

Beweis
Nach Atkinson (Satz (1.5)) ist T_φ Fredholm genau dann, wenn $T_\varphi + \mathscr{K}(H^2)$ invertierbar ist in $\mathscr{L}(H^2)/\mathscr{K}(H^2)$. Es ist $A/\mathscr{K}(H^2) \subset \mathscr{L}(H^2)/\mathscr{K}(H^2)$ und beides sind unitäre C^*-Algebren. Mit Hilfe von Satz (3.5) folgt, dass die Invertierbarkeit in $\mathscr{L}(H^2)/\mathscr{K}(H^2)$ äquivalent zur Invertierbarkeit in $A/\mathscr{K}(H^2)$ ist.

Das bedeutet also, dass T_φ Fredholm ist genau dann, wenn $T_\varphi + \mathscr{K}(H^2)$ invertierbar ist in $A/\mathscr{K}(H^2)$. Aus Theorem (2.6) folgt, dass T_φ Fredholm ist genau dann, wenn φ invertierbar ist in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, d.h. es gibt ein $\varphi^{-1} \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ mit $\varphi(z)\varphi^{-1}(z) = 1$. Dies gilt genau dann, wenn φ nirgends verschwindet. □

(2.8) Definition (Wesentliches Spektrum)
Für einen Operator $A \in \mathscr{L}(X)$ bezeichnen wir $\sigma_e(A)$, die Menge aller $\lambda \in \mathbb{C}$, für die $\lambda - A$ kein Fredholm-Operator ist, als *wesentliches Spektrum* oder auch als *essentielles Spektrum*. ◇

(2.9) Korollar
Sei $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, dann ist $\sigma_\epsilon(T_\varphi) = \varphi(\mathbb{T})$. Deswegen ist das wesentliche Spektrum eines Toeplitz-Operators mit stetigem Symbol stets zusammenhängend. $\diamond$

Beweis
Aus der Atkinson Charakterisierung eines Fredholm-Operators (Satz (1.5)) und aus Satz (2.6) folgt $\sigma_e(T_\varphi) = \sigma(T_\varphi + K(H^2)) = \sigma(\varphi) = \varphi(\mathbb{T})$, denn:

$$
\begin{aligned}
\sigma_e(T_\varphi) &\overset{\text{Def.}}{=} \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - T_\varphi \text{ ist nicht Fredholm }\} \\
&\overset{(1.5)}{=} \left\{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - T_\varphi + \mathscr{K}(H^2) \text{ ist nicht invertierbar in } \mathscr{L}(H^2)/\mathscr{K}(H^2)\right\} \\
&\overset{\text{Def.}}{=} \sigma(T_\varphi + \mathscr{K}(H^2)) \overset{(2.6)}{=} \sigma(\varphi) \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C}; \lambda - \varphi \text{ ist nicht invertierbar in } \mathcal{C}(\mathbb{T})\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{ es gibt ein } z \in \mathbb{T} \text{ mit } (\lambda - \varphi)(z) = 0\} \\
&= \{\lambda \in \mathbb{C}; \text{ es gibt ein } z \in \mathbb{T} \text{ mit } \lambda = \varphi(z)\} \\
&= \varphi(\mathbb{T})
\end{aligned}
$$

Aus der Topologie ist bekannt, dass das Bild von zusammenhängenden Mengen unter stetigen Abbildungen wiederum zusammenhängend ist. $\varphi(\mathbb{T})$ ist also zusammenhängend, da $\mathbb{T}$ zusammenhängend ist, und somit ist das essentielle Spektrum von T_φ ebenfalls zusammenhängend. $\square$

(2.10) Lemma
Sei φ invertierbar in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Es existiert eine eindeutige ganze Zahl $n \in \mathbb{Z}$ mit der Eigenschaft, dass $\varphi = \epsilon_n e^\psi$ für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. $\diamond$

Beweis
Vorbemerkung: Sei $||1 - \varphi|| < 1$. Da $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ gilt, folgt daraus die Ungleichung: $|1 - \varphi(f)| < 1 \, \forall f \in \mathbb{T}$. Interpretiert man dies, so erkannt man, dass der Wertebereich von φ in einer offenen Kreisscheibe um 1 mit Radius 1 liegt. Damit ist die Abbildung $\psi = \ln \circ \varphi$ für den Hauptzweig des Logarithmus $ln : \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0] \to \mathbb{C}$ wohldefiniert und deshalb existiert eine Darstellung $\varphi = e^\psi$.
Seien φ, φ' invertierbare Elemente des $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ mit $||\varphi - \varphi'|| < \left|\left|\varphi^{-1}\right|\right|^{-1}$. Damit lässt sich zeigen: $\left|\left|1 - \varphi^{-1}\varphi'\right|\right| = \left|\left|\varphi^{-1}\varphi - \varphi^{-1}\varphi'\right|\right| \leq \left|\left|\varphi^{-1}\right|\right| \, ||\varphi - \varphi'|| < 1$. Mit dem bereits bewiesenen Teil folgt die Darstellung $\varphi^{-1}\varphi' = e^\psi$ für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, also gilt: $\varphi' = \varphi e^\psi$ für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Diese Aussage verwenden wir jetzt für den Beweis des Lemmas.

Wir beginnen mit der Funktion $\varphi = \epsilon_1 - \lambda$ für $|\lambda| \neq 1$. Diese Funktion aus $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ ist invertierbar und stetig. Außerdem erfüllt sie die Behauptung des Lemmas, denn:

- Falls $|\lambda| < 1$, dann ist $||\varphi - \epsilon_1|| = |\lambda| < 1 = \left|\left|\epsilon_1^{-1}\right|\right|^{-1}$. Aus der Vorbemerkung folgt: $\varphi = \epsilon_1 e^{\psi}$ für ein passendes $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.
- Falls $|\lambda| > 1$, dann ist $\left|\left|(1-\lambda^{-1}\epsilon_1) - 1\right|\right| = \left|\left|\lambda^{-1}\epsilon_1\right|\right| < 1$, also ist wegen der Vorbemerkung $1 - \lambda^{-1}\epsilon_1$ von der Form e^{ψ} für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Multipliziert man dies mit $-\lambda$ erhält man $\epsilon_1 - \lambda = -\lambda e^{\psi} = e^{\psi'}$ für ein passendes anderes $\psi' \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$.

Damit gilt die Behauptung für diese φ.

Sei nun φ Polynom in ϵ_1. Wegen des Fundamentalsatzes der Algebra lässt sich jedes Polynom vom Grad m als Produkt aus einer Zahl $\lambda \in \mathbb{C}$ und m Einzeltermen $\epsilon_1 - \lambda_m$ für geeignete $\lambda_m \in \mathbb{C}, |\lambda_m| \neq 1$ darstellen. $|\lambda_m| \neq 1$ gilt, denn φ ist invertierbar und somit gibt es keine Nullstellen in $\mathbb{T}$. Durch Umsortieren und die Darstellung von λ mit der Eulerformel für komplexe Zahlen erhalten wir wiederum die gewünschte Form $\varphi = e^{\psi}$ für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Da φ ein beliebiges Polynom war, erhalten wir somit die Behauptung des Lemmas für alle Funktionen $\varphi \in \Gamma_+$.

Sei nun $\varphi \in \Gamma$. Durch die Transformation mit ϵ_N für ein geeignetes $N > 0$ lässt sich jedes Element aus Γ nach Γ_+ verschieben. Darum können wir die Darstellung $\varphi = \epsilon_{-N}\varphi'$ für ein $\varphi' \in \Gamma_+$ finden. Womit wir nun für alle $\varphi \in \Gamma$ das Lemma bewiesen haben.

Schließlich liegt Γ dicht in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Also folgt die Existenz einer solchen Zahl n für alle Funktionen aus $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ aus der Vorbemerkung.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit dieses n zu zeigen. Dazu zeigen wir, dass aus $\epsilon_n = e^{\psi}$ folgt, dass $n = 0$.

Sei für ein $n \in \mathbb{Z}$, $\epsilon_n = e^{\psi}$ für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Die Abbildung $\alpha : [0,1] \to \mathbb{Z}$ sei definiert durch $t \mapsto ind(T_{e^{t\psi}})$.
Behauptung: α ist stetig. Definiere Φ als die Menge aller Fredholmoperatoren auf H^2. Die Abbildung $ind : \Phi \to \mathbb{Z}, u \mapsto ind(u)$ ist nach Satz (3.3) stetig. Die Abbildung $s : [0,1] \to \mathcal{C}(\mathbb{T}), t \mapsto e^{t\psi}$ ist stetig als Verknüpfung stetiger Funktionen für alle $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Die Abbildung $T : \mathcal{C}(\mathbb{T}) \to \mathscr{L}(H^2), \varphi \mapsto T_{\varphi}$ ist beschränkt, also stetig und es gilt $T \circ s \subset \Phi$ wegen (2.7).
Die Verkettung $ind \circ T \circ s$ ist also stetig als Verkettung stetiger Funktionen.

α ist stetig, das Bild ist diskret und der Definitionsbereich zusammenhängend. Damit ist die Abbildung notwendigerweise konstant. Deshalb gilt:

$$-n = ind(T_{e^\psi}) = \alpha(1) = \alpha(0) = ind(T_1) = ind(1) = 0$$

Also folgt die Behauptung. □

(2.11) Definition (Windungszahl)
Das eindeutig bestimmte $n \in \mathbb{Z}$ aus Lemma (2.10) heißt *Windungszahl* von φ (bezüglich dem Ursprung) und wird durch $wn(\varphi) := n$ bezeichnet.

(2.12) Bemerkung (Bezug zur Funktionentheorie)
φ invertierbar bedeutet, dass $0 \notin \varphi(\mathbb{T})$. Das heißt, dass $\varphi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ist ein geschlossener Weg in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Die Faktorisierung $\varphi = \epsilon_n e^\psi$ aus dem vorhergenden Satz ist dann homotop zu ϵ_n. Betrachte dazu die Abbildung $H(z,t) = \epsilon_n(z)e^{t\psi(z)}$.
Dies bedeutet, dass die Windungszahl aus (2.11) mit der Definition aus der Funktionentheorie übereinstimmt, da $\epsilon_n : z \mapsto z^n$ den positiv orientierten Kreis n-mal durchläuft. Das heißt: $wn(\varphi) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varphi(\mathbb{T})} \frac{1}{\xi} d\xi$ ◇

(2.13) Satz
Sei φ invertierbar in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$.

a) Für den Fredholm-Index von T_φ gilt: $ind(T_\varphi) = -wn(\varphi)$.

b) Es sind äquivalent:
   (i) T_φ ist invertierbar
   (ii) T_φ ist Fredholm mit Index 0
   (iii) $\varphi = e^\psi$ für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ ◇

Beweis
Vorbemerkung 1: Sei ψ ein trigonometrisches Polynom, d.h. $\psi = \sum_{|n|\le N} \lambda_n \epsilon_n$ für ein $N > 0$ und $\lambda_n \in \mathbb{C}$. Wir schreiben $\psi' = \sum_{n=0}^{N} \lambda_n \epsilon_n$ und $\psi'' = \sum_{n=1}^{N} \lambda_{-n}\epsilon_{-n}$ und erhalten $\psi = \psi' + \psi''$. Es gilt $\psi', \overline{\psi''} \in H^\infty(\mathbb{T})$ und $H^\infty(\mathbb{T})$ ist eine abgeschlossene Unteralgebra von $L^\infty(\mathbb{T})$. Deshalb folgt sofort, dass $e^{\psi'}$ und $e^{\overline{\psi''}}$ ebenfalls in $H^\infty(\mathbb{T})$ liegen. Jetzt erhalten wir mit (3.10) $T_{e^{-\psi'}}T_{e^{\psi'}} = T_{e^{-\psi'}e^{\psi'}} = T_1 = 1$ und $T_{e^{\psi'}}T_{e^{-\psi'}} = T_{e^{\psi'}e^{-\psi'}} = T_1 = 1$, also ist $T_{e^{\psi'}}$ invertierbar. Auf ähnliche Weise lässt sich mit dem 2. Teil von (3.10) folgern, dass $T_{e^{\psi''}}$ invertierbar ist.

Vorbemerkung 2: Γ ist dicht in $\mathcal{C}(\mathbb{T})$, deshalb können wir für jedes $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ ein trigonometrisches Polynom $\psi = \psi' + \psi''$ so wie in der Vorbemerkung 1 finden, so dass gilt: $\left|\left|1-e^{\varphi-\psi}\right|\right| < 1$. Um dies nachzurechnen schätze $\left|\left|1-e^{\varphi-\psi}\right|\right|$ mithilfe der Reihenentwicklung der e-Funktion ab und verwende dafür $||\varphi-\psi|| < \epsilon$ mit $\epsilon \in (0, ln(2))$.

Die Abbildung $\mathcal{C}(\mathbb{T}) \to A, \varphi \mapsto T_\varphi$ ist ein $*$-Isomorphismus, also isometrisch. Außerdem ist $T_1 = 1$ und die Toeplitz-Operatoren sind linear. Darum gilt die Gleichung $||1-T_{e^{\varphi-\psi}}|| = \left|\left|T_{1-e^{\varphi-\psi}}\right|\right| = \left|\left|1-e^{\varphi-\psi}\right|\right| < 1$. Deshalb ist der Operator $T_{e^{\varphi-\psi}}$ invertierbar (siehe Einführungsvortrag). Mit (3.10) erhalten wir die Darstellung $T_{e^\varphi} = T_{e^{\psi''}e^{\varphi-\psi}e^{\psi'}} = T_{e^{\psi''}}T_{e^{\varphi-\psi}}T_{e^{\psi'}}$. Also ist T_{e^φ} Produkt aus invertierbaren Operatoren und somit selbst invertierbar.

Zum Beweis von Teil (a):

Ein beliebiges invertierbares Element $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ habe die Windungszahl n. Sei O.B.d.A $n \geq 0$, sonst ersetzte φ durch $\overline{\varphi}$. Aus dem vorherigen Satz (2.10) ergibt sich die Darstellung $\varphi = \epsilon_n e^\psi = e^\psi \epsilon_n$ für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ und $T_\varphi = T_{e^\psi}T_{\epsilon_n}$ ergibt sich wiederum aus (3.10). T_{e^ψ} ist invertierbar nach Vorbemerkung 2 und hat deshalb den Index 0 (denn aus Bijektivität folgt $dim(kern(T_{e^\psi})) = 0$ und $codim(H^2, T_{e^\psi}(H^2)) = 0$). Wir können also folgern:

$$ind(T_\varphi) \overset{(3.12)}{=} ind(T_{e^\psi}) + ind(T_{\epsilon_n}) = ind(T_{\epsilon_n}) = -n$$

Zum Beweis von Teil (b):

$(ii) \Rightarrow (iii)$:

Sei für ein invertierbares $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ der Operator T_φ Fredholm mit Index 0. Nach Satz (2.10) existiert die Darstellung $\varphi = \epsilon_n e^\psi$ für eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ und $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Nach Voraussetzung und Teil (a) ist $-wn(\varphi) = ind(T_\varphi) = 0$ und damit folgt aus der Definition der Windungszahl die Behauptung.

$(iii) \Rightarrow (ii)$:

Sei $\varphi = e^\psi$ für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ und φ invertierbar. Mit Satz (2.7) ist T_φ Fredholm. Es gilt $0 = -wn(\varphi) = ind(T_\varphi)$.

$(ii) \Rightarrow (i)$:

Folgt direkt aus Satz (1.3).

$(i) \Rightarrow (ii)$:

Aus der Invertierbarkeit von φ folgt bereits mit Satz (2.10) die Darstellbarkeit von φ als $\varphi = \epsilon_n e^\psi$ für ein $\psi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ und (mit (a)), dass T_φ Fredholm mit $ind(T_\varphi) = -wn(\varphi)$. Aus der Invertierbarkeit von T_φ folgt, dass $ind(T_\varphi) = 0$. □

(2.14) Satz
Das Spektrum eines Toeplitz-Operators T_φ mit stetigem Symbol $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$ ist zusammenhängend. ◇

Beweis
Sei $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$. Aus Satz (2.13) folgt:

$$\begin{aligned}
\sigma(T_\varphi) &= \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda - T_\varphi \text{ ist nicht invertierbar } \right\} \\
&\overset{(2.13)\text{b}}{=} \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda - T_\varphi \text{ ist nicht Fredholm mit Index } 0\right\} \\
&= \sigma_e(T_\varphi) \cup \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda - T_\varphi \text{ ist Fredholm mit Index ungleich } 0\right\} \\
&\overset{(2.9)}{=} \varphi(\mathbb{T}) \cup \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda - T_\varphi \text{ ist Fredholm mit Index ungleich } 0\right\} \\
&= \varphi(\mathbb{T}) \cup \bigcup_{n=-\infty, n\neq 0}^{\infty} \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda - T_\varphi \text{ ist Fredholm mit Index gleich } n\right\}
\end{aligned}$$

Für das weitere Vorgehen benötigen wir einige Resultate aus der Topologie. Siehe dazu Satz (3.1).

Wir zerlegen die Menge $\mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{T})$ disjunkt in ihre Zusammenhangskomponenten U_i (Siehe Satz (3.1)(i+ii)) und schreiben: $\mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{T}) = \dot{\bigcup}_{j\in J} U_j$ für eine geeignete Indexmenge J. Damit sind alle U_i zusammenhängend und wegen Satz (3.1)(v) auch offen.

Wir definieren $V_n := \left\{\lambda \in \mathbb{C} | \lambda - T_\varphi \text{ ist Fredholm mit Index gleich } n\right\}$ und zerlegen die Menge $\mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{T})$ ebenfalls disjunkt in $\mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{T}) = \dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{Z}} V_n$, wobei die V_n ebenfalls offen sind. Deshalb liegt jedes der U_i in einem V_n. Also gilt für ein geeignetes $J' \subset J$: $\sigma(T_\varphi) = \varphi(\mathbb{T}) \dot{\cup} \dot{\bigcup}_{j\in J'} U_j$.

Wir zeigen durch einen Widerspruch, dass $\partial U_j \subset \varphi(\mathbb{T})$:
Angenommen $z \in \partial U_j \setminus \varphi(\mathbb{T})$. Da $z \notin \varphi(\mathbb{T})$ folgt, dass $z \in U_i$ für ein i. Es ist jedoch $\partial U_j \subset \overline{\mathbb{C} \setminus U_j} = \mathbb{C} \setminus U_j$, also kann z nicht in U_j sein und es ist $i \neq j$. Damit ist U_i offene Umgebung von z und gleichzeitig ist $z \in \overline{U_j}$. Darum gibt es ein $w \in U_i \cap U_j$. Dies ist jedoch der gesuchte Widerspruch zu $i \neq j$, denn die U_i sind alle disjunkt.

Wir zeigen, dass $\partial U_j \neq \emptyset$:
Aus U_j zusammenhängend folgt mit Satz (3.1)(iii), dass $\overline{U_j} = U_j \cup \partial U_j$ zusammenhängend ist. Wäre $\partial U_j = \emptyset$, dann wäre U_j offen und abgeschlossen in $\mathbb{C}$ und damit wäre $U_j = \mathbb{C}$, da $\mathbb{C}$ zusammenhängend ist. Das ist jedoch nicht möglich, denn $U_j \subset \mathbb{C} \setminus \varphi(\mathbb{T}) \subsetneqq \mathbb{C}$.

Nun zeigen wir, dass $\varphi(\mathbb{T}) \cup U_j$ zusammenhängend ist für alle $j \in J'$:
Es gilt $\overline{U_j}^{\mathbb{C}} = U_j \cup \partial U_j = (U_j \cap \sigma(T_\varphi)) \cup (\partial U_j \cap \sigma(T_\varphi)) = \overline{U_j}^{\sigma(T_\varphi)}$ und deshalb $\varphi(\mathbb{T}) \cup U_j = \varphi(\mathbb{T}) \cup U_j \cup \partial U_j = \varphi(\mathbb{T}) \cup \overline{U_j}^{\mathbb{C}} = \varphi(\mathbb{T}) \cup \overline{U_j}^{\sigma(T_\varphi)}$. Mit Satz (3.1)(iii) ist $\varphi(\mathbb{T}) \cup U_j$ zusammenhängend.

Damit können wir den Beweis abschließen: Die Mengen $\varphi(\mathbb{T}) \cup U_i$ und $\varphi(\mathbb{T}) \cup U_j$ haben gemeinsame Punkte und sind zusammenhängend, also ist auch deren Vereinigung zusammenhängend wegen Satz (3.1)(iv). Deshalb ist $\sigma(T_\varphi) = \varphi(\mathbb{T}) \dot\cup \dot\bigcup_{j \in J'} U_j$ zusammenhängend.

§3 verwendete Aussagen ohne Beweis

(3.1) Satz
Sei $A \subset \mathbb{C}$ eine beliebige Menge und $z \in A$.

(i) Die Zusammenhangskomponente von z in A ist die größte zusammenhängende Teilmenge $B \subset A$ mit $z \in B$.

(ii) A zerfällt in disjunkte Zusammenhangskomponenten.

(iii) Ist $B \subset A$ zusammenhängend, $\overline{B}^A = \overline{B} \cap A$ Abschluss von B in A, dann ist auch $\overline{B}^A$ zusammenhängend.

(iv) Sind $B_1, B_2 \subset A$ zusammenhängend und $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$, so ist auch $B_1 \cup B_2$ zusammenhängend.

(v) Ist A offen, dann sind auch die Zusammenhangskomponenten in A offen. $\diamond$

(3.2) Satz (Murphy, Theorem 1.4.5)
Sei u ein kompakter Operator auf einem Banachraum X und sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Dann gilt:

1. Der Raum $kern(u - \lambda)$ ist endlich-dimensional.
2. Der Raum $(u - \lambda)(X)$ ist abgeschlossen und endlich-kodimensional in X. $\diamond$

(3.3) Satz (Murphy, Theorem 1.4.17)
Sei X ein unendlich-dimensionaler Banachraum und sei Φ die Menge der Fredholmoperatoren auf X. Dann ist Φ offen in $\mathscr{L}(X)$ und die Indexfunktion
$ind : \Phi \to \mathbb{Z}, u \mapsto ind(u)$ ist stetig. $\diamond$

(3.4) Satz (Murphy, Theorem 2.4.6)
Sei H ein Hilbertraum. Dann wird der Raum der Operatoren auf H mit endlichem Rang linear erzeugt von den Projektoren mit Rang 1.

Vergleiche dazu Lemma (2.5) aus dem Vortrag "Ideale und positive Funktionale" von S. Dahmen.

Zur Erläuterung:
Sei $F : H \to H$ ein Operator mit endlichem Rang auf dem Hilbertraum H. Die Aussage des Satzes bedeutet, dass zu diesem F ein $N \in \mathbb{N}$ und Elemente $f_i, g_i \in H$, $1 \leq i \leq N$ existieren, so dass gilt: $F = \sum_{i=1}^{N} f_i \otimes g_i$. Hierbei bedeutet die Verknüpfung $\otimes$ für Elemente $x, y, z \in H$: $(x \otimes y)(z) := \langle z, y \rangle\, x$.

Es gelten die Eigenschaften $(x, x', y, y' \in H, u \in \mathscr{L})$

1. $||x \otimes y|| = ||x||\,||y||$
2. $(x \otimes x')(y \otimes y') = \langle y, x' \rangle\,(x \otimes y')$
3. $(x \otimes y)^* = y \otimes x$
4. $u(x \otimes y) = u(x) \otimes y$
5. $(x \otimes y)u = x \otimes u^*(y)$

Wir benötigen die Eigenschaft (4) für einen Beweis.

Vergleiche dazu Lemma (2.6) aus dem Vortrag "Ideale und positive Funktionale" von S. Dahmen. ◇

(3.5) Satz (Vortrag Dieckmann, Satz (4.4))
Sei A eine unitäre C^*-Algebra und $B \subset A$ eine C^*-Unteralgebra mit $e = e_A \in B$. Für $x \in B$ gilt: Ist x invertierbar in A, dann auch in B.

(3.6) Satz (Murphy, Theorem 2.4.9)
Sei A eine irreduzible C^*-Algebra, die auf dem Hilbertraum H operiert und nicht leeren Schnitt mit $\mathcal{K}(H)$ hat. Dann ist $\mathscr{K}(H) \subset A$. ◇

(3.7) Satz (Eigenschaften von Toeplitz-Operatoren, siehe Vortrag Deipenbrock)
Die Abbildung $L^\infty(\mathbb{T}) \to \mathscr{L}(H^2), \varphi \mapsto T_\varphi$ ist linear und erhält die Adjungierten. Es gilt die Ungleichung $||T_\varphi|| \leq ||\varphi||$ ◇

(3.8) Satz (Murphy, Beispiel 3.2.2)
Sei H ein Hilbertraum. Dann ist die C^*-Algebra $\mathscr{K}(H)$ einfach. ◇

(3.9) Satz (Murphy, Theorem 3.5.5, siehe auch Vortrag Deipenbrock)
Die einzigen abgeschlossenen Unterräume von H^2, die die einseitige Verschiebungsabbildung u reduzieren, sind die trivialen Unterräume 0 und H^2. ◇

(3.10) Satz (Murphy, Theorem 3.5.6, siehe auch Vortrag Deipenbrock)
Sei $\varphi \in L^\infty$ und $\psi \in H^\infty$. Dann gilt:

- $T_{\varphi\psi} = T_\varphi T_\psi$
- $T_{\overline{\psi}\varphi} = T_{\overline{\psi}} T_\varphi$ ◇

(3.11) Satz (Open-Mapping-Theorem)
Seien X und Y Banachräume und A ein surjektiver, stetiger, linearer Operator $A : X \to Y$. Dann ist A eine offene Abbildung, d.h. für jede in X offene Menge U ist $A(U)$ offen in Y. ◇

(3.12) Satz (Index-Theorem von Atkinson, Murphy, Theorem 1.4.8)
Seien A, B zwei Operatoren mit $ind(A) < \infty$, $ind(B) < \infty$. Dann gilt:

$$ind(AB) = ind(A) + ind(B)$$ ◇