Spektralsatz für C^*-Algebren I/II

Vortrag zum Seminar zur Funktionalanalysis, 20.11/27.11.2008

Sabine Meisen und Anke Wirtz

Aus der Linearen Algebra und der Funktionalanlysis ist der Spektralsatz für endlichdimensionale Vektorräume bekannt. Ziel dieses Vortrags ist es nun, einen Spektralsatz für C^*-Algebren herzuleiten. Dabei wird die in den vorherigen Vorträgen kennengelernte *Gelfand-Theorie* als Hilfsmittel dienen.

§1 Grundlagen

— *Banach Algebren* —

(1.1) Definition (Banach Algebra)
Sei $\mathcal{A}$ eine $\mathbb{C}$-Algebra, $\|\cdot\|$ eine Norm und $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ ein Banachraum. Weiterhin gelte $\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \ \forall \, x, y \in \mathcal{A}$. Dann heißt $\mathcal{A}$ *Banach Algebra*. $\diamond$

(1.2) Definition (Involution)
Eine *Involution* auf einer Algebra $\mathcal{A}$ ist eine Abbildung $* : \mathcal{A} \to \mathcal{A}, \ x \mapsto x^*$, welche folgende Eigenschaften erfüllt

$$(x+y)^* = x^* + y^*, \ (\lambda x)^* = \overline{\lambda} x^*, \ (xy)^* = y^* x^*, \ x^{**} = x \ \ \forall \, x, y \in \mathcal{A}, \ \lambda \in \mathbb{C}. \qquad \diamond$$

(1.3) Definition ((Banach) $*$-Algebra)
Eine Algebra $\mathcal{A}$ mit Involution heißt *$*$-Algebra*. Eine Banach Algebra $\mathcal{A}$ mit Involution heißt *Banach $*$-Algebra*. $\diamond$

(1.4) Definition (C^*-Algebra)
Eine Banach $*$-Algebra $\mathcal{A}$ mit

$$\|x^* x\| = \|x\|^2 \ \ \forall \, x \in \mathcal{A}$$

heißt *C^*-Algebra*. $\diamond$

(1.5) Definition (($*$-) Homomorphismus)
Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Banach Algebren. Die Abbildung $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *(Banach Algebra) Homomorphismus*, falls ϕ eine beschränkte, lineare Abbildung mit

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y) \ \forall \, x, y \in \mathcal{A}$$

ist.
ϕ heißt $*$-*Homomorphismus*, falls $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ $*$-Algebren und

$$\phi(x^*) = \phi(x)^* \; \forall \, x \in \mathcal{A}. \qquad \diamond$$

(1.6) Definition (Erzeugnis)
$\mathcal{S}$ sei eine Teilmenge einer Banach Algebra $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ heißt *erzeugt von* $\mathcal{S}$, falls die Menge der Linearkombinationen von Elementen aus $\mathcal{S}$ dicht in $\mathcal{A}$ ist. $\diamond$

— *Gelfand Theorie* —

(1.7) Definition (Multiplikatives Funktional)
$\mathcal{A}$ sei eine kommutative Banach Algebra mit Einselement. Ein *multiplikatives Funktional auf* $\mathcal{A}$ ist ein Homomorphismus $F: \; \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, der nicht dem Nullhomomorphismus entspricht. $\diamond$

(1.8) Definition (Spektrum)
$\mathcal{A}$ sei eine kommutative Banach Algebra mit Einselement. Die Menge aller multiplikativen Funktionale auf $\mathcal{A}$ heißt *Spektrum von* $\mathcal{A}$. Das Spektrum von $\mathcal{A}$ wird mit $\sigma(\mathcal{A})$ bezeichnet. $\diamond$

(1.9) Definition (Gelfand-Transformation)
$\mathcal{A}$ sei eine kommutative Banach Algebra mit Einselement. Die Abbildung

$$\Gamma : \mathcal{A} \to C(\sigma(\mathcal{A})), \; x \mapsto \widehat{x} \text{ mit } \widehat{x} : \sigma(\mathcal{A}) \to \mathbb{C}, \; h \mapsto h(x)$$

heißt *Gelfand-Transformation auf* $\mathcal{A}$. $\widehat{x}$ heißt *Gelfand-Transformierte von* x. $\diamond$

(1.10) Definition (Symmetrisch)
Eine $*$-Algebra heißt *symmetrisch*, falls für die Gelfand-Transformierte $\widehat{x}$ von $x \in \mathcal{A}$ gilt

$$\widehat{x^*} = \overline{\widehat{x}}. \qquad \diamond$$

(1.11) Proposition
$\mathcal{A}$ sei kommutative Banach $*$-Algebra.

(a) $\mathcal{A}$ ist genau dann symmetrisch, wenn $\widehat{x}$ für alle $x \in \mathcal{A}$ mit $x^* = x$ reellwertig ist.

(b) Ist $\mathcal{A}$ eine C^*-Algebra, dann ist $\mathcal{A}$ symmetrisch.

(c) Ist $\mathcal{A}$ symmetrisch, dann ist $\Gamma(\mathcal{A})$ dicht in $C(\sigma(\mathcal{A}))$. ◇

Beweis
[1], Proposition (1.14). □

(1.12) Satz (Gelfand-Naimark Theorem)
Ist $\mathcal{A}$ eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement, dann ist die Gelfand-Transformation auf $\mathcal{A}$ ein isometrischer $*$-Isomorphismus. ◇

Beweis
[1], Satz (1.20). □

(1.13) Proposition
$\mathcal{A}$ sei eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement, $\mathcal{B}$ sei Banach $*$-Algebra und $\phi : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ sei $*$-Homomorphismus. Dann gilt

$$\|\phi\| \leq 1.$$ ◇

Beweis
[1], Proposition (1.24), (b). □

(1.14) Proposition
$\mathcal{A}$ sei eine kommutative C^*-Algebra mit Einselement, $x_0 \in \mathcal{A}$. $\widehat{x}_0$ ist ein Homöomorphismus von $\sigma(\mathcal{A})$ nach $\sigma(x_0)$, falls eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist.

(a) $\mathcal{A}$ ist erzeugt von x_0 und e.

(b) x_0 ist invertierbar und $\mathcal{A}$ ist erzeugt von x_0 und x_0^{-1}.

(c) $\mathcal{A}$ ist symmetrisch und erzeugt von x_0, x_0^* und e. ◇

Beweis
[1], Proposition (1.15). □

— *Der Rieszsche Darstellungssatz* —

(1.15) Satz (Riesz)
$\mathcal{H}$ sei Hilbertraum.

(a) Für jedes $z \in \mathcal{H}$ ist durch $f(x) = \langle x, z \rangle$ ein Element aus $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ definiert, dass heißt ein stetiges, lineares Funktional auf $\mathcal{H}$.

(b) Zu jedem $f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ existiert genau ein $z \in \mathcal{H}$, so dass $f(x) = \langle x, z \rangle$.

Weiterhin gilt $\|f\| = \|z\|$. ◇

Beweis
[4], Satz (26.1). □

Nun betrachtet man den Riesz´schen Darstellungssatz für Maße. Dazu benötigt man zunächst den Begriff der Regularität, der sich mittels der Definition des positiven Maßes charakterisieren lässt.

(1.16) Lemma und Definition
Sei μ ein komplexes Borel-Maß auf dem kompakten Raum X. Dann wird durch

$$|\mu|(A) = sup\left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} |\mu(E_i)| : A = \dot{\bigcup_{i\in\mathbb{N}}} E_i \right\},\ A \subset X,$$

ein *positives Maß* auf X definiert mit $|\mu|(X) = \|\mu\|$. ◇

(1.17) Definition (regulär)
Sei μ ein positives, endliches Maß auf dem kompakten Raum X. μ heißt *regulär*, wenn für alle Borel-Mengen A und alle $\epsilon > 0$ Mengen $K \subset A \subset U$ existieren mit U offen und $\mu(U \setminus K) < \epsilon$. ◇

(1.18) Definition (regulär)
Sei X ein kompakter Raum und $\mu \in M(X)$. μ heißt *regulär*, wenn $|\mu|$ regulär ist. ◇

(1.19) Satz (Riesz´scher Darstellungssatz für Maße)
Sei X ein kompakter Raum, $M(X)$ der Raum der komplexen regulären Borel-Maße, dann ist $M(X)$ isometrisch isomorph durch

$$M(X) \times C(X) \ni (\mu, f) \mapsto \int_X f d\mu.$$

◇

Beweis
[3], Korollar (7.18). □

— *Das Lemma von Zorn* —

(1.20) Lemma (Zorn)
Jede nichtleere halbgeordnete Menge, in der jede total geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, enthält mindestens ein maximales Element. ◇

— Der Satz von Lax Milgram —

(1.21) Satz (Lax Milgram)
Sei $\mathcal{H}$ ein komplexer Hilbertraum mit Skalaprodukt $\langle \cdot\, , \, \cdot \rangle$ und sei $B:\ \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$ sesquilinear.

(a) Die folgenden Aussagen sind äquivalent

   (i) B ist stetig.

   (ii) B ist partiell stetig, das heißt $y \mapsto B(x,y)$ ist stetig $\forall\ x \in \mathcal{H}$ und $x \mapsto B(x,y)$ ist stetig $\forall\ y \in \mathcal{H}$.

   (iii) $\exists\ M > 0\ \forall\ x, y \in \mathcal{H}:\ |B(x,y)| \leq M\,\|x\| \cdot \|y\|$.

(b) Falls B stetig ist, existiert $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit

$$B(x,y) = \langle Tx, y \rangle \ \ \forall\ x, y \in \mathcal{H}.$$

(c) Gilt zusätzlich

$$\exists\ m > 0\ \forall\ x \in \mathcal{H}:\ B(x,x) \geq m \cdot \|x\|^2\,,$$

so ist T invertierbar mit $\|T^{-1}\| \leq \frac{1}{m}$. $\diamond$

Beweis
[5] $\square$

§2 Vorbereitungen zum Spektralsatz

— *Spektralsatz im endlich-dimensionalen Hilbertraum* —

Der endlich-dimensonale Spektralsatz in seiner einfachsten Form lautet wie folgt:

(2.1) Satz (Endlich-dimensionaler Spektralsatz)
$\mathcal{H}$ sei endlich-dimensionaler Hilbertraum und T selbstadjungierter Opertator auf $\mathcal{H}$. Dann existiert eine Orthonormalbasis für $\mathcal{H}$ aus Eigenvektoren von T. ◇

Obige Formulierung verliert im unendlich-dimensionalen Fall ihre Gültigkeit, da selbstadjungierte Operatoren dann möglicherweise keine Eigenvektoren besitzen. Man kann Satz (2.1) so umformulieren, dass die neuen Formulierungen auch auf den unendlich-dimensionalen Fall übertragbar sind. Sie lauten wie folgt:

(2.2) Satz (Formulierung I)
T sei selbstadjungierter Operator, Σ das Spektrum von T und $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum. Für $\lambda \in \Sigma$ sei P_λ die orthogonale Projektion auf den zugehörigen Eigenraum. Dann gilt

$$\underbrace{P_\lambda P_\mu = 0 \text{ für } \lambda \neq \mu}_{\text{Bildbereiche orthogonal}}, \qquad \underbrace{I = \sum_{\lambda\in\Sigma} P_\lambda}_{\text{Bildbereiche spannen } \mathcal{H} \text{ auf}}, \qquad \underbrace{T = \sum_{\lambda\in\Sigma} \lambda P_\lambda}_{\text{Spektralzerlegung von } T}. \tag{1}$$
◇

(2.3) Satz (Formulierung II)
T sei selbstadjungierter Operator, $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit $dim(\mathcal{H}) = n$ und $\mathbb{C}^n = \{f \mid f : \{1, \ldots, n\} \to \mathbb{C}\}$. Eine orthonormale Eigenbasis für T legt eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$ und eine Funktion $\phi \in \mathbb{C}^n$ fest, so dass $UTU^{-1}\psi = \phi\psi$. Dabei ist $\phi(j)$ der Eigenwert zum j-ten Eigenvektor. ◇

Die Verallgemeinerung auf den unendlich-dimensionalen Fall geschieht in Formulierung I, indem man die Summen durch passende Integrale ersetzt. In Formulierung II muss dazu $\mathbb{C}^n$ durch $L^2(\Omega, \mu)$ ersetzt werden, wobei (Ω, μ) ein geeigneter Maßraum ist.
Eine weitere verfeinerte Version des endlich-dimensionalen Spektralsatzes lautet:

(2.4) Satz
$\mathcal{H}$ sei Hilbertraum mit $dim(\mathcal{H}) < \infty$ und $\mathcal{T}$ sei Familie von selbstadjungierten, kommutierenden Operatoren. Dann existiert eine Orthonormalbasis für $\mathcal{H}$, die Eigenbasis zu jedem $T \in \mathcal{T}$ ist. ◇

(2.5) Bemerkung
Sowohl Formulierung I als auch Formulierung II funktionieren in der allgemeineren Situation aus Satz (2.4).

(I) $\mathcal{S}$ sei die Menge der simultanen Eigenräume der Operatoren $T \in \mathcal{T}$ und P_λ, $\lambda \in \Sigma$, seien die zugehörigen orthogonalen Projektionen auf diese Eigenräume. Für jedes $T \in \mathcal{T}$ existiert dann eine Funktion Φ_T auf $\mathcal{S}$, so dass

$$T = \sum_{\lambda \in \Sigma} \Phi_T(\lambda) P_\lambda.$$

(II) Es existiert eine unitäre Abbildung $U : \mathcal{H} \to \mathbb{C}^n$ und eine Funktion $\phi_T \in \mathbb{C}^n$, $\forall\, T \in \mathcal{T}$, so dass

$$UTU^{-1}\psi = \phi_T \psi.$$ ◇

(2.6) Bemerkung
Sei $\mathcal{T}$ wie in Satz (2.4), dann ist die von $\mathcal{T}$ erzeugte Algebra eine kommutative C^*-Algebra. Weiterhin ist die simultane Eigenbasis der Elemente aus $\mathcal{T}$ auch eine Eigenbasis für jedes Element aus dieser Algebra. Daher soll nun der endlich-dimensionale Spektralsatz im Kontext von C^*-Algebren entwickelt werden. ◇

— *Generalvoraussetzungen* —

Im Folgenden gelten durchgehend die selben Voraussetzungen und Bezeichnungen. Diese seien hier kurz aufgeführt.

(i) $\mathcal{H}$ sei ein Hilbertraum.

(ii) $\mathcal{A}$ sei eine kommutative C^*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit $I \in \mathcal{A}$.

(iii) $\Sigma = \sigma(\mathcal{A})$ sei das Spektrum von $\mathcal{A}$.

(iv) Für $T \in \mathcal{A}$ sei $\widehat{T} \in C(\Sigma)$ die Gelfand-Transformierte von T.

(v) Für $f \in C(\Sigma)$ sei $T_f \in \mathcal{A}$ die inverse Gelfand-Transformierte von f, welche nach Satz (1.12) wohldefinert ist und $\|T_f\| = \|f\|_\infty$ erfüllt.

(vi) $B(\Sigma)$ sei der Raum der beschränkten, Borel-messbaren Funktionen auf Σ.

(vii) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ sei Folge von komplexwertigen Funktionen auf einer Menge S.
f_n heißt *p.b.-konvergent* (pointwise, boundedly) gegen f genau dann, wenn $f_n(s) \to f(s)\ \forall\, s \in S$ und $sup\,\{|f_n| \,:\, s \in S\,,\ n \geq 1\} < \infty$.

— *Maßwertige innere Produkte* —

Entscheidend für alle weiteren Ergebnisse ist die im Folgenden dargestellte Konstruktion.
Für $u, v \in \mathcal{H}$ ist die Abbildung $f \mapsto \langle T_f u, v \rangle$ ein beschränktes lineares Funktional auf $C(\Sigma)$, denn

- $|\langle T_f u, v \rangle| \overset{C.S.}{\leq} \|T_f u\| \, \|v\| \leq \|T_f\| \, \|u\| \, \|v\| \overset{(v)}{=} \|f\|_\infty \|u\| \, \|v\|$
- Die Linearität erhält man, da das Skalarprodukt linear ist und die inverse Gelfand-Transformation ein Homomorphismus ist:

$$\langle T_{f+g} u, v \rangle = \langle (T_f + T_g) u, v \rangle = \langle T_f u, v \rangle + \langle T_g u, v \rangle ,$$
$$\langle T_{\alpha f} u, v \rangle = \langle \alpha T_f u, v \rangle = \alpha \langle T_f u, v \rangle .$$

Da das Spektrum $\Sigma = \sigma(\mathcal{A})$ ein kompakter Hausdorffraum und ist, existiert nach Satz (1.19) ein eindeutiges, reguläres, komplexes Borel-Maß $\mu_{u,v}$ auf Σ, so dass

$$\langle T_f u, v \rangle = \int f d\mu_{u,v} \, , \ \forall f \in C(\Sigma) \, , \ u, v \in \mathcal{H} \, ; \ \ \|\mu_{u,v}\| \leq \|u\| \, \|v\| \, . \tag{2}$$

Die Abbildung $(u, v) \mapsto \mu_{u,v}$ ist ein *maßwertiges inneres Produkt* in folgendem Sinn.

(2.7) Proposition

Die Abbildung $H : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to M(\Sigma)$, $(u, v) \mapsto \mu_{u,v}$ ist sesquilinear. Weiterhin gilt $\mu_{v,u} = \overline{\mu}_{u,v}$ und $\mu_{u,u}$ ist für alle $u \in \mathcal{H}$ ein positives Maß. $\diamond$

Beweis

(i) H sesquilinear:

$$\begin{aligned} \int f d\mu_{\alpha u, \beta v} &= \langle T_f(\alpha u), \beta v \rangle = \alpha\overline{\beta} \langle T_f u, v \rangle = \alpha\overline{\beta} \int f d\mu_{u,v} \\ &= \int f d(\alpha\overline{\beta}\mu_{u,v}) \end{aligned}$$

$\Rightarrow \ \mu_{\alpha u, \beta v} = \alpha\overline{\beta}\mu_{u,v}$.

Weiterhin

$$\begin{aligned} \int f d\mu_{u_1+u_2, v} &= \langle T_f(u_1 + u_2), v \rangle \\ &= \langle T_f u_1 + T_f u_2, v \rangle \\ &= \langle T_f u_1, v \rangle + \langle T_f u_2, v \rangle \\ &= \int f d\mu_{u_1, v} + \int f d\mu_{u_2, v} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mu_{u_1+u_2,v} = \mu_{u_1,v} + \mu_{u_2,v}$,
und analog

$$\int f d\mu_{u,v_1+v_2} = \ldots = \int f d\mu_{u,v_1} + \int f d\mu_{u,v_2}$$

$\Rightarrow \quad \mu_{u,v_1+v_2} = \mu_{u,v_1} + \mu_{u,v_2}$.

(ii) $\mu_{v,u} \overset{!}{=} \overline{\mu}_{u,v}$:
Laut Generalvoraussetzung (ii) ist $\mathcal{A}$ eine kommutative C^*-Algebra. Daher gilt mit Definition (1.10) und Proposition (1.11), (b)

$$\widehat{T^*} = \overline{\widehat{T}},$$

das heißt die Gelfand-Transformierte bildet Adjungierte auf komplex-Konjugierte ab. Es folgt

$$T_f^* = T_{\overline{f}}, \ \forall\, f \in C(\Sigma), \tag{3}$$

denn:
Sei $\Gamma : \mathcal{A} \to C(\Sigma),\ T \mapsto \widehat{T}$ die Gelfand-Transformation und $\Gamma^{-1} : C(\Sigma) \to \mathcal{A},\ f \mapsto T_f$ die inverse Gelfand-Transformation. Für jedes $f \in C(\Sigma)$ existiert ein $T \in \mathcal{A}$ mit $f = \Gamma(T) := \widehat{T}$. Also:

$$\begin{aligned}
T_f^* &= (\Gamma^{-1}(f))^* = \Gamma^{-1}(f^*) \\
&= \Gamma^{-1}((\Gamma(T))^*) = \Gamma^{-1}(\Gamma(T^*)) \\
&= \Gamma^{-1}(\widehat{T^*}) = \Gamma^{-1}\left(\overline{\widehat{T}}\right) \\
&= \Gamma^{-1}(\overline{f}) \\
&= T_{\overline{f}}.
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\int f d\mu_{v,u} &= \langle T_f v, u\rangle = \left\langle v, T_f^* u\right\rangle \\
&= \overline{\left\langle T_f^* u, v\right\rangle} \overset{(3)}{=} \overline{\int \overline{f} d(\mu_{u,v})} \\
&= \int f d\overline{\mu}_{u,v}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \quad \mu_{v,u} = \overline{\mu}_{u,v}$.

(iii) $\mu_{u,u}$ positives Maß:
Zunächst gilt $\forall f, g \in C(\Sigma)$

$$T_{fg} = \Gamma^{-1}(fg) = \Gamma^{-1}(f)\Gamma^{-1}(g) = T_f T_g. \tag{4}$$

Sei nun $u \in \mathcal{H}$ und $f \in C(\Sigma)$, $f \geq 0$. g sei die positive Wurzel von f. Dann ist $g \in C(\Sigma)$ und

$$T_g^* T_g = T_{\overline{g}} T_g = T_g^2 \stackrel{(4)}{=} T_{g^2} = T_f,$$

also

$$\int f d\mu_{u,u} = \langle T_f u, u \rangle = \left\langle T_g^* T_g u, v \right\rangle = \left\| T_g u \right\|^2 \geq 0$$

$\Rightarrow \ \mu_{u,u} \geq 0.$ □

Die inverse Gelfand-Transformation $\Gamma^{-1} : C(\Sigma) \to \mathcal{A}$, $f \mapsto T_f$ liefert eine Darstellung der Algebra $C(\Sigma)$ als beschränkte Operatoren auf $\mathcal{H}$. Mit Hilfe von (2) soll diese Darstellung nun auf die größere Algebra $B(\Sigma)$ ausgedehnt werden.
Für $f \in B(\Sigma)$ erhält man

$$\left| \int f d\mu_{u,v} \right| \leq \|f\|_\infty \|\mu_{u,v}\| \leq \|f\|_\infty \|u\| \|v\| .$$

Folglich (Satz (1.21)) existiert ein eindeutiges $T_f \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$, so dass

$$\langle T_f u, v \rangle = \int f d\mu_{u,v} \, , \forall \, u, v \in \mathcal{H} \, ; \ \ \|T_f\| \leq \|f\|_\infty . \tag{5}$$

Obige Definition von T_f stimmt für $f \in C(\Sigma)$ mit der aus (2) überein.

(2.8) Satz
Die Abbildung $\widetilde{\Gamma^{-1}} : \ B(\Sigma) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $f \mapsto T_f$ ist ein $*$-Homomorphismus und es gilt

(a) Falls $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit jedem $T \in \mathcal{A}$ kommutiert, dann kommutiert S mit $T_f \ \forall \ f \in B(\Sigma)$.

(b) Falls $f_n \in B(\Sigma) \ \forall \ n \in \mathbb{N}$ und $f_n \stackrel{p.b.}{\to} f$, dann folgt $T_{f_n} \to T_f$ in der schwachen Operator-Topologie. ◇

Beweis
$\widetilde{\Gamma^{-1}}$ ist $*$-Homomorphismus:

- Es gilt

$$\begin{aligned}\left\langle T_{\alpha f+\beta g}u,v\right\rangle &= \int \alpha f+\beta g d\mu_{u,v}\\ &= \alpha\int f d\mu_{u,v}+\beta\int g d\mu_{u,v}\\ &= \left\langle \alpha T_f u,v\right\rangle+\left\langle \beta T_g u,v\right\rangle\\ &= \left\langle (\alpha T_f+\beta T_g)u,v\right\rangle\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\widetilde{\Gamma^{-1}}$ ist linear.

- Für $f\in B(\Sigma)$ gilt mit Proposition (2.7)

$$\begin{aligned}\left\langle T_{\overline{f}}u,v\right\rangle &= \int \overline{f}d\mu_{u,v}=\overline{\int f d\mu_{v,u}}\\ &= \overline{\left\langle T_f v,u\right\rangle}=\left\langle u,T_f v\right\rangle\\ &= \left\langle T_f^* u,v\right\rangle\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $T_{\overline{f}}=T_f^*\ \forall\, f\in B(\Sigma)$.

- Weiter gilt $\forall\, f,g\in C(\Sigma)$

$$\begin{aligned}\int fg d\mu_{u,v} &= \left\langle T_{fg}u,v\right\rangle \overset{(4)}{=} \left\langle T_f T_g u,v\right\rangle\\ &= \int f d\mu_{T_g u,v}\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $d\mu_{T_g u,v}=g d\mu_{u,v}\ \forall\, g\in C(\Sigma)$.

Für $f\in B(\Sigma)$ folgt

$$\begin{aligned}\int fg d\mu_{u,v} &= \int f d\mu_{T_g u,v}=\left\langle T_f T_g u,v\right\rangle=\left\langle T_g u,T_f^* v\right\rangle\\ &= \int g d\mu_{u,T_f^* v}.\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $f d\mu_{u,v}=d\mu_{u,T_f^* v}\ \forall\, g\in C(\Sigma)$.

Schließlich gilt $\forall\, f,g\in B(\Sigma)$

$$\begin{aligned}\left\langle T_f T_g u,v\right\rangle &= \left\langle T_g u,T_f^* v\right\rangle=\int g d\mu_{u,T_f^* v}=\int fg d\mu_{u,v}\\ &= \left\langle T_{fg}u,v\right\rangle\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $T_f T_g=T_{fg}\ \forall\, f,g\in B(\Sigma)$.

(a) Nach Voraussetzung kommutiert $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit jedem $T \in \mathcal{A}$, damit kommutiert S mit T_f für alle $f \in C(\Sigma)$. Daher

$$\begin{aligned}\int f d\mu_{u,S^*v} &= \left\langle T_f u, S^*v \right\rangle = \left\langle ST_f u, v \right\rangle = \left\langle T_f Su, v \right\rangle \\ &= \int f d\mu_{Su,v}\end{aligned}$$

$\Rightarrow \ \mu_{u,S^*v} = \mu_{Su,v}$.

Also gilt für $f \in B(\Sigma)$

$$\begin{aligned}\left\langle T_f Su, v \right\rangle &= \int f d\mu_{Su,v} = \int f d\mu_{u,S^*v} \\ &= \left\langle T_f u, S^*v \right\rangle \\ &= \left\langle ST_f u, v \right\rangle\end{aligned}$$

Damit ist (a) gezeigt.

(b) Aus der Voraussetzung $f_n \stackrel{p.b.}{\to} f$ folgt mit dem Satz von der dominierten Konvergenz

$$\int f_n d\mu_{u,v} \to \int f d\mu_{u,v},$$

dass heißt

$$\left\langle T_{f_n} u, v \right\rangle \to \left\langle T_f u, v \right\rangle.$$

Damit ist (b) gezeigt. □

In Proposition (4.1) werden wir die Aussage aus (b) verschärfen.

— *Projektionswertige Maße* —

Sei nun $E \subset \Sigma$ eine Borel-Menge und $\chi_E : E \to \{0, 1\}$ die *charakteristische Funktion* von E. Dann definiere

$$P(E) := T_{\chi_E} \tag{6}$$

(2.9) Satz
Die in (6) definierte Abbildung $E \mapsto P(E)$, $E \subset \Sigma$, hat folgende Eigenschaften:

(a) $\forall\ E \subset \Sigma$ ist $P(E)$ orthogonale Projektion.

(b) $P(\emptyset) = 0$ und $P(\Sigma) = I$.

(c) $P(E \cap F) = P(E)P(F)$.

(d) Falls $\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$ paarweise disjunkt, dann gilt $P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(E_i)$, wobei die Summe in der starken Operator-Topologie konvergiert. $\diamond$

Beweis

(a) Für die charakteristische Funktion gilt $\chi_E^2 = \chi_E = \overline{\chi}_E$, damit folgt

$$P(E)^2 = T_{\chi_E}^2 = T_{\chi_E{}^2} = T_{\chi_E} = P(E),$$

also ist $P(E)$ eine Projektion.
Die Orthogonalität erhält man aus der Symmetrie von $P(E)$

$$P(E) = T_{\chi_E} = T_{\overline{\chi}_E} = T_{\chi_E}^* = P(E)^*.$$

(b) Folgt aus $\chi_\emptyset \equiv 0$ und $\chi_\Sigma \equiv 1$ und $T_{fg} = T_f T_g$.

(c) Folgt aus $\chi_{E \cap F} = \chi_E \chi_F$.

(d) Für eine endliche Folge $E_1, \ldots E_n$, $n \in \mathbb{N}$, folgt die Behauptung aus

$$\chi_{\cup_{i=1}^n E_i} = \sum_{i=1}^n \chi_{E_i}$$

und der Linearität der inversen Gelfand-Transformation.
Sei nun $F_n := \cup_{i=1}^n E_i$ und $F := \cup_{i=1}^{\infty} E_i$. Dann gilt

$$\chi_{F_n} \stackrel{\text{p.b.}}{\to} \chi_F,\ n \to \infty.$$

Mit Satz (2.8), (b) folgt

$$\sum_{i=1}^n P(E_i) = P(F_n) \stackrel{\text{w}}{\to} P(F) = P(\cup_{i=1}^{\infty} E_i).$$

Weiterhin gilt $P(F) = P(F_n) + P(F \backslash F_n)$. Da $P(F \backslash F_n)$ eine orthogonale Projektion ist, gilt für $u \in \mathcal{H}$

$$\begin{aligned} \|[P(F) - P(F_n)]\, u\|^2 &= \|P(F \backslash F_n) u\|^2 \\ &= \langle P(F \backslash F_n) u, P(F \backslash F_n) u \rangle \\ &= \langle P(F \backslash F_n) u, u \rangle \\ &= \langle [P(F) - P(F_n)]\, u, u \rangle \\ &\to 0. \end{aligned}$$

$\square$

(2.10) Korollar
$E, F \subset \Sigma$ seien disjunkt, dann sind $P(E)$ und $P(F)$ orthogonal. $\diamond$

Beweis
Es gilt

$$\begin{aligned}\langle P(E)u, P(F)v\rangle &= \langle P(F)P(E)u, v\rangle \\ &= \langle P(E\cap F)u, v\rangle \\ &= \langle P(\emptyset)u, v\rangle \\ &= \langle 0, v\rangle \\ &= 0\ \forall\, u, v \in \mathcal{H}\ \forall\, E, F \subset \Sigma.\end{aligned}$$ $\square$

Die in Satz (2.9) beschriebene Situation soll nun in einem abstrakteren Rahmen formuliert werden.

(2.11) Definition (($\mathcal{H}$-)Projektionswertiges Maß)
Ω sei eine Menge ausgestattet mit einer σ-Algebra $\mathcal{M}$ und $\mathcal{H}$ sei Hilbertraum. Dann heißt eine Abbildung $P : \mathcal{M} \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, die (a)-(d) aus Satz (2.9) erfüllt (ersetze Σ durch Ω) *($\mathcal{H}$-)projektionswertiges Maß* auf $(\Omega, \mathcal{M})$. $\diamond$

Für ein $\mathcal{H}$-projektionswertiges Maß P auf $(\Omega, \mathcal{M})$ und $u, v \in \mathcal{H}$ ist

$$P_{u,v}(E) = \langle P(E)u, v\rangle \tag{7}$$

ein gewöhnliches komplexwertiges Maß.

(2.12) Bemerkung
Die Abbildung $(u, v) \mapsto P_{u,v}$ ist ein maßwertiges inneres Produkt gemäß Proposition (2.7) und es gilt

$$\|P_{v,v}\| = P_{v,v}(\Omega) = \|v\|^2 . \tag{8}$$

$\diamond$

Beweis
Es gilt $\forall\, E \in \mathcal{M}$

- $P_{\alpha u, \beta v}(E) = \langle P(E)\alpha u, \beta v\rangle = \alpha\overline{\beta}\,\langle P(E)u, v\rangle = \alpha\overline{\beta}P_{u,v}(E)$
- $P_{u+w,v}(E) = \langle P(E)(u + w), v\rangle = \langle P(E)u, v\rangle + \langle P(E)w, v\rangle = P_{u,v}(E) + P_{w,v}(E)$

- $P_{u,v+w}(E) = \langle P(E)u, (v+w)\rangle = \langle P(E)u, v\rangle + \langle P(E)u, w\rangle = P_{u,v}(E) + P_{u,w}(E)$

Also ist die Abbildung $(u,v) \mapsto P_{u,v}$ sesquilinear.
Weiterhin gilt

$$P_{v,u}(E) = \langle P(E)v, u\rangle = \langle v, P(E)u\rangle = \overline{\langle P(E)u, v\rangle} = \overline{P_{u,v}(E)},$$

und

$$P_{u,u}(E) = \langle P(E)u, u\rangle = \left\langle P(E)^2 u, u\right\rangle = \langle P(E)u, P(E)u\rangle = \|P(E)u\|^2$$

$$\Rightarrow P_{v,u} = \overline{P_{u,v}} \text{ und } P_{u,u}(E) \geq 0 \; \forall\, E \in \mathcal{M}. \tag{9}$$

Also ist die Abbildung $(u,v) \mapsto P_{u,v}$ ein maßwertiges inneres Produkt.
Zu (8):
Mit (9) ist $P_{v,v}$ ein positives, reellwertiges Maß, also erhält man

$$\begin{aligned}
\|P_{v,v}\| &= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} |P_{v,v}(A_i)| \,:\, \Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i\right\} \\
&= \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} P_{v,v}(A_i) \,:\, \Omega = \cup_{i=1}^{n} A_i\right\} \\
&= P_{v,v}(\Omega) \\
&\overset{(7)}{=} \langle P(\Omega)v, v\rangle \\
&= \langle v, v\rangle \\
&= \|v\|^2 .
\end{aligned}$$

Damit ist (8) gezeigt. □

Sei nun $B(\Omega) = B(\Omega, \mathcal{M})$ der Raum der beschränkten, $\mathcal{M}$-messbaren Funktionen auf Ω. Für $f \in B(\Omega)$ kann man das Integral von f bezüglich eines Projektionswertigen Maßes P wie folgt definieren.

Für $v \in \mathcal{H}$ gilt mit (8)

$$\left|\int f dP_{v,v}\right| \leq \|f\|_\infty \|P_{v,v}\| = \|f\|_\infty \|v\|^2 .$$

Falls $u, v \in \mathcal{H}$ und $\|u\| = \|v\| = 1$ erhält man mit der Polarisationsidentität

$$\begin{aligned}
\left|\int f dP_{u,v}\right| &\leq \frac{1}{4}\|f\|_\infty \left[\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 + \|u+iv\|^2 + \|u-iv\|^2\right] \\
&\leq 4\|f\|_\infty .
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\left| \int f dP_{u,v} \right| \leq 4 \|f\|_\infty \|u\| \|v\|, \ \forall\, u, v \in \mathcal{H}.$$

Nach Satz (1.21) existiert ein beschränkter Operator T auf $\mathcal{H}$, so dass

$$\langle Tu, v \rangle = \int f dP_{u,v}, \ \forall\, u, v \in \mathcal{H}$$

Wir bezeichnen T mit $\int f dP$, also

$$\left\langle \left(\int f dP \right) u, v \right\rangle = \int f dP_{u,v}. \tag{10}$$

Für eine einfache Funktion $f = \sum_{i=1}^n c_i \chi_{E_i}$ mit $E_i \in \mathcal{M}$, $i = 1, \ldots, n$, folgt

$$\int f dP_{u,v} = \sum_{i=1}^n c_i P_{u,v}(E_i) = \sum_{i=1}^n c_i \langle P(E_i) u, v \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n c_i P(E_i) u, v \right\rangle,$$

so dass

$$\int f dP = \sum_{i=1}^n c_i P(E_i).$$

Da jede Funktion $f \in B(\Omega)$ der gleichmäßige Grenzwert einer Folge $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ von einfachen Funktionen ist, erhalten wir $\int f dP$ als Grenzwert von Riemansummen in der Norm-Topologie, denn:

$$\left\| \int f dP - \int f_n dP \right\| \leq \underbrace{4 \|f - f_n\|_\infty}_{\to 0,\ n \to \infty}, \tag{11}$$

(2.13) Satz
P sei ein $\mathcal{H}$-Projektionswertiges Maß auf $(\Omega, \mathcal{M})$, dann ist die Abbildung $h : B(\Omega) \to \mathcal{L}(\mathcal{H})$, $f \mapsto \int f dP$ ein $*$-Homomorphismus. $\diamond$

Beweis
Die Abbildung h ist offensichtlich linear. Weiterhin wurde schon gezeigt, dass

$$\left\| \int f dP \right\| \leq 4 \|f\|_\infty.$$

Sei

$$f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} \text{ und } g = \sum_{k=1}^{m} d_k \chi_{F_k},$$

dann folgt

$$fg = \sum_{i,k} c_i d_k \chi_{E_i \cap F_k}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \int fg dP &= \sum_{i,k} c_i d_k P(E_i \cap F_k) \\ &= \sum_{i,k} c_i d_k P(E_i) P(F_k) \\ &= \int f dP \cdot \int g dP. \end{aligned}$$

Durch den Übergang zu gleichmäßigen Grenzwerten (vgl. (11)) folgt

$$\int fg dP = \left(\int f dP \right) \cdot \left(\int g dP \right), \ \forall f, g \in B(\Omega).$$

Analog zeigt man

$$\int \overline{f} dP = \left(\int f dP \right)^*.$$

□

Mit Proposition (1.13) folgt

$$\left\| \int f dP \right\| \leq \|f\|_\infty .$$

Dies kann man auch direkt herleiten:

Wenn $T = \int f dP$, dann ist $T^* T = \int |f|^2 dP$. Mit (8) folgt

$$\|Tv\|^2 = \langle T^* T v, v \rangle = \int |f|^2 dP_{v,v} \leq \|f\|_\infty^2 \|v\|^2 .$$

§3 Spektralsätze für C*-Algebren

— Vorbereitungen zur Verallgemeinerung der Formulierung I —

Zunächst beschränkt man sich auf die Formulierung I. Diese möchte man nun als einen Spektralsatz für den speziellen Fall der C*-Algebra formulieren können. Allerdings benötigt man hierzu eine Vorarbeit, die hier zunächst betrachtet wird. Darauf aufbauend, sowie auf den bereits bekannten Erkenntnissen ist es dann nicht schwer die Verallgemeinerung auszuformulieren.

Es ergibt sich mit Hilfe der Gleichungen (5) und (7), sowie der Definition (6) aus dem vorangegangem Kapitel folgende Ausage:

$$\begin{aligned} P_{u,v}(E) &\overset{(7)}{=} \langle P(E)u, v\rangle \\ &\overset{(6)}{=} \langle T_{\chi_E}u, v\rangle \\ &\overset{(5)}{=} \int \chi_E d\mu_{u,v} \\ &= \mu_{u,v}(E) \ \ \forall\, E \in \mathcal{M} \end{aligned}$$

Daraus ist zu erkennen, dass $P_{u,v} = \mu_{u,v}$ gelten muss. Dies impliziert, dass P ein reguläres Maß darstellt, da $\mu_{u,v}$ per Dualität ein Element aus dem Raum der komplexen regulären Borel-Maße ist, d.h. $\mu_{u,v} \in M(x)$ (folgt sofort aus dem Riesz´schen Darstellungssatz für Maße). Weiterhin folgt aus der Darstellung

$$P_{u,v} = \mu_{u,v} \tag{12}$$

und den Gleichungen (5) und (10), dass

$$\int f dP = T_f \ \ \forall\, f \in B(\Sigma) \tag{13}$$

gilt, denn:

$$\begin{aligned} \langle T_f u, v\rangle &\overset{(5)}{=} \int f d\mu_{u,v} \\ &\overset{(12)}{=} \int f dP_{u,v} \\ &\overset{(10)}{=} \left\langle \left(\int f dP\right) u, v \right\rangle \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad T_f = \int f dP \ \ \forall\, f \in B(\Sigma)$$

— *Spektralsatz I* —

Es sind nun soweit alle nötigen Erkenntnisse bekannt, dass sich die Verallgemeinerung der Formulierung I ergibt. Sie lautet wie folgt:

(3.1) Satz (Spektralsatz I)
Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, welche I enthält und sei Σ das zugehörige Spektrum. Dann gibt es ein eindeutiges reguläres projektionswertiges Maß P auf Σ, so dass

$$T = \int \widehat{T} dP \; \forall \, T \in \mathcal{A} \;\; \text{und} \;\; T_f = \int f dP \; \forall \, f \in B(\Sigma)$$

gilt. Insbesondere sind für $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ folgende Aussagen äquivalent:

(i) S kommutiert mit jedem $T \in \mathcal{A}$.

(ii) S kommutiert mit $P(E)$ für jede Borelmenge $E \subset \Sigma$.

(iii) S kommutiert mit $\int f dP$ für jedes $f \in B(\Sigma)$. ◇

Beweis
Die Darstellungen für T und T_f (vgl. (13)) sind bereits vorweg gezeigt worden, wobei die Darstellung von T lediglich ein Spezialfall von $T_f = \int f dP$ darstellt, da T_f das Urbild unter der Gelfand-Transformation ist (nach Punkt (v) der Generalvoraussetzungen) und für die spezielle Wahl von $f = \widehat{T}$, sowie die Betrachtung der inversen Gelfand-Transformation $\Gamma_{\mathcal{A}}^{-1} : f \mapsto T_f$ folgt:

$$\begin{aligned} \int \widehat{T} dP &\overset{(13)}{=} T_{\widehat{T}} \\ &\overset{\text{GV (v)}}{=} \Gamma_{\mathcal{A}}^{-1}(\widehat{T}) \\ &\overset{\text{Def.}}{=} T. \end{aligned}$$

Um die Eindeutigkeit des regulären projektionswertigen Maßes P zu zeigen, betrachtet man für jedes Paar $u, v \in \mathcal{H}$ und für alle $f \in C(\Sigma)$ die nach Definition von der inversen Gelfand-Transformierten T_f von f gegebene Darstellung $\int f dP_{u,v} = \langle T_f u, v \rangle$ (folgt sofort mit (2) und (12)). Damit ist aber, für alle $u, v \in \mathcal{H}$, $P_{u,v} \in M(X)$ eindeutig festgelegt (nach dem Riesz´schen Darstellungssatz für Maße). Damit sind, für alle $u, v \in \mathcal{H}$ und alle Borel-Mengen $A \subset \Sigma$, die Skalarprodukte $\langle P(A)u, v \rangle$ eindeutig festgelegt, womit insbesondere dann auch $P(A)$ eindeutig für alle Borel-Mengen $A \subset \Sigma$ festgelegt ist.

Es bleibt nun die Äquivalenzaussage zu zeigen:
(iii)⇒(ii): Diese Implikation ist trivialerweise erfüllt, wenn in (iii) $f = \chi_E$ gewählt wird.

(iii)⇒(i): Da die Implikation $C(\Sigma) \subset B(\Sigma)$ gilt, folgt aus $\widehat{T} \in C(\Sigma)$ sofort $\widehat{T} \in B(\Sigma)$. Mit der Definition von T durch $T = \int \widehat{T} dP$ und (iii) folgt die Behauptung.

(i)⇒(iii): Satz (2.8) Teil (a)

(ii)⇒(iii): Sei $f \in B(\Sigma)$ als Linearkombination einfacher Funktionen gegeben, d.h. $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i}$. Dann gilt die Behauptung durch Anwendung von (ii), denn:

$$\begin{aligned} S\left(\int f dP\right) &= S\left(\int \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} dP\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_i S P(E_i) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i P(E_i) S \\ &= \left(\int \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{E_i} dP\right) S \\ &= \left(\int f dP\right) S \end{aligned}$$

Mit der Grenzwertbetrachtung $n \to \infty$ folgt die Behauptung sofort (vgl. (11)). □

— *Vorbereitungen zur Verallgemeinerung der Formulierung II* —

Nun betrachtet man die zweite Formulierung und setzt sich hier eine weitere Verallgemeinerung von dem endlich-dimensionalen Spektralsatz als Ziel. Allerdings wird in dieser Verallgemeinerung ein wenig differenzierter an das Problem herangegangen. Es wird eine unitäre Abbildung, die bestimmte Eigenschaften haben soll, betrachtet. Zunächst formuliert man zwei Hilfslemmata, bevor man zur eigentlichen Verallgemeinerung der Formulierung II kommt.

(3.2) Lemma
Sei $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(\mathcal{H})$ eine C*-Algebra und $\mathcal{X} \subset \mathcal{H}$ ein abgeschlossener Teilraum, so dass $T(\mathcal{X}) \subset \mathcal{X}$ für alle $T \in \mathcal{A}$. Dann gilt $T(\mathcal{X}^\perp) \subset \mathcal{X}^\perp$ für alle $T \in \mathcal{A}$. ◇

Beweis
Zunächst wählt man $u \in \mathcal{X}^\perp$, $v \in \mathcal{X}$ und $T \in \mathcal{A}$. Dann folgt daraus

$$\langle Tu, v\rangle \ = \langle u, T^*v\rangle = 0,$$

wobei die letzte Gleichheit erfüllt ist, da $\mathcal{A}$ abgeschlossen bezüglich der Adjungation ist. Daraus ergibt sich $Tu \in \mathcal{X}^\perp$ und somit die Behauptung. □

(3.3) Definition (semi-finit)
Ein Maßraum (Ω, μ) (mit einem positiven Maß μ) heißt *semi-finit*, wenn zu jedem $E \subset \mathcal{A}$ mit $\mu(E) = \infty$ ein $A \subset E$ in $\mathcal{A}$ existiert mit $0 < \mu(A) < \infty$. ◇

(3.4) Lemma
Sei (Ω, μ) ein semi-finiter Maßraum und weiterhin $\phi \in L^\infty(\mu)$. Ist $T \in \mathcal{L}(L^2(\mu))$ definiert durch $Tf = \phi f$, dann gilt:

$$\|T\| = \|\phi\|_\infty .$$ ◇

Beweis
Offensichtlich gilt zunächst einmal $|\phi f| \leq \|\phi\|_\infty |f|$ fast überall. Daraus ergibt sich $\|\phi f\|_2 \leq \|\phi\|_\infty \|f\|_2$ und mit der obigen Definition von T durch $Tf = \phi f$ erhält man die Ungleichung $\|T\| \leq \|\phi\|_\infty$.

Um nun die Ungleichung $\|T\| \geq \|\phi\|_\infty$ und somit die resultierende Gleichheit zu zeigen, betrachtet man zunächst die Menge $E := \{\omega : |\phi(\omega)| > \|\phi\|_\infty - \epsilon\}$ für ein gegebenes $\epsilon > 0$. Da $\mu(E) > 0$, gibt es eine Teilmenge $F \subset E$ mit der Eigenschaft $0 < \mu(F) < \infty$. Dann ist $\chi_F \in L^2(\mu)$ und es folgt:

$$\begin{aligned}
\|T\chi_F\|^2 &= \int |\phi\chi_F|^2 d\mu \\
&= \int_F |\phi|^2 d\mu \\
&\geq (\|\phi\|_\infty - \epsilon)^2 \int_F d\mu \\
&= (\|\phi\|_\infty - \epsilon)^2 \mu(F) \\
&= (\|\phi\|_\infty - \epsilon)^2 \|\chi_F\|^2 .
\end{aligned}$$

Daraus erhält man die Ungleichung $\|T\| \geq \|\phi\|_\infty$ und somit die Behauptung. □

Zudem benötigt man folgende Eigenschaft von $C(\Sigma)$:

(3.5) Lemma
Sei X ein kompakter topologischer Raum und μ sei ein reguläres Maß auf X. Dann ist $C(X)$ dicht in $L^2(X, \mu)$. ◇

Beweis
[3], Proposition (7.9). □

— *Spektralsatz II* —

Nun betrachtet man die angekündigte Verallgemeinerung der Formulierung II, welche sich mit der Diagonalisierbarkeit von Matrizen durch unitäre Transformationen beschäftigt.

(3.6) Satz (Spektralsatz II)
Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C*-Unteralgebra von $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, welche I enthält und sei Σ das zugehörige Spektrum. Dann gibt es einen semi-finiten Maßraum $(\Omega, \mathcal{W}, \mu)$, eine unitäre Abbildung $U \colon \mathcal{H} \to L^2(\mu)$ und einen isometrischen $*$-Homomorphismus von $\mathcal{A} \to L^\infty(\mu)$, $T \mapsto \phi_T$, so dass

$$UTU^{-1}\psi = \phi_T\psi \text{ für alle } \psi \in L^2(\mu) \text{ und } T \in \mathcal{A}$$

gilt. Ω kann als eine disjunkte Vereinigung von Kopien des Spektrums Σ von $\mathcal{A}$ in der Form angenommen werden, dass μ endlich in jeder Kopie ist und $\phi_T = \widehat{T}$ für jede Kopie erfüllt ist. ◇

Beweis
Angenommen es existiere ein $v \in \mathcal{H}$, so dass $\mathcal{A}v = \{Tv : T \in \mathcal{A}\}$ dicht in $\mathcal{H}$ ist und sei $\mu = \mu_{v,v}$ wie in (2) definiert.
Für alle $T \in \mathcal{A}$ gilt dann:

$$\begin{aligned} \|Tv\|^2 &= \langle Tv, Tv \rangle \\ &= \langle T^*Tv, v \rangle \\ &= \left\langle \left(\int |\widehat{T}|^2 d\mu \right) v, v \right\rangle \\ &\overset{(10)}{=} \int |\widehat{T}|^2 d\mu \\ &= \|\widehat{T}\|^2 \end{aligned}$$

Wenn nun $Tv = Sv$ angenommen wird, so ergibt sich durch die obige Gleichheit $\widehat{T} - \widehat{S} = 0$ μ- f.ü.

Somit definiert man einen Operator $U : \mathcal{A}v \to L^2(\mu)$, $Tv \mapsto \widehat{T}$. Dieser ist sowohl ein wohldefinierter linearer Operator aufgrund der Eigenschaften des zugrunde liegenden Skalarproduktes, als auch ein isometrischer Operator aufgrund der obigen Gleichheit $\|Tv\|^2 = \|\widehat{T}\|^2$. Es gibt eine eindeutige Fortsetzung $U : \mathcal{H} \to L^2(\mu)$, die ebenfalls linear und isometrisch ist. Da $C(\Sigma) \subset range(U)$, $range(U)$ abgeschlossen und $C(\Sigma)$ dicht in $L^2(\mu)$ ist (nach Lemma (3.5)), ist $range(U)$ auch dicht in $L^2(\mu)$, als Obermenge einer dichten Teilmenge in $L^2(\mu)$. Mit der Abgeschlossenheit von $range(U)$ folgt die Bijektivität von U. Zuzüglich der Isometrieeigenschaft ist U somit eine unitäre Abbildung.

Sei nun $\psi \in C(\Sigma)$ und $T \in \mathcal{A}$, dann gilt:

$$UTU^{-1}\psi = UTT_\psi v = \widehat{TT_\psi} = \widehat{T}\widehat{T_\psi} = \widehat{T}\psi$$

und damit ergibt sich, dass $UTU^{-1}\psi = \widehat{T}\psi$ für alle $\psi \in L^2(\mu)$ gilt.

Betrachte nun Familien $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$ solcher Räume, für die $\mathcal{H}_i$ paarweise orthogonal sind: $\mathcal{H}_i \perp \mathcal{H}_j$, falls $i, j \in I$ mit $i \neq j$. Diese Familien kann man durch Inklusionen ordnen. Das Lemma von Zorn (vgl. (1.20)) garantiert die Existenz einer maximalen Familie $\{\mathcal{H}_i : i \in I\}$. Die Behauptung $(*)$ $\mathcal{H} = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ folgt aus dem Lemma (3.2), denn sonst könnte $\bigoplus_{i\in I} \mathcal{H}_i$ durch eine weitere Familie ergänzt werden.

Für jedes $i \in I$ nehme man nun an, Σ_i sei ein Kopie von Σ und μ_i das zugehörige Maß μ_{v_i,v_i} auf Σ_i. Weiterhin sei $\Omega = \bigcup_i \Sigma_i$ die disjunkte Vereinigung der Σ_i und $\mathcal{M}$ die σ-Algebra mit Mengen $E \subset \Omega$, so dass $E \cap \Sigma_i$ borelsch in Σ_i sind für alle $i \in I$. Nun definiert man das Maß μ auf der σ-Algebra $\mathcal{M}$ durch $(+)$ $\mu(E) = \sum_{i\in I} \mu_i(E \cap \Sigma_i)$. Falls $\mu(E) = \infty$, so gilt $\mu_i(E \cap \Sigma_i) > 0$ für mindestens ein $i \in I$, sowie $\mu_i(E \cap \Sigma_i) < \infty$, da μ_i endlich sind. Somit ist μ semi-finit. Aufgrund der Eigenschaft der Positivität der $\mu_i(E \cap \Sigma_i)$ für mindestens ein $i \in I$, ist die Summe in $(+)$ wohldefiniert, da auf die Reihenfolge der Summation nicht geachtet werden muss.

Weiterhin gilt $(**)$ $L^2(\mu) \cong \bigoplus_{i\in I} L^2(\mu_i)$.
Nun definiert man in Analogie zum Beginn des Beweises die Abbildungen

$$U_i : \mathcal{H}_i \to L^2(\mu_i), \;\; \forall i \in I,$$

und erhält so mit $(*)$ und $(**)$ die gewünschte Abbildung

$$U = \bigoplus_{i\in I} U_i : \mathcal{H} \to L^2(\mu).$$

Weiterhin gilt für $T \in \mathcal{A}$, dass UTU^{-1} die Multiplikation mit ϕ_T ist, wobei $\phi_T = \widehat{T}$ ist auf jedem Σ_i gegeben ist.

Es bleibt zu zeigen, dass die Gelfand-Transformierte $\widehat{T}$ ein $*$-Homomorphismus ist. Definiere dazu die Abbildung $F : \mathcal{A} \to L^\infty(\mu)$, $T \mapsto \phi_T = \widehat{T}$.
Die Abbildung erfüllt die Eigenschaft $F(T^*) = F(T)^*\ \forall\, T \in \mathcal{A}$, denn

$$\begin{aligned} F(T^*) &= \phi_{T^*} = \widehat{T^*} \\ &= (\widehat{T})^* = F(T)^* \quad \forall\, T \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

sowie die Eigenschaft $F(T_1T_2) = F(T_1)F(T_2) \forall\, T_1, T_2 \in \mathcal{A}$, denn

$$\begin{aligned} F(T_1T_2) &= \phi_{T_1T_2} = \widehat{T_1T_2} \\ &= \widehat{T}_1\widehat{T}_2 = \phi_{T_1}\phi_{T_2} \\ &= F(T_1)F(T_2) \quad \forall\, T_1, T_2 \in \mathcal{A}. \end{aligned}$$

Zudem ist F eine beschränkte, lineare Abbildung, denn

$$\begin{aligned} F(T_1 + T_2) &= \phi_{T_1+T_2} = \widehat{T_1 + T_2} \\ &= \widehat{T}_1 + \widehat{T}_2 = \phi_{T_1} + \phi_{T_2} \\ &= F(T_1) + F(T_2) \quad \forall\, T_1, T_2 \in \mathcal{A}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(aT) &= \phi_{aT} = \widehat{aT} \\ &= a\widehat{T} = a\phi_T \\ &= aF(T) \quad \forall\, T \in \mathcal{A},\ a \in \mathbb{C}, \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} \|F(T)\|_\infty &= \|\phi_T\|_\infty \\ &\overset{(3.4)}{=} \|T\| \quad \forall\, T \in \mathcal{A} \\ \Rightarrow \quad \|F\|_\infty \leq 1 & \end{aligned}$$

□

(3.7) Bemerkung
Ist der Hilbertraum separabel, so existieren nur abzählbar viele Summanden $\mathcal{H}_i$. Dann ist das betrachtete Maß μ σ-endlich. Allerdings kann μ auch als endlich angenommen werden. Denn setzt man $\sum_{i \in I} \|v_i\|^2 < \infty$ voraus, so lässt sich folgern, dass $\mu(E) = \sum_{i \in I} \mu_i(E \cap \Sigma_i) < \infty$ mit der obigen Setzung $\mu_i = \mu_{v_i,v_i}$ gilt. ◇

§4 Gegenüberstellung und Anwendung

— *Verschärfung bekannter Aussage* —

Im direkten Vergleich der beiden oben aufgeführten Versionen des verallgemeinerten Spektralsatzes ist zu erkennen, dass die zweite Version den Nachteil mit sich bringt, dass der Maßraum (Ω, μ), sowie die unitäre Abbildung U nicht bestimmt wurden. Dennoch ergibt sich ein positiver Nutzen aus dieser Darstellung. Wichtige Eigenschaften von Operatoren sind oft besser erkennbar, wenn sich die Operatoren als Multiplikation mit beschränkten Funktionen des L^2-Raumes darstellen lassen. Bespielsweise ergibt sich eine Präzisierung der Aussage (2.8) Teil (b), wie der folgende Satz zeigt:

(4.1) Satz
Wenn $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset B(\Sigma)$ und $f_n \overset{p.b.}{\rightarrow} f$ gilt, dann gilt $T_{f_n} \rightarrow T_f$ in der starken Operatortopologie. $\diamond$

Beweis
Mit dem Spektralsatz II lässt sich zeigen, dass $(*)$ $UT_fU^{-1}\psi = \phi_f\psi$ für $\phi_f = f$ auf jedem Σ_i gilt.

Aus der p.b.-Konvergenz von $f_n \rightarrow f$ ergibt sich dann $\phi_{f_n} \overset{\text{p.b.}}{\rightarrow} \phi_f$. Durch Anwendung des Satzes der dominierten Konvergenz führt dies schließlich zu

$$\left\|\phi_{f_n}\psi - \phi_f\psi\right\|_2 \rightarrow 0$$

für jedes $\psi \in L^2(\mu)$. Für die spezielle Wahl $\psi = Uv$ ergibt sich mit Hilfe von $(*)$, dass $\left\|T_{f_n}v - T_fv\right\|_2 \rightarrow 0$ für jedes $v \in \mathcal{H}$ gilt. Dies ist aber gleichbedeutend zu der starken Konvergenz von T_{f_n} gegen den Grenzoperator T_f. $\square$

— *Anwendung auf normale Operatoren* —

Als eine mögliche Anwendung kann man nun die bekannte, allgemeine Theorie im Fall der selbstadjungierten Operatoren betrachten. Als allgemeineren Fall seien die normalen Operatoren betrachtet, da ja die Inklusion bekannt ist, dass normale Operatoren (d.h. es gilt $TT^* = T^*T \ \forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$) allgemeiner sind als selbstadjungierte Operatoren (d.h. es gilt $T^* = T \ \forall T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$).

Der Grund für diese Vorgehensweise liegt darin, dass wenn man einen normalen

Operator T betrachtet, so ergibt sich $\mathcal{A}_T$ als die von T, T^* und I erzeugte normabgeschlossene Unteralgebra, welche die von T erzeugte C*-Unteralgebra darstellt. Zum einen ist $\mathcal{A}_T$ kommutativ und zum anderen kann das Spektrum von $\mathcal{A}_T$ mit $\sigma(T) \subset \mathbb{C}$ identifiziert werden in der Weise, dass die Gelfand-Transformierte von T die spezielle Funktion $\iota(\lambda) = \lambda$ auf $\sigma(T)$ annimmt. Es besteht somit ein Homomorphismus zwischen $\sigma(T)$ und $\sigma(\mathcal{A}_T)$, der die gegebenen Borelstrukturen erhält. Dies ist grundliegend, da das Spektralmass von $\mathcal{A}_T$ auf dem Spektrum von $\mathcal{A}_T$ definiert ist, die nun bekannten Spektralsätze für T sich aber auf $\sigma(T)$ beziehen. Durch die oben genannte Bijektion wird diesem Problem Abhilfe geschaffen.

Diese Vorgehensweise wurde bereits im Spektraltheorem I angewandt, da hier ein projektionswertiges Maß P_T auf $\sigma(T)$ betrachet wurde, welches $T = \int \lambda dP_T(\lambda)$ erfüllt.

Sei nun speziell $p(\lambda) = \sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}\lambda^j\overline{\lambda}^k$ ein Polynom sowohl in λ als auch in $\overline{\lambda}$ (oder äquivalent dazu ein Polynom in $Re(\lambda)$ und $Im(\lambda)$), so gilt $\int p dP_T = \sum c_{jk}T^jT^{*k}$, da die Abbildung $f \mapsto \int f dP_T$ ein $*$-Homomorphismus ist. Somit wurden in diesem Schritt lediglich die Variablen λ und $\overline{\lambda}$ ersetzt durch T und T^*. Daher ergibt sich die naheliegende Definition für den Operator $f(T)\ \forall f \in B(\sigma(T))$ durch:

$$f(T) = \int f dP_T$$

Geht man zurück in die Situation des Spektralsatzes II, so kommt die Frage auf, was diese neue Erkenntnis für den speziellen Fall von $\mathcal{H} = L^2(\Omega, \mu)$ und wenn T eine Multiplikation mit $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ ist, mit sich bringt.

Erstens ist das Spektrum von T ein *essential range* von ϕ, dass heißt die Menge der $\lambda \in \mathbb{C}$ für welche $\{\omega : |\phi(\omega) - \lambda| < \epsilon\}\ \forall \epsilon > 0$ gilt, hat ein positives Maß oder äquivalent dazu hat das Maß der Menge der λ, für welche $(\phi - \lambda)^{-1} \notin L^\infty$ gilt, einen positiven Wert. Daher folgt unmittelbar durch die Definiton des Spektrums, dass $\phi(\omega) \in \sigma(T)$ für fast alle ω gilt, also kann man annehmen, dass $range(\phi) \subset \sigma(T)$ gilt.

Zweitens ist offensichtlich T^n eine Multiplikation mit ϕ^n und T^* ist eine Multiplikation mit $\overline{\phi}$, so dass $p(T)$ eine Multiplikation mit $p \circ \phi$ für jedes Polynom p in λ und $\overline{\lambda}$ ist. Dadurch liegt es nahe, zu sagen, dass $f(T)$ eine Multiplikation mit $f \circ \phi$ sein wird für jedes $f \in B(\sigma(T))$. Insbesondere werden die Projektionen $P_T(E)$ eine Multiplikation mit $\chi_{\phi^{-1}(E)}$ sein.

Dazu formuliert man zunächst folgendes Lemma:

(4.2) Lemma
Sei K eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ und $\mathcal{B}$ die kleinste Algebra von Funktionen in K, die alle Polynome enthält und abgeschlossen bezüglich der p.b.-Konvergenz ist. Dann ist $\mathcal{B} = B(K)$ die Algebra der begrenzten borelschen Funktionen auf K. $\diamond$

Beweis
Nach dem Satz von Stone-Weierstraß[1] gilt $C(K) \subset \mathcal{B}$. Betrachtet man die p.b. - Konvergenz, so ergibt sich $\chi_E \in \mathcal{B}\ \forall\, E$ offen, d.h. $\mathcal{B}$ ist nicht leer. Definiere nun $\mathcal{M} := \{E \subset K : \chi_E \in \mathcal{B}\}$. Es gilt, dass $\mathcal{M}$ abgeschlossen ist bezüglich der Komplementbildung, da $\chi_{K\setminus E} = 1 - \chi_E$ gilt. Weiterhin ist $\mathcal{M}$ abgeschlossen bezüglich der Bildung von endlichen Schnitten, da $\chi_{E\cap F} = \chi_E \chi_F$ gilt, sowie bezüglich der Bildung von abzählbaren Schnitten, da $\chi_{\cap_{i=1}^n E_i} \to \chi_{\cap_{i=1}^\infty E_i}$ p.b. gilt. Somit stellt $\mathcal{M}$ eine $\sigma-$Algebra da, die alle Borelmengen enthält, da sie alle offenen Mengen enthält. Daher enthält $\mathcal{B}$ alle einfachen borelschen Funktionen und abermals durch Betrachtung der p.b.-Konvergenz erhält man, dass $\mathcal{B}$ alle beschränkten borelschen Funktionen beinhaltet. Somit ist $B(K)$ eine Algebra, die unter p.b.-Konvergenz abgeschlossen ist. $\square$

Als wesentliche Eigenschaften für die obige angegebene Berechnung des Operators T ergibt sich nun der folgende Satz:

(4.3) Satz
Sei $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ normal, dann existiert ein eindeutiger $*$-Homomorphismus

$$\phi : B(\sigma(T)) \to \mathcal{L}(\mathcal{H}),\ f \mapsto f(T),$$

so dass folgende Aussagen gelten:

(i) Wenn $f(\lambda) = \lambda$ gilt, dann folgt $f(T) = T$.

(ii) Wenn $f_n \overset{p.b.}{\to} f$ gilt, dann folgt $f_n(T) \to f(T)$ in der starken Operatortopologie.

Die Abbildung $\phi : f \mapsto f(T)$ hat die weiteren Eigenschaften:

(a) Sei $\mathcal{A}$ eine kommutative C*-Algebra, welche T enthält. $\widehat{T}$ sei die Gelfand-Transformierte von T bezüglich $\mathcal{A}$ und $P_{\mathcal{A}}$ ist das zugehörige projektionswertige Maß auf $\sigma(\mathcal{A})$, dann gilt

$$f(T) = \int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}.$$

(b) Sei $\mathcal{H} = L^2(\mu)$ und T eine Multiplikation mit $\phi \in L^\infty(\mu)$ ($range(\phi) \subset \sigma(T)$), dann ist $f(T)$ eine Multiplikation mit $f \circ \phi$ für jedes $f \in B(\sigma(T))$.

[1] Alt, Hans Wilhelm (1999): Lineare Funktionalanalysis, 3. Auflage, p.277

(c) Wenn $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ mit T und T^* kommutiert, dann kommutiert S mit $f(T)$ für jedes $f \in B(\sigma(T))$. $\diamond$

Beweis
Zeige zunächst die Existenz des $*$-Homomorphismus ϕ: $f \mapsto f(T)$:
Definiere dazu, analog zu oben $f(T) = \int f dP_T$. Die gewünschte Eigenschaft aus (i) ergibt sich dann direkt aus dem Satz (2.14), da dort gezeigt wurde, dass es sich bei der betrachteten Abbildung um einen $*$-Homomorphismus handelt. Die gewünschte Konvergenzeigenschaft aus (ii) ergibt sich direkt aus Satz (4.1) mit der obigen Definition von $f(T)$.

Nun zur Eindeutigkeit:
Sei nun ϕ: $f \mapsto f(T)$ wie oben angegeben und $\widetilde{\phi}$ sei ein weiterer $*$-Homomorphismus dieser Art mit $(*)$ $\phi(p) = \widetilde{\phi}(p)$ $\forall p \in \mathcal{P}$, d.h. ϕ und $\widetilde{\phi}$ stimmen auf der Menge der Polynome überein, was direkt aus den Eigenschaften des $*$-Homomorphismus resultiert. Definiere $\mathcal{A} := \{f : \phi(f) = \widetilde{\phi}(f)\}$.
Dann bleibt zu zeigen, dass $\mathcal{A} = B(\sigma(T))$ gilt. Zunächst ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, da ϕ und $\widetilde{\phi}$ Algebrenhomomorphismen sind. Weiterhin gilt $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ nach $(*)$.
Zudem ist $\mathcal{A}$ abgeschlossen unter der p.b.-Konvergenz, denn für alle $(f_n)_n \subseteq \mathcal{A}$ mit $f_n \overset{p.b.}{\to} f$ gilt

$$\phi(f) = lim_{n\to\infty}\phi(f_n) \overset{(f_n)_n\subseteq\mathcal{A}}{=} lim_{n\to\infty}\widetilde{\phi}(f_n) = \widetilde{\phi}(f)$$

und somit $f \in \mathcal{A}$. Mit Lemma (4.2) folgt dann die Behauptung.

Die Eigenschaften (a) und (b) folgen aus der Eindeutigkeit der Abbildung und da $f \to \int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}$ und $f \to$ (Multiplikation mit $f \circ \phi$) die gewünschten Eigenschaften besitzen. Die Eigenschaft (a) ergibt sich, da der Ausdruck $\int f \circ \widehat{T} dP_{\mathcal{A}}$ einen $*$-Homomorphismus nach dem Spektralsatz I darstellt und aufgrund der Eindeutigkeit des $*$-Homomorphismus ϕ folgt sofort, dass $f(T)$ ein $*$-Homomorphismus ist. Die Eigenschaft (b) stellt eine direkte Folgerung aus den Eigenschaften des $*$-Homomorphismus da. Die Eigenschaft (c) folgt unmittelbar aus Satz (2.8) Teil (a), denn wenn S mit T und T^* kommutiert, kommutiert S auch mit jedem Operator aus der erzeugten C^*-Algebra $\sigma(T)$. $\square$

Abschließend bleibt anzumerken, dass der endlich-dimensionale Spektralsatz eine einfache Folgerung aus dem Spektraltheorem I ist.
Sei also $\mathcal{A}$ eine kommutative C^*-Algebra von Operatoren von $\mathcal{H}$ mit $dim(\mathcal{H}) < \infty$, dann hat das Spektrum die Form $\sigma(\mathcal{A}) = \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n\}$, wobei $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ die

Eigenwerte von T sind. Die Bildbereiche der Projektionen $P(\{\sigma_j\})$, $1 \leq j \leq n$, sind paarweise orthogonale Teilräume von $\mathcal{H}$, dessen direkte Summe $\mathcal{H}$ ist und sie sind Eigenräume für jedes $T \in \mathcal{A}$, also ist

$$TP(\{\sigma_j\}) = \widehat{T}(\sigma_j)P(\{\sigma_j\})$$

für jedes j erfüllt.

Weiterhin sei gezeigt, dass für kompakte Operatoren der Spektralsatz eine direkte Verallgemeinerung von dem endlich-dimensionalen Spektralsatz darstellt.

(4.4) Satz
Wenn T eine kompakter, normaler Operator auf $\mathcal{H}$ ist, dann gibt es eine orthonormale Basis für $\mathcal{H}$, welche aus Eigenvektoren von T besteht. $\diamond$

Beweis
Zunächst definiert man die Mengen

$$E_0 := \{0\} \quad \text{und} \quad E_n := \{\lambda \in \sigma(T) : n^{-1} \leq |\lambda| < (n-1)^{-1}\} \text{ für } n \geq 1.$$

Weiterhin seien $\mathcal{H}_n$ die Bilder der Projektionsabbildungen $P(E_n) = \chi_{E_n}(T)$. Dann sind die $\mathcal{H}_n$ paarweise orthogonal und invariant unter T. Weiterhin ist $\mathcal{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$, wobei $\mathcal{H}_0$ bereits Eigenraum von T ist (mit dem Eigenwert 0). Demnach genügt es zu zeigen, dass jedes $\mathcal{H}_n$ für $n \geq 1$ eine Orthonomalbasis besitzt, die aus Eigenvektoren von T bestehen.

Zu zeigen ist zunächst, dass T ein invertierbarer Operator auf $\mathcal{H}_n$ ist. Es ergibt sich aus dem Spektralsatz I die Darstellung $T = \int_{\sigma(T)} \lambda dP_T(\lambda)$ und aufgrund der Defintion der Operators $f(T)$ aus (4.3) ergibt sich die Darstellung $\chi_{E_n}(T) = \int_{E_n} \lambda dP_T(\lambda)$ als ein Spezialfall. Sei $v \in \mathcal{H}_n$, dann folgt durch die Defintion der $\mathcal{H}_n$ als Bilder der Projektionsabbildungen die Gleichung $(*)$ $P_T(E_n)(v) = v$. Dann gilt für ein Maß $\mu_{v,v}$ die Eigenschaft

$$\begin{aligned}(**)\ \mu_{v,v}(E_n) &\overset{(7)}{=} \langle P_T(E_n)v, v\rangle \\ &\overset{(*)}{=} \|v\|^2 \\ &= \mu_{v,v}(\sigma(T)).\end{aligned}$$

Da $\mu_{v,v}$ ein positives Maß darstellt, gilt $\mu_{v,v}(\sigma(T) \setminus E_n) = 0$.

Ferner gilt allgemein:

$$\begin{aligned} \|Tv\|^2 &= \langle Tv, Tv\rangle \\ &= \langle T^*Tv, v\rangle \\ &= \left\langle \left(\int |\widehat{T}|^2 d\mu\right) v, v\right\rangle \\ &\overset{(10)}{=} \int |\widehat{T}|^2 d\mu_{v,v} \end{aligned}$$

und nun in dem Fall der oben genannten Definition des Operators T:

$$(***) \ \|Tv\|^2 = \int |\lambda|^2 d\mu_{v,v}(\lambda).$$

Der Integrand ist nach Wahl von E_n außerhalb einer $\mu_{v,v}$-Nullmenge sowohl nach unten als auch nach oben beschränkt durch $\frac{1}{n^2} \leq |\lambda|^2 < \frac{1}{(n-1)^2}$ und damit ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n^2} \leq |\lambda|^2 < \frac{1}{(n-1)^2} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{1}{n^2} \int\limits_{\sigma(T)} d\mu_{v,v}(\lambda) \leq \int |\lambda|^2 d\mu_{v,v}(\lambda) < \frac{1}{(n-1)^2} \int\limits_{\sigma(T)} d\mu_{v,v}(\lambda) \\ \overset{(***)}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{1}{n^2}\mu_{v,v}(\sigma(T)) \leq \|Tv\|^2 < \frac{1}{(n-1)^2}\mu_{v,v}(\sigma(T)) \\ \overset{(**)}{\Leftrightarrow} \quad & \frac{1}{n^2}\|v\|^2 \leq \|Tv\|^2 < \frac{1}{(n-1)^2}\|v\|^2 \end{aligned}$$

Somit ist T speziell auf $\mathcal{H}_n$ stetig invertierbar. Zudem ist T ein kompakter Operator auf $\mathcal{H}_n$ nach Voraussetzung. Es resultiert, dass der Identitätsoperator auf $\mathcal{H}_n$ ebenfalls kompakt ist und $dim(\mathcal{H}_n) < \infty$. Weiterhin ist T eingeschränkt auf $\mathcal{H}_n$ ein normaler Operator, denn mit der Betrachtung $T|_{\mathcal{H}_n} = TP(E_n)$ gilt:

$$\begin{aligned} TP(E_n)(TP(E_n))^* &= TP(E_n)P(E_n)^*T^* \\ &\overset{(+)}{=} TP(E_n)T^* \\ &= P(E_n)TT^* \\ &\overset{\text{Vor. T normal}}{=} P(E_n)T^*T \\ &\overset{(+)}{=} T^*P(E_n)T \\ &\overset{(+)}{=} T^*P(E_n)^*P(E_n)T \\ &= (TP(E_n))^*TP(E_n). \end{aligned}$$

zu (+): $P(E_n)$ ist orthogonale Projektion ($P(E_n)^2 = P(E_n)$), also insbesondere selbstadjungierter Operator (d.h. $P(E_n)^* = P(E_n)$). Damit gilt sofort $P(E_n)P(E_n)^* = P(E_n)^2 = P(E_n)$. Mit dem endlich-dimensionalen Spektralsatz folgt dann die Behauptung. $\square$

Literatur

[1] Folland, Gerald B. (1994): A Course in Abstract Harmonic Analysis; CRC PR Inc. pp.1-26

[2] Alt, Hans Wilhelm (1999): Funktionalanalysis; Springer-Verlag, 3. Auflage, p.277

[3] Folland, Gerald B. (1999): Real Analysis; John Wiley & Sons, Inc., 2. Auflage

[4] Heuser, Harro (2006): Funktionalanalysis; Teubner-Verlag, 4. Auflage

[5] Werner, Dirk (2007): Funktionalanalysis; Springer-Verlag, 6. Auflage