Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg
C. Alfes

Aachen, den 15. Oktober 2009

Ebene Geometrie, Übungsblatt 1

Abgabe bis Dienstag, den 27.10.2009, 15:00 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass es zu $A \in \mathrm{M}(2;\mathbb{R})$, $A \notin \mathbb{R}E$, ein $W \in \mathrm{GL}(2;\mathbb{R})$ gibt mit

$$W^{-1}AW = \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 1 & \sigma \end{pmatrix}, \quad \delta = \det A,\, \sigma = \mathrm{Spur} A.$$

Bitte rechnen Sie hier nicht in den Komponenten.

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass es zu jeder linearen Abbildung $\lambda : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ein eindeutig bestimmtes $c \in \mathbb{R}^2$ gibt mit $\lambda(x) = [c, x]$. Zeigen Sie weiter, dass dann für je zwei linear unabhängige Vekoktoren $a, b \in \mathbb{R}^2$ gilt

$$c = \frac{1}{[a,b]} \left(\lambda(b) \cdot a - \lambda(a) \cdot b\right).$$

b) Zeigen Sie, dass für $a, b \in \mathbb{R}^2$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\det \begin{pmatrix} aa^t & b \\ b^t & \alpha \end{pmatrix} = -[a,b]^2.$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie folgende Aussagen:

a) Sei K ein endlicher Körper mit q Elementen.
   i) Jede Gerade besteht aus q Punkten, und es gibt $q(q+1)$ Geraden in K^2.
   ii) Zu jeder Geraden existieren q parallele Geraden.
   iii) Durch jeden Punkt gehen $q+1$ Geraden.

b) Sei G eine Gerade, die nicht durch 0 geht. Dann sind je zwei verschiedene Punkte von G linear unabhängig.

Aufgabe 4 (3 Punkte)

Betrachten Sie die Geraden

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \vee \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad , \alpha \in \mathbb{R}.$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ sind die Geraden nicht parallel? Berechnen Sie in diesem Fall den Schnittpunkt.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ jeweils transitiv auf der Menge der Punkte und der Menge der Geraden in $\mathbb{R}^2$ operiert.

(Eine Gruppe G operiert transitiv auf einer Menge M, wenn es zu $m_1, m_2 \in M$ ein $g \in G$ gibt, sodass $g(m_1) = m_2$.)

Aufgabe 6 (6 Punkte)

a) Sei $a \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass $\{f \in \mathrm{Aff}(2, \mathbb{R}) : f(a) = a\}$ eine Untergruppe von $\mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ ist, die zu $\mathrm{GL}(2, \mathbb{R})$ isomorph ist.

b) Seien G, H und G', H' jeweils nicht-parallele Geraden. Zeigen Sie, dass es genau ein $f \in \mathrm{Aff}(2, \mathbb{R})$ mit $f(G) = G'$ und $f(H) = H'$ gibt.

c) Sei G eine Gerade in $\mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass

$$\{f \in \mathrm{Aff}(2, \mathbb{R}) : f(G) = G\} \;\text{ und }\; \{g \in \mathrm{Aff}(2, \mathbb{R}) : g(x) = x \text{ für alle } x \in G\}$$

jeweils nicht-triviale Untergruppen von $\mathrm{Aff}(2; \mathbb{R})$ sind.