Positive lineare Funktionale

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 11.12.2008

Holger Wintermayr

Durch die Gelfand-Transformation können wir die Struktur einer abelschen C*-Algebra vollständig im Sinne der eines Funktionenraumes auffassen. Für den nicht-abelschen Fall genügt das nicht, sodass wir allgemeinere Transformationen in Betracht ziehen müssen. Dabei werden die positiv linearen Funktionale eine große Rolle spielen.

Für eine Algebra A sei A^* der dazugehörige Dualraum von A. Ist A eine C*-Algebra so bezeichne A_{sa} die Menge ihrer hermiteschen Elemente und A^+ die Menge ihrer positiven Elemente.

§1 Eigenschaften positiver linearer Funktionale

In diesem Abschnitt ermitteln wir wichtige Eigenschaften positiver linearer Funktionale.

(1.1) Definition
Seien A und B zwei C*-Algebren. Eine lineare Abbildung $\varphi : A \to B$ heißt *positiv*, wenn $\varphi(A^+) \subset B^+$ gilt. $\diamond$

(1.2) Bemerkung

a) Für eine positive lineare Abbildung zwischen zwei C*-Algebren $\varphi : A \to B$ gilt $\varphi(A_{sa}) \subset B_{sa}$ und die Einschränkung $\varphi : A_{sa} \to B_{sa}$ ist monoton steigend.

   Denn:
   Ist $a \in A_{sa}$, so sind $a^+ := 1/2(|a| + a)$ und $a^- := 1/2(|a| - a)$ positiv mit $a = a^+ - a^-$. Dabei ist a^*a positiv und $|a| := (a^*a)^{1/2}$ (vgl. Bemerkung (1.5) des Seminarvortrags „Ideale und positive Funktionale“ (Sophia Dahmen), sowie Bemerkung nach 2.2.4. Theorem G.J. Murphy). Damit gilt $\varphi(a) = \varphi(a^+) - \varphi(a^-)$ und $\varphi(a)$ ist als Differenz zweier positiver Elemente in B hermitesch.

   Sind nun $a, b \in A_{sa}$ mit $a \leq b$, so ist $b - a$ positiv in A und damit $\varphi(b - a) = \varphi(b) - \varphi(a)$ positiv in B. Es folgt $\varphi(a) \leq \varphi(b)$ und φ ist monoton steigend.

b) Jeder *-Homomorphismus ist positiv.

Dazu:
Seien A und B zwei C*-Algebren und $\varphi : A \to B$ ein *-Homomorphismus. Für $a \in A_{sa}$ gilt

$$\varphi(a)^* = \varphi(a^*) = \varphi(a)$$

und $\varphi(a)$ ist somit hermitesch in B.

Um zu zeigen, dass für ein positives $a \in A$ auch $\varphi(a)$ positiv in B ist, genügt es die Inklusion $\sigma(\varphi(a)) \subset \sigma(a)$ zu zeigen. Wir können ohne Einschränkung annehmen, dass A und B ein Einselement besitzen (andernfalls betrachte $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$). Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $\lambda \notin \sigma(a)$. Dann ist $\lambda - a$ invertierbar und es existiert ein $c \in A$ mit

$$(\lambda - a)c = c(\lambda - a) = 1.$$

Damit ist aber $\lambda - \varphi(a)$ auch invertierbar, denn

$$\begin{aligned}(\lambda - \varphi(a))\varphi(c) &= \varphi((\lambda - a)c) = \varphi(1) = 1 = \varphi(1) \\ &= \varphi(c(\lambda - a)) = \varphi(c)(\lambda - \varphi(a)),\end{aligned}$$

da φ ein *-Homomorphismus ist. Also gilt $\lambda \notin \sigma(\varphi(a))$ und die Inklusion ist gezeigt. $\diamond$

(1.3) Beispiel

a) Sei $A = C(T)$ und dm das normierte Bogenlängenmaß auf $T = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Dann ist das lineare Funktional

$$C(T) \to \mathbb{C}, f \mapsto \int f\, dm$$

positiv (und kein Homomorphismus).

Dazu: Die Abbildung ist wegen der Linearität des Integrals linear und offensichtlich kein Homomorphismus. Die hermiteschen Elemente von $C(T)$ sind die reell-wertigen stetigen Funktionen auf T und die positiven Elemente von $C(T)$ genau die positiv reell-wertigen stetigen Funktionen auf T. Damit gilt für ein positives $f \in C(T)$ auch

$$\int f\, dm \geq 0.$$

Daher ist das Funktional positiv.

b) Sei $M_n(\mathbb{C})$ der Raum der $n \times n$ Matrizen über $\mathbb{C}$. Das lineare Funktional

$$M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}, A \mapsto \operatorname{Spur}(A)$$

ist positiv. Beachte, dass für $n > 1$ keine *-Homomorphismen von $M_n(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$ existieren.

Dazu:
Die Spurabbildung ist linear. Sei $A \in M_n(\mathbb{C})^+$. Dann ist A hermitesch, also existiert nach dem Spektralsatz eine unitäre Matrix $S \in M_n(\mathbb{C})$, sodass $S^{-1}AS = D$ gilt und D eine Diagonalmatrix ist, deren Diagonaleinträge genau die Eigenwerte von A sind, welche positiv sind, da A positiv ist. Es gilt $\operatorname{Spur}(A) = \operatorname{Spur}(S^{-1}AS)$ und somit $\operatorname{Spur}(A) \in \mathbb{R}_+$. Weil $\mathbb{R}_+$ aber die Menge der positiven Elemente von $\mathbb{C}$ ist, folgt, dass die Spurabbildung positiv ist.

Sei nun $n > 1$ und φ ein Homomorphismus von $M_n(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$. Es bezeichne 0^n die Nullmatrix, E die Einheitsmatrix und E_{ij} für $1 \leq i, j \leq n$ die Matrix, die an der Stelle (i, j) den Eintrag 1 besitzt und sonst Nullen als Einträge hat. Sei weiter P_{1j} für $1 \leq j \leq n$ die Permutationsmatrix mit Einsen an den Stellen $(1, j), (j, 1)$ und (i, i) für $2 \leq i \leq n$ und $i \neq j$ und Nullen sonst. Da φ ein Homomorphismus ist, muss $\varphi(0^n) = 0$ und $\varphi(E) = 1$ gelten. Wegen $1 = \varphi(E) = \varphi(P_{1j} \cdot P_{1j}) = \varphi(P_{1j})^2$ folgt $\varphi(P_{1j}) \neq 0$ und aus $P_{1j}E_{jj}P_{1j} = E_{11}$ folgert man

$$\varphi(E_{11}) = \varphi(P_{1j}E_{jj}P_{1j}) = \varphi(P_{1j}) \cdot \varphi(E_{jj}) \cdot \varphi(P_{1j}) = \varphi(P_{1j})^2 \cdot \varphi(E_{jj}) = \varphi(E_{jj})$$

für alle $1 \leq j \leq n$. Es gilt aber auch $0 = \varphi(0^n) = \varphi(E_{11} \cdot E_{jj}) = \varphi(E_{11}) \cdot \varphi(E_{jj})$ für alle $2 \leq j \leq n$ und damit hat man $\varphi(E_{jj}) = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$. Nun folgt der Widerspruch wegen

$$0 = \sum_{j=1}^{n} \varphi(E_{jj}) = \varphi(\sum_{j=1}^{n} E_{jj}) = \varphi(E) = 1.$$

Also kann es keinen Homomorphismus von $M_n(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$ geben und folglich auch keinen *-Homomorphismus von $M_n(\mathbb{C})$ nach $\mathbb{C}$.

c) Sei A eine C*-Algebra und τ ein positives lineares Funktional auf A. Dann ist die Abbildung

$$A \times A \to \mathbb{C}, (a, b) \mapsto \tau(b^*a)$$

eine positive Sesquilinearform auf A, für die die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung $|\tau(b^*a)| \leq \tau(a^*a)^{1/2}\tau(b^*b)^{1/2}$ für alle $a, b \in A$ gilt. Weiter besitzt die Funktion $a \mapsto \tau(a^*a)^{1/2}$ die Eigenschaften einer Seminorm auf A.

Mit der Linearität von τ, sowie der konjugierten Linearität der Involutionsabbildung folgt die Linearität der Abbildung in der ersten Komponente und die konjungierte Linearität in der zweiten Komponente. Da a^*a für jedes $a \in A$ ein positives Element von A ist (siehe Satz (1.11) des Seminarvortrags „Ideale und positive Funktionale“ (Sophia Dahmen)), gilt $\tau(a^*a) \geq 0$ für alle $a \in A$. Seien nun $a, b \in A$. Dann gilt

$$0 \leq \tau\left((a+ib)^*(a+ib)\right) = \tau(a^*a) + \tau(b^*b) - i\tau(b^*a) + i\tau(a^*b)$$

und es folgt $i(\tau(a^*b) - \tau(b^*a)) \in \mathbb{R}$ und damit $\operatorname{Re}(\tau(a^*b)) = \operatorname{Re}(\tau(b^*a))$. Genauso gilt

$$0 \leq \tau\left((a+b)^*(a+b)\right) = \tau(a^*a) + \tau(b^*b) + \tau(b^*a) + \tau(a^*b)$$

und es folgt $\tau(a^*b) + \tau(b^*a) \in \mathbb{R}$ und damit $\operatorname{Im}(\tau(a^*b)) = -\operatorname{Im}(\tau(b^*a))$. Daraus ergibt sich $\tau(b^*a) = \overline{\tau(a^*b)}$ für alle $a, b \in A$. Folglich ist die Abbildung eine positive Sesquilinearform und genügt demnach auch der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung $|\tau(b^*a)| \leq \tau(a^*a)^{1/2}\tau(b^*b)^{1/2}$ für alle $a, b \in A$. Dabei muss der Beweis der Ungleichung, den man vom Skalarprodukt kennt, aufgrund der fehlenden Definitheit angepasst werden (siehe Buch von Hirzebruch und Scharlau unter 20.3).

(Alternativ: Ausfaktorisieren des Nullraums: Wenn $(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{C}$ eine positive Sesqui-Linearform ist, dann definiert man $N = \{x \in X : (x,x) = 0\}$, und eine Sesqui-Linearform $\langle\cdot,\cdot\rangle$ auf X/N durch $\langle x+N, y+N\rangle = (x,y)$. Dann folgt aus Cauchy-Schwarz für $\langle\cdot,\rangle\cdot$ sofort Cauchy-Schwarz für $(\cdot,\cdot)$.)

Die Funktion $a \mapsto \tau(a^*a)^{1/2}$ erfüllt die Eigenschaften einer Seminorm auf A:
Die erste Seminormeigenschaft (Definitheit) erhält man aus der Positivität von τ und die zweite und dritte Seminormeigenschaft (Homogenität und Dreiecksungleichung) ergeben sich wie bei einem Skalarprodukt. $\diamond$

(1.4) Vorbemerkung
Sei τ ein lineares Funktional auf einer C*-Algebra A und $M \in \mathbb{R}_+$, so dass $|\tau(a)| \leq M$ für alle positiven Elemente der abgeschlossenen Einheitskugel von A gilt. Dann ist τ beschränkt mit $\|\tau\| \leq 4M$. Dies zeigen wir:

Sei a zunächst ein hermitesches Element von A mit $\|a\| \leq 1$. Dann sind $a^+ = 1/2(|a| + a)$ und $a^- = 1/2(|a| - a)$ positive Elemente der abgeschlossenen Einheitskugel von A. Demnach erhält man

$$|\tau(a)| = |\tau(a^+ - a^-)| = |\tau(a^+) - \tau(a^-)| \leq |\tau(a^+)| + |\tau(a^-)| \leq 2M.$$

Sei a nun ein beliebiges Element aus der abgeschlossenen Einheitskugel von A. Dann existieren eindeutig bestimmte hermitesche Elemente $b, c \in A$ mit $a = b + ic$, nämlich $b = \frac{1}{2}(a + a^*)$ und $c = \frac{1}{2i}(a - a^*)$. Damit sind b und c Real- und Imaginärteil von a mit $\|b\|, \|c\| \leq 1$. Dann folgt

$$|\tau(a)| = |\tau(b + ic)| = |\tau(b) + i\tau(c)| \leq |\tau(b)| + |\tau(c)| \leq 4M$$

und damit $\|\tau\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\tau(a)| \leq 4M$. ◇

(1.5) Satz
Jedes positive lineare Funktional einer C*-Algebra ist beschränkt. ◇

Beweis
Sei τ ein positives lineares Funktional einer C*-Algebra A. Angenommen τ ist nicht beschränkt. Nach der Vorbemerkung (1.4) gilt

$$\sup_{a \in S} \tau(a) = +\infty,$$

wobei S die Menge der positiven Elemente mit Norm nicht größer als 1 bezeichne. Daher existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in S, sodass $2^n \leq \tau(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Setze nun $a := \sum_{n=0}^{\infty} a_n / 2^n$. Wegen $a_n / 2^n \in A^+$ für alle $n \in \mathbb{N}$ (siehe Vortrag Lemma (1.12) „Ideale und positive Funktionale“ (Sophia Dahmen)), ist $a \in A^+$, aufgrund der Abgeschlossenheit von A^+ (siehe Bemerkung nach 2.2.2. Lemma G.J. Murphy). Nun gilt $1 \leq \tau(a_n / 2^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und da τ monoton steigend ist, erhält man

$$N \leq \sum_{n=0}^{N-1} \tau(a_n / 2^n) = \tau(\sum_{n=0}^{N-1} a_n / 2^n) \leq \tau(a).$$

für alle $N \in \mathbb{N}$. Also ist $\tau(a)$ eine obere Schranke von $\mathbb{N}$, was ein Widerspruch ist. Es folgt, dass τ beschränkt ist. □

(1.6) Bemerkung
Der Satz (1.5) liefert die Stetigkeit positiver Funktionale, da Funktionale genau dann stetig sind, wenn sie beschränkt sind. Dies werden wir in einigen Beweisen verwenden. ◇

(1.7) Lemma
Sei τ ein positives lineares Funktional einer C*-Algebra A. Dann gilt für alle $a \in A$

(i) $\tau(a^*) = \overline{\tau(a)}$

(ii) $|\tau(a)|^2 \leq \|\tau\| \, \tau(a^* a)$.

Beweis
Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximierende Eins in A. Wie in Beispiel (1.3) c) gilt $\tau(b^*a) = \overline{\tau(a^*b)}$ für alle $a, b \in A$ und damit

$$\tau(a^*) = \lim_\lambda \tau(a^*u_\lambda) = \lim_\lambda \overline{\tau(u_\lambda a)} = \overline{\tau(a)},$$

wenn man die Stetigkeit von τ nach Bemerkung (1.6) beachtet. Verwendet man die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für die positive Sesquilinearform $(a,b) \mapsto \tau(b^*a)$, so erhält man

$$\begin{aligned}|\tau(a)|^2 = \lim_\lambda |\tau(u_\lambda a)|^2 &\leq \lim_\lambda \tau(u_\lambda^* u_\lambda)\tau(a^*a) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda^2)\tau(a^*a)\\ &\leq \sup_\lambda \tau(u_\lambda^2)\tau(a^*a) \leq \|\tau\|\,\tau(a^*a).\end{aligned}$$

Auch hier wurde die Stetigkeit von τ verwendet. □

(1.8) Satz
Sei τ ein beschränktes lineares Funktional einer C*-Algebra A. Dann sind äquivalent:

(i) τ ist positiv.

(ii) Für jede approximierende Eins $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ in A gilt $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

(iii) Für eine approximierende Eins $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ ín A gilt $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$.

Beweis
Wir können ohne Einschränkung $\|\tau\| = 1$ annehmen.

„*(i) ⇒ (ii)*“:
Sei also τ positiv und $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximierende Eins in A. So ist $(\tau(u_\lambda))_{\lambda\in\Lambda}$ ein monoton steigendes Netz in $\mathbb{R}$ und konvergiert damit gegen sein Supremum, das wegen $\tau(u_\lambda) = |\tau(u_\lambda)| \leq \|\tau\| \cdot \|u_\lambda\| \leq 1$ nicht größer als 1 sein kann. Also hat man $\lim_\lambda \tau(u_\lambda) \leq 1$.

Behauptung 1: $u_\lambda - u_\lambda^2 \in A$ ist positiv

Beweis:
Zu zeigen ist $\sigma(u_\lambda - u_\lambda^2) \subset \mathbb{R}_+$. Sei B die von u_λ und 1 erzeugte unitäre und kommutative C*-Algebra in $\widetilde{A}$. Dann gilt nach Satz (2.2) des Seminarvortrags „Der Satz von Gelfand“ (Cornelia Wirtz)

$$\text{Range}(\widehat{u_\lambda - u_\lambda^2}) = \sigma(u_\lambda - u_\lambda^2).$$

Da u_λ positiv ist, gilt Range$(\widehat{u_\lambda}) = \sigma(u_\lambda) \subset \mathbb{R}_+$. Die Gelfand-Transformation $A \to C(\Omega(A)), x \mapsto \hat{x}$ ist ein isometrischer *-Isomorphismus (siehe Satz (3.2) des Seminarvortrags „Der Satz von Gelfand-Naimark" (Till Dieckmann)). Daher folgt aus $\|u_\lambda\| \leq 1$ die Ungleichung $1 - \widehat{u_\lambda}(\tau) \geq 0$ für alle $\tau \in C(\Omega(A))$ und weiter

$$\widehat{u_\lambda - u_\lambda^2}(\tau) = \widehat{u_\lambda}(\tau) \cdot (1 - \widehat{u_\lambda}(\tau)) \geq 0$$

für alle $\tau \in C(\Omega(A))$. Damit erhält man Range$(\widehat{u_\lambda - u_\lambda^2}) = \sigma(u_\lambda - u_\lambda^2) \subset \mathbb{R}_+$ und es folgt die Behauptung 1.

Nach dem eben gezeigten gilt $\tau(u_\lambda^2) \leq \tau(u_\lambda)$. Sei nun $a \in A$ mit $\|a\| \leq 1$. Wegen $\tau(a^*a) \leq \|\tau\| \cdot \|a^*a\| = 1 \cdot \|a\|^2 \leq 1$ folgt mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung,

$$|\tau(u_\lambda a)|^2 \leq \tau(u_\lambda^* u_\lambda)\tau(a^*a) = \tau(u_\lambda^2)\tau(a^*a) \leq \tau(u_\lambda)\tau(a^*a) \leq \tau(u_\lambda).$$

Die Abschätzung gilt für alle $\lambda \in \Lambda$, sodass man auf beiden Seiten den Grenzwert betrachten kann und $|\tau(a)|^2 \leq \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$ für alle $a \in A$ mit $\|a\| \leq 1$ schließen kann, da τ aufgrund seiner Beschränktheit auch stetig ist. Daher ist

$$1 = 1^2 = \|\tau\|^2 = \left(\sup_{a \in A, \|a\| \leq 1} |\tau(a)| \right)^2 \leq \lim_\lambda \tau(u_\lambda).$$

Insgesamt gilt also $1 = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$ und (ii) ist gezeigt.

Der Schluss „$(ii) \Rightarrow (iii)$" ergibt sich aus beiden Aussagen und aus der Existenz einer approximierenden Eins gemäß Satz (2.11) des Seminarvortrags „Ideale und positive Funktionale" (Sophia Dahmen).

Es bleibt also noch „$(iii) \Rightarrow (i)$" zu zeigen:
Sei dazu $a \in A$ ein selbst-adjungiertes Element mit $\|a\| \leq 1$. Setzte $\tau(a) = \alpha + i\beta$, wobei α und β zwei reelle Zahlen seien. Um zu zeigen, dass $\tau(a) \in \mathbb{R}$ ist, dürfen wir ohne Einschränkung $\beta \leq 0$ annehmen. Sei $n \in \mathbb{N}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \|a - inu_\lambda\|^2 &= \|(a - inu_\lambda)^*(a - inu_\lambda)\| = \|(a + inu_\lambda)(a - inu_\lambda)\| \\ &= \left\| a^2 + n^2 u_\lambda^2 - in(au_\lambda - u_\lambda a) \right\| \leq 1 + n^2 + n \|au_\lambda - u_\lambda a\|, \end{aligned}$$

und man folgert

$$(*) \qquad |\tau(a - inu_\lambda)|^2 \leq \|a - inu_\lambda\|^2 \leq 1 + n^2 + n \|au_\lambda - u_\lambda a\|.$$

für alle $\lambda \in \Lambda$. Nach Vorraussetzung gilt

$$\lim_{\lambda} \tau(a - inu_\lambda) = \tau(a) - in \lim_{\lambda} \tau(u_\lambda) = \tau(a) - in \|\tau\| = \alpha + i\beta - in.$$

Da τ beschränkt ist und damit stetig, erhält man $\lim_\lambda(au_\lambda - u_\lambda a) = 0$ und es folgt $|\alpha + i\beta - in|^2 \leq 1 + n^2$, wenn man auf beiden Seiten den Grenzwert von $(*)$ betrachtet. Dann erhält man

$$\begin{aligned} &|\alpha + i\beta - in|^2 \leq 1 + n^2 \\ \Leftrightarrow\ &\alpha^2 + \beta^2 - 2n\beta + n^2 \leq 1 + n^2 \\ \Leftrightarrow\ &-2n\beta \leq 1 - \beta^2 - \alpha^2. \end{aligned}$$

Da β nicht positiv ist und die Ungleichung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, muss $\beta = 0$ folgen und $\tau(a)$ ist reell.

Sei nun a positiv und ohne Einschränkung $\|a\| \leq 1$. Dann ist $u_\lambda - a$ hermitesch.

Behauptung 2: Seien $a, u \in A^+$ mit $\|a\|, \|u\| \leq 1$. Dann gilt $\|u - a\| \leq 1$.

Beweis:
Die Behauptung 2 werden wir in 3 Schritten zeigen.
1. Schritt: Es gilt

$$a \leq 1 \Leftrightarrow \|a\| \leq 1\ .$$

Dies folgt sofort anhand des Vergleiches der Gelfand-Transformierten (die von 1 ist die konstante Funktion $\omega \mapsto 1$).

2. Schritt: Falls c selbstadjungiert ist, mit $c \leq 1$ und $-c \leq 1$, dann ist $\|c\| \leq 1$.

Durch Vergleich der Gelfand-Transformierten folgert man $|c| \leq 1$ und erhält $\|c\| = \|\ |c|\ \| \leq 1$ nach dem ersten Schritt.

3. Schritt: Nun folgt

$$u - a \leq u \leq 1,$$

wobei die zweite Ungleichung aus dem 1. Schritt folgt. Genauso folgt $a - u \leq 1$, und folglich $\|u - a\| \leq 1$, nach dem 2. Schritt. Damit ist die Behauptung 2 gezeigt.

Somit gilt nach dem eben gezeigten $\|u_\lambda - a\| \leq 1$, also $\tau(u_\lambda - a) \leq 1$. Damit folgt mit der Voraussetzung

$$1 - \tau(a) = \|\tau\| - \tau(a) = \lim_{\lambda} \tau(u_\lambda) - \tau(a) = \lim_{\lambda} \tau(u_\lambda - a) \leq 1$$

und man erhält $\tau(a) \geq 0$. Es folgt, dass τ positiv ist, womit „$(iii) \Rightarrow (i)$" gezeigt ist. □

(1.9) Korollar
Sei τ ein beschränktes lineares Funktional einer unitären C*-Algebra. Dann ist τ genau dann positiv, wenn $\tau(1) = \|\tau\|$ gilt. $\diamond$

Beweis
Die Folge die konstant 1 ist, ist eine approximierende Eins der C*-Algebra und die Behauptung folgt mit dem vorherigen Satz (1.8). $\square$

(1.10) Korollar
Sind τ und τ' zwei positive lineare Funktionale einer C*-Algebra, so gilt

$$\|\tau + \tau'\| = \|\tau\| + \|\tau'\| .$$ $\diamond$

Beweis
Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximierende Eins der C*-Algebra, dann gilt mit Satz (1.8) die Gleichheit

$$\|\tau + \tau'\| = \lim_\lambda (\tau + \tau')(u_\lambda) = \lim_\lambda \tau(u_\lambda) + \lim_\lambda \tau'(u_\lambda) = \|\tau\| + \|\tau'\| ,$$

da $\tau + \tau'$ durch die punktweise Definition wieder ein positives Funktional ist. $\square$

(1.11) Definition
Ein positives lineares Funktional einer C*-Algebra A mit der Norm 1 heißt *Zustand*. Die Menge aller Zustände von A bezeichnen wir mit $S(A)$. $\diamond$

(1.12) Definition
Ein nicht-trivialer Homomorphismus $\varphi : A \to \mathbb{C}$ auf einer abelschen Algebra A heißt *Charakter*. Mit $\Omega(A)$ bezeichnen wir die Menge der Charaktere auf A. $\diamond$

(1.13) Satz von Hahn-Banach
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und X_0 ein Untervektorraum von X. Weiter sei $f_0 \in X_0^*$, das heißt, f_0 ist ein stetiges lineares Funktional auf X_0. Dann existiert ein $f \in X^*$ mit $f|_{X_0} = f_0$ und $\|f\|_{X^*} = \|f_0\|_{X_0^*}$. $\diamond$

Beweis
Siehe beispielsweise Vorlesung Funktionalanalysis I, Maier-Paape, WS 07/08. $\square$

(1.14) Lemma
Sei A eine unitäre abelsche Banachalgebra. Ist $\tau \in \Omega(A)$, dann gilt $\|\tau\| = 1$. $\diamond$

Beweis
Siehe Proposition (1.2) a) und c) des Seminarvortrags „Der Satz von Gelfand“ (Cornelia Wirtz). $\square$

(1.15) Satz
Sei A eine nicht-triviale C*-Algebra und $a \in A$ normal, das heißt $a^*a = aa^*$. Dann gibt es einen Zustand τ von A mit $\|a\| = |\tau(a)|$. $\diamond$

Beweis
Wir dürfen ohne Einschränkung $a \neq 0$ annehmen. Sei B die von 1 und a erzeugte C*-Algebra in $\widetilde{A}$. Damit ist B insbesondere eine unitäre abelsche Banachalgebra und $\Omega(B)$ demnach kompakt (siehe Lemma (1.3) des Seminarvortrags „Der Satz von Gelfand" (Cornelia Wirtz)). Betrachte nun die Gelfand Transformation

$$\varphi : B \to C_0(\Omega(B)), a \mapsto \hat{a}.$$

Die stetige Funktion $\hat{a}$ nimmt auf dem Kompaktum $\Omega(B)$ ihr Maximum an. Es existiert also ein Charakter τ_2 auf B, sodass

$$\|a\| = \|\hat{a}\|_\infty = |\hat{a}(\tau_2)| = |\tau_2(a)|$$

gilt, wenn man noch die Isometrie der Gelfand Transformation beachtet. Gemäß Lemma (1.14) gilt $\|\tau_2\| = 1$. Nach dem Satz von Hahn-Banach existiert nun ein beschränktes lineares Funktional τ_1 auf $\widetilde{A}$, dass τ_2 fortsetzt und die Norm erhält mit $\|\tau_1\| = 1$. Da $\tau_1(1) = \tau_2(1) = 1$ gilt, ist τ_1 nach dem Korollar (1.9) positiv. Bezeichne τ die Einschränkung von τ_1 auf A, dann ist τ ein positives lineares Funktional auf A, für das $\|a\| = |\tau(a)|$ gilt. Daher ist

$$\|\tau\| \cdot \|a\| \geq |\tau(a)| = \|a\| .$$

Es folgt $\|\tau\| \geq 1$ und die andere Ungleichung gilt wegen $\|\tau\| \leq \|\tau_1\| = 1$. Damit ist τ ein Zustand von A. $\square$

(1.16) Lemma
Sei τ ein positives lineares Funktional einer C*-Algebra A.

a) Für jedes $a \in A$ gilt $\tau(a^*a) = 0$ genau dann, wenn $\tau(ba) = 0$ für alle $b \in A$.

b) Die Ungleichung
$$\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\| \, \tau(b^*b)$$
gilt für alle $a, b \in A$. $\diamond$

Beweis
Zu a):
„$\Rightarrow$" folgt aus der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung, denn es gilt

$$|\tau(ba)| = |\tau((b^*)^*a)| \leq \tau((b^*)^*b^*)\tau(a^*a) = 0$$

für alle $b \in A$ und damit $\tau(ba) = 0$ für alle $b \in A$.
„$\Leftarrow$“ folgt mit $b = a^*$.

Zu b):
Um die Aussage von b) zu zeigen, dürfen wir aufgrund von a) ohne Einschränkung $\tau(b^*b) > 0$ annehmen. Die Abbildung

$$\rho : A \to \mathbb{C}, c \mapsto \tau(b^*cb)/\tau(b^*b),$$

ist positiv und linear. Die Linearität von ρ folgt aus der Linearität von τ. Für $c \in A^+$ ist b^*cb auch positiv (siehe Lemma (1.12) des Seminarvortrags „Ideale und positive Funktionale“ (Sophia Dahmen)) und ρ somit positiv aufgrund der Positivität von τ, also auch stetig. Ist $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximierende Eins in A, so gilt nun

$$\|\rho\| = \lim_\lambda \rho(u_\lambda) = \lim_\lambda \tau(b^*u_\lambda b)/\tau(b^*b) = \tau(b^*b)/\tau(b^*b) = 1.$$

Damit ist $\rho(a^*a) \leq \|\rho\| \cdot \|a^*a\| = \|a^*a\|$ und daher $\tau(b^*a^*ab) \leq \|a^*a\|\, \tau(b^*b)$. $\square$

Nun kommen wir zur Fortsetzbarkeit positiver linearer Funktionale.

(1.17) Satz
Sei B eine C*-Unteralgebra einer C*-Algebra A und τ ein positives lineares Funktional auf B. Dann existiert ein positives lineares Funktional τ' auf A, das τ fortsetzt mit $\|\tau'\| = \|\tau\|$. $\diamond$

Beweis
Wir nehmen zunächst den Fall $A = \widetilde{B}$ an und definieren ein lineares Funktional τ' auf A, indem wir

$$\tau'(b + \lambda) = \tau(b) + \lambda\, \|\tau\|$$

für $b \in B$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ setzen. Dies ist wohldefiniert, da τ als positives lineares Funktional beschränkt ist (siehe Satz(1.5)). Sei $(u_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ eine approximierende Eins in B. Nach Satz (1.8) gilt $\|\tau\| = \lim_\lambda \tau(u_\lambda)$. Sei nun $b \in B$ und $\mu \in \mathbb{C}$. Aus $\|u_\lambda\| \leq 1$ erhält man die Abschätzung

$$\begin{aligned} |\tau'(b+\mu)| &= |\tau(b) + \mu\, \|\tau\|\,| = |\lim_\lambda \tau(bu_\lambda) + \mu \lim_\lambda \tau(u_\lambda)| = |\lim_\lambda \tau((b+\mu)(u_\lambda))| \\ &= \lim_\lambda |\tau((b+\mu)(u_\lambda))| \leq \lim_\lambda \|\tau\|\, \|(b+\mu)u_\lambda\| \leq \sup_\lambda \|\tau\|\, \|(b+\mu)u_\lambda\| \\ &\leq \|\tau\|\, \|b+\mu\|\,, \end{aligned}$$

wenn man beachtet, dass τ stetig ist (siehe Bemerkung (1.6)). Dadurch ergibt sich $\|\tau'\| \leq \|\tau\|$, wenn man

$$\|\tau'\| = \inf\{C \geq 0;\ |\tau'(a)| \leq C\,\|a\| \text{ für alle } a \in A\}$$

beachtet. Die umgekehrte Ungleichung gilt wegen

$$\|\tau\| = \sup_{\substack{a\in B\\ \|a\|\leq 1}} |\tau(a)| \leq \sup_{\substack{(b,\lambda)\in\widetilde{B}\\ \|(b,\lambda)\|\leq 1}} |\tau(b) + \lambda\,\|\tau\|\,| = \sup_{\substack{a\in\widetilde{B}\\ \|a\|\leq 1}} |\tau'(a)| = \|\tau'\|\,.$$

Also ist

$$\|\tau'\| = \|\tau\| = 0 + 1\cdot\|\tau\| = \tau(0) + 1\cdot\|\tau\| = \tau'(0+1) = \tau'(1)$$

und τ' damit beschränkt sowie positiv nach Korollar (1.9). Daher ist der Fall $A = \widetilde{B}$ bewiesen.

Sei A nun eine beliebige C*-Algebra, die B als Unteralgebra enthält. Nach dem eben gezeigten, existiert ein positives lineares Funktional τ_2, das τ mit derselben Norm auf $\widetilde{B}$ fortsetzt. Nun können wir τ_2 gemäß des Satzes von Hahn-Banach auf $\widetilde{A}$ fortsetzen und erhalten ein lineares Funktional τ_1 auf $\widetilde{A}$ mit $\|\tau_1\| = \|\tau_2\|$. Da nun $\widetilde{A}$ und $\widetilde{B}$ dasselbe Einselement besitzen, gilt

$$\tau_1(1) = \tau_2(1) = \|\tau_2\| = \|\tau_1\|$$

und man folgert wie zuvor mit Korollar (1.9), dass τ_1 positiv ist. Sei nun τ' die Einschränkung von τ_1 auf A. Dann ist τ auch eine Einschränkung von τ' und es folgt

$$\|\tau\| \leq \|\tau'\| \leq \|\tau_1\| = \|\tau_2\| = \|\tau\|$$

Folglich ist τ' das gewünschte positive lineare Funktional mit derselben Norm wie τ. $\square$

§2 Zerlegung selbst-adjungierter Funktionale

Jedes selbst-adjungierte Element einer C*-Algebra kann durch positive Elemente der Algebra dargestellt werden. Wir werden in diesem Abschnitt definieren, wann ein lineares Funktional $\tau \in A^*$ selbst-adjungiert genannt wird und sehen, dass ein solches Funktional, falls es zusätzlich beschränkt ist, eine Zerlegung in positive lineare Funktionale besitzt.

(2.1) Bemerkung
Sei Ω ein kompakter Hausdorffraum und bezeichne $C(\Omega, \mathbb{R})$ den reellen Banachraum aller reell-wertigen stetigen Funktionen auf Ω. Man definiert die Operationen $(+, \cdot)$ punktweise und die Norm ist die Supremumsnorm. Ist $\tau : C(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein beschränktes reell-lineares Funktional, dann existiert gemäß des Satzes von Riesz-Kakutani ein eindeutiges reelles Maß $\mu \in M(\Omega)$, sodass

$$\tau(f) = \int f \, d\mu \qquad \text{für alle } f \in C(\Omega, \mathbb{R})$$

gilt. Ferner gilt $\|\mu\| = \|\tau\|$ und μ ist genau dann positiv, wenn τ positiv ist. Das heißt, es gilt $\tau(f) \geq 0$ für alle $f \in C(\Omega, \mathbb{R})$ mit $f \geq 0$. Aus dem Satz der Jordan Zerlegung reeller Maße folgt, dass für $\mu \in M(\Omega)$ positive Maße $\mu^+, \mu^- \in M(\Omega)$ existieren mit $\mu = \mu^+ - \mu^-$ und $\|\mu\| = \|\mu^+\| + \|\mu^-\|$. Wir übersetzen dieses Ergebnis mittels des Satzes von Riesz-Kakutani:

Ist $\tau : C(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ ein beschränktes reell-lineares Funktional, dann existieren positive beschränkte reell-lineare Funktionale

$$\tau_+, \tau_- : C(\Omega, \mathbb{R}) \to \mathbb{R},$$

sodass $\tau = \tau_+ - \tau_-$ und $\|\tau\| = \|\tau_+\| + \|\tau_-\|$ gilt.

Wir werden nun ein Analogon dieses Ergebnisses für C*-Algebren zeigen. ◇

(2.2) Lemma
Sei A eine C*-Algebra und τ ein beschränktes lineares Funktional auf A. Dann gilt

$$\|\tau\| = \sup_{\|a\| \leq 1} |\mathrm{Re}(\tau(a))|.$$

◇

Beweis
Sei $a \in A$ mit $\|a\| \leq 1$. Dann gibt es ein $\alpha \in [0, 2\pi)$, sodass $\lambda\tau(a) \in \mathbb{R}$, wobei $\lambda = e^{i\alpha}$. Es folgt $|\tau(a)| = |\lambda\tau(a)| = |\mathrm{Re}(\tau(\lambda a))| \leq \|\tau\|$. Damit folgt die Behauptung. □

(2.3) Definition

a) Sei $\tau \in A^*$. Dann definieren wir $\tau^* \in A^*$ durch $\tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)}$ für alle $a \in A$. Beachte: $\tau = \tau^{**}$, $\|\tau\| = \|\tau^*\|$ und die Abbildung $\tau \mapsto \tau^*$ ist konjugiert-linear.

b) Ein Funktional $\tau \in A^*$ heißt *selbst-adjungiert*, wenn $\tau = \tau^*$ gilt. ◇

(2.4) Lemma

a) Für ein beschränktes lineares Funktional τ auf A gibt es eindeutig bestimmte selbst-adjungierte beschränkte Funktionale τ_1 und τ_2 auf A mit $\tau = \tau_1 + i\tau_2$, nämlich $\tau_1 = (\tau + \tau^*)/2$ und $\tau_2 = (\tau - \tau^*)/2i$.

b) Für $\tau \in A^*$ ist die Aussage $\tau = \tau^*$ äquivalent zu $\tau(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$. Falls also τ selbst-adjungiert ist, so ist die Einschränkung $\tau' : A_{sa} \to \mathbb{R}$ von τ ein reell-lineares Funktional. Weiter gilt $\|\tau\| = \|\tau'\|$, das heißt

$$\|\tau\| = \sup_{\substack{a \in A_{sa} \\ \|a\| \leq 1}} |\tau(a)|.$$

◇

Beweis

a) Seien τ_1 und τ_2 zwei selbst-adjungierte beschränkte Funktionale auf A mit $\tau = \tau_1 + i\tau_2$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\tau + \tau^* &= (\tau_1 + i\tau_2) + (\tau_1 + i\tau_2)^* = \tau_1 + i\tau_2 + \tau_1^* + (i\tau_2)^* \\ &= \tau_1 + i\tau_2 + \tau_1 - i\tau_2 = 2\tau_1,\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}\tau - \tau^* &= (\tau_1 + i\tau_2) - (\tau_1 + i\tau_2)^* = \tau_1 + i\tau_2 - \tau_1^* - (i\tau_2)^* \\ &= \tau_1 + i\tau_2 - \tau_1 + i\tau_2 = 2i\tau_2.\end{aligned}$$

Damit folgt $\tau_1 = (\tau + \tau^*)/2$ und $\tau_2 = (\tau - \tau^*)/2i$.

b) Zeige zuerst die Aussage $\tau = \tau^*$ ist äquivalent zu $\tau(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$.
„$\Rightarrow$“
Sei $\tau = \tau^*$, das heißt es gilt

$$\tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)} = \tau(a) \qquad \text{für alle } a \in A$$

Also gilt insbesondere $\tau(a) = \tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)} = \overline{\tau(a)}$ für alle $a \in A_{sa}$. Es folgt $\tau(a) \in \mathbb{R}$ für alle $a \in A_{sa}$ und damit $\tau(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$.
„$\Leftarrow$“

Sei nun $\tau(A_{sa}) \subset \mathbb{R}$ und $a \in A$. Dann existieren eindeutig bestimmte hermitesche Elemente $b, c \in A$ mit $a = b + ic$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\tau(a) &= \tau(b+ic) = \tau(b) + i\tau(c) = \overline{\tau(b) - i\tau(c)} = \overline{\tau(b) + \bar{i}\tau(c)} = \overline{\tau(b+\bar{i}c)} \\ &= \overline{\tau(b^* + (ic)^*)} = \overline{\tau((b+ic)^*)} = \overline{\tau(a^*)}.\end{aligned}$$

Damit gilt $\tau^*(a) = \overline{\tau(a^*)} = \tau(a)$ für alle $a \in A$ und τ ist somit selbst-adjungiert.

Die Einschränkung eines selbst-adjungierten Funktionals auf A_{sa} ist also reell-linear.

Zu zeigen bleibt noch $\|\tau\| = \|\tau'\|$:
Für $a \in A$ seien $b, c \in A$ wieder die eindeutig bestimmten hermiteschen Elemente mit $a = b + ic$. Wir können also sagen, dass b und c Real- bzw. Imaginärteil von a sind. Folglich ist

$$\mathrm{Re}(\tau(a)) = \mathrm{Re}(\tau(b) + i\tau(c)) = \tau(b) = \tau(\mathrm{Re}(b+ic)) = \tau(\mathrm{Re}(a)),$$

da τ selbst-adjungiert ist. Also gilt mit Lemma (2.2) die Abschätzung

$$\|\tau\| = \sup_{\|a\|\le 1} |\mathrm{Re}(\tau(a))| = \sup_{\|a\|\le 1} |\tau(\mathrm{Re}(a))| \le \sup_{\substack{b\in A_{sa}\\ \|b\|\le 1}} |\tau(b)| \le \|\tau\|\,.$$

und man erhält

$$\|\tau'\| = \sup_{\substack{a\in A_{sa}\\ \|a\|\le 1}} |\tau(a)| = \|\tau\|\,.$$

□

Für den nächsten Satz benötigen wir noch weitere Bezeichnungen.

(2.5) Definition

a) Mit $(A^*)_{sa}$ bezeichnen wir die Menge der selbst-adjungierten Funktionale in A^* und A^*_+ bezeichne die Menge aller positiven Funktionale in A^*.

b) Ist X ein reell-linearer Banachraum, so bezeichne X' seinen Dualraum über $\mathbb{R}$. ◇

(2.6) Lemma

Der Raum A_{sa} ist ein reell-linearer Banachraum und $(A^*)_{sa}$ ist ein reell-linearer Untervektorraum von A^*. Weiter ist $\Phi : (A^*)_{sa} \to (A_{sa})', \tau \mapsto \tau'$ ein isometrischer, rell-linearer Isomorphismus. Dabei ist τ' definiert als die Einschränkung von τ auf A_{sa}, also $\tau' : A_{sa} \to \mathbb{R}, a \mapsto \tau'(a) := \tau(a)$. ◇

Beweis
Da A_{sa} ein bezüglich der Norm von A abgeschlossener reell-linearer Unterraum von A ist, wird er, versehen mit der Norm von A, zum reell-linearen Banachraum. Da die Abbildung $A^* \to A^*, \tau \mapsto \tau^*$ konjugiert-linear ist, ist $(A^*)_{sa}$ ein reell-linearer Untervektorraum von A^*.

Wir zeigen nun zunächst, dass die Abbildung $\Phi : (A^*)_{sa} \to (A_{sa})', \tau \mapsto \tau'$ wohldefiniert ist. Sei $\tau \in (A^*)_{sa}$. Dann ist $\tau : A \to \mathbb{C}, a \mapsto \tau(a)$ und τ' ist damit gegeben durch $\tau' : A_{sa} \to \mathbb{R}, a \mapsto \tau'(a) := \tau(a)$. Da τ selbst-adjungiert ist, ist $\tau'(a) \in \mathbb{R}$ für alle $a \in A_{sa}$ nach Lemma (2.4) und Φ somit wohldefiniert.

Zur Injektivität von Φ:
Seien $\tau_1', \tau_2' \in (A_{sa})'$ mit $\tau_1' = \tau_2'$, das heißt $\tau_1(a) = \tau_2(a)$ für alle $a \in A_{sa}$. Sei nun $a \in A$. Dann existieren eindeutig bestimmte hermitesche Elemente b und c aus A_{sa} mit $a = b + ic$. Es folgt

$$\tau_1(a) = \tau_1(b) + i\tau_1(c) = \tau_1(b)' + i\tau_1(c)' = \tau_2(b)' + i\tau_2(c)' = \tau_2(b) + i\tau_2(c) = \tau_2(a)$$

und damit $\tau_1 = \tau_2$, also die Injektivität von Φ.

Zur Surjektivität von Φ:
Sei $\tau' \in (A_{sa})'$. Dann ist $\tau \in A^*$ schon definiert durch $\tau(a) := \tau(a)'$ für alle $a \in A_{sa}$, denn jedes $a \in A$ besitzt eine eindeutige Darstellung durch hermitesche Elemente mit $a = b + ic$. Es gilt $\Phi(\tau) = \tau'$ und somit ist Φ surjektiv.

Des Weiteren ist Φ reell-linear, multiplikativ und gemäß Lemma (2.4) b) auch isometrisch. Insgesamt folgt also, dass Φ ein isometrischer, reell-linearer Isomorphismus ist. $\square$

(2.7) Satz von Banach-Alaoglu
Sei $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum. Dann ist die abgeschlossene Einheitskugel im Dualraum X^* schwach*-kompakt. $\diamond$

Beweis
Siehe beispielsweise Vorlesung Funktionalanalysis I, Maier-Paape, WS 07/08. $\square$

(2.8) Satz (Jordan Zerlegung)
Sei τ ein selbst-adjungiertes beschränktes lineares Funktional einer C*-Algebra A. Dann existieren positive lineare Funktionale τ_+ und τ_- für die gilt $\tau = \tau_+ - \tau_-$ und $\|\tau\| = \|\tau_+\| + \|\tau_-\|$. $\diamond$

Beweis
Bezeichne Ω die Menge aller $\tau \in A_+^*$ mit $\|\tau\| \leq 1$. Dann ist Ω schwach* abgeschlossen in der Einheitskugel von A^*. Demnach ist Ω nach dem Satz von Banach-Alaoglu ein schwach* kompakter Hausdorffraum.

Zu $a \in A_{sa}$ definiert man $\theta(a) \in C(\Omega, \mathbb{R})$ durch $\theta(a)(\tau) = \tau(a)$. Es gilt $\theta(a)(\tau) = \tau(a) = \tau(a^+) - \tau(a^-) \in \mathbb{R}$ für alle $\tau \in \Omega$ und $a \in A_{sa}$. Die Abbildung

$$\theta : A_{sa} \to C(\Omega, \mathbb{R}), a \mapsto \theta(a)$$

ist also wohldefiniert. Da für alle $a \in A_{sa}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ auch λa hermitesch ist und aufgrund der Linearität von $\tau \in \Omega$, ist θ reell-linear. Weiter ist θ ordnungserhaltend, das heißt, ist $a \in A$ positiv, dann folgt $\theta(a) \geq 0$ auf Ω. Letzteres ist der Fall, da für jedes positive lineare Funktional und jedes positive Element $a \in A$ auch $\theta(a)(\tau) = \tau(a) \geq 0$ gilt.

Zudem ist θ isometrisch:
Sei $a \in A_{sa}$. Als stetige Funktion auf einem schwach* kompakten Raum trägt $\theta(a)$ die Supremumsnorm und es gibt ein $\tau_1 \in \Omega$, sodass $\|\theta(a)\|_\infty = |\theta(a)(\tau_1)| = |\tau_1(a)|$ gilt. Wegen $\|\tau_1\| \leq 1$ folgt

$$\|\theta(a)\|_\infty = |\tau_1(a)| \leq \|\tau_1\| \cdot \|a\| \leq \|a\|.$$

Da a insbesondere normal ist, existiert nach Satz (1.15) ein Zustand τ_2 mit $\|a\| = |\tau_2(a)|$. Als Zustand liegt τ_2 auch in Ω. Es folgt

$$\|\theta(a)\|_\infty \geq |\theta(a)(\tau_2)| = |\tau_2(a)| = \|a\|.$$

Insgesamt folgert man $\|\theta(a)\|_\infty = \|a\|$ und θ ist damit isometrisch.

Aus der Isometrie von θ folgt auch die Injektivität von θ. Denn aus $\theta(a) = 0$ für ein $a \in A_{sa}$ gilt $\|a\| = \|\theta(a)\|_\infty = 0$. Daraus folgt $a = 0$, woraus die Injektivität folgt.

Sei nun $\tau \in (A^*)_{sa}$ beschränkt. Dann ist die Einschränkung τ' von τ auf A_{sa} enthalten im rell-linearen Banachraum $(A_{sa})'$ und beschränkt, siehe Lemma (2.6). Sei weiter $B := \text{Range}(\theta)$. Dann ist $\theta : A_{sa} \to B$ bijektiv. Also ist θ invertierbar und damit $\tau' \circ \theta^{-1} \in B' = (\text{Range}(\theta))'$. Da nun $\text{Range}(\theta)$ ein reell-linearer Unterraum von $C(\Omega, \mathbb{R})$ ist, existiert nach dem Satz von Hahn-Banach ein reell-lineares Funktional $\rho \in C(\Omega, \mathbb{R})'$, sodass $\rho = \tau' \circ \theta^{-1}$ und $\|\rho\| = \|\tau' \circ \theta^{-1}\|$ gilt. Es folgt $\rho \circ \theta = \tau'$. Wegen der Isometrie von θ folgt

$$\|\theta\| = \inf\{C \geq 0; |\theta(a)| \leq C \|a\| \text{ für alle } a \in A\} = 1.$$

Genauso zeigt man $\|\theta^{-1}\| = 1$. Nun erhält man

$$\|\rho\| = \left\|\tau' \circ \theta^{-1}\right\| \leq \|\tau'\| \cdot \left\|\theta^{-1}\right\| = \|\tau'\|,$$

sowie

$$\|\tau'\| = \|\rho \circ \theta\| \leq \|\rho\| \cdot \|\theta\| = \|\rho\|$$

und damit ist $\|\tau'\| = \|\rho\|$ und ρ ist folglich beschränkt.

Gemäß der Bemerkung (2.1) gibt es positive lineare Funktionale $\rho_+, \rho_- \in C(\Omega, \mathbb{R})'$, sodass $\rho = \rho_+ - \rho_-$ und $\|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\|$ gilt. Setze $\tau'_+ = \rho_+ \circ \theta$ und $\tau'_- = \rho_- \circ \theta$. Dann ist $\tau'_+, \tau'_- \in (A_{sa})'$, sowie $\tau' = \tau'_+ - \tau'_-$. Wir bezeichnen die entsprechenden selbst-adungierten Funktionale in $(A^*)_{sa}$ durch τ_+ und τ_- (vgl. Lemma (2.6)).

Nach Konstruktion gilt $\tau_+, \tau_- \in A^*_+$ und $\tau = \tau_+ - \tau_-$:

$$\tau_+(a) = \tau'_+(a) = (\rho_+ \circ \theta)(a) = \rho_+(\theta(a)) \geq 0 \text{ für alle } a \in A^+,$$

da θ ordnungserhaltend ist und ρ_+ positiv ist. Analog zeigt man $\tau_- \in A^*_+$. Weiter gilt

$$\begin{aligned}\tau(a) = \tau'(a) &= (\rho \circ \theta)(a) = (\rho_+ - \rho_-)(\theta)(a) = (\rho_+ \circ \theta)(a) - (\rho_- \circ \theta)(a) \\ &= \tau'_+(a) - \tau'_-(a) = \tau_+(a) - \tau_-(a)\end{aligned}$$

für alle $a \in A_{sa}$ und damit $\tau(a) = \tau_+(a) - \tau_-(a)$ für alle $a \in A$, da τ schon durch alle hermiteschen Elemente eindeutig bestimmt ist (vgl. Lemma (2.6)).

Wegen $\|\tau'_+\| = \|\rho_+ \circ \theta\| \leq \|\rho_+\|$ und $\|\tau'_-\| = \|\rho_- \circ \theta\| \leq \|\rho_-\|$ folgt die Abschätzung

$$\begin{aligned}\|\tau\| = \|\tau'\| &= \|\rho\| = \|\rho_+\| + \|\rho_-\| \\ &\geq \|\tau'_+\| + \|\tau'_-\| = \|\tau_+\| + \|\tau_-\| \geq \|\tau\|\end{aligned}$$

und man erhält $\|\tau\| = \|\tau_+\| + \|\tau_-\|$. $\square$