Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg
C. Alfes

Aachen, den 23. November 2009

Ebene Geometrie, Übungsblatt 4

Abgabe bis Dienstag, den 8.12.2009, 15:00 Uhr

Aufgabe 1 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein gleichseitiges Dreieck a, b, c in $\mathbb{E}$ gilt, dass

$$m = \frac{1}{[a,b,c]} \left(\langle a, b-c \rangle a^\perp + \langle b, c-a \rangle b^\perp + \langle c, a-b \rangle c^\perp \right).$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei a, b, c ein nicht-gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{E}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ seien

$$\begin{aligned} a_\lambda &:= \frac{1}{2}(b+c) + \lambda(b-c)^\perp, \\ b_\lambda &:= \frac{1}{2}(c+a) + \lambda(c-a)^\perp, \\ c_\lambda &:= \frac{1}{2}(a+b) + \lambda(a-b)^\perp. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Punkte $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ genau dann ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn $12\lambda^2 = 1$ gilt.

Aufgabe 3 (3 Punkte)

Sei a, b, c ein Dreieck in $\mathbb{E}$ und seien f_a, f_b, f_c die Fußpunkte der Höhen durch a, b, c. Zeigen Sie, dass dann gilt

$$|a - f_c| \cdot |b - f_a| \cdot |c - f_b| = |a - f_b| \cdot |b - f_c| \cdot |c - f_a|.$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass jede innere Winkelhalbierende eines Dreiecks die gegenüberliegende Seite im Verhältnis der anliegenden Seiten teilt.

Aufgabe 5 (3 Punkte)

Zeigen Sie, dass für ein Dreieck a, b, c folgende Aussagen äquivalent sind:

i) $A = B$.

ii) $\alpha = \beta$.

iii) Von den 4 Geraden $W_c, S_c, M_{a,b}, H_c$ (Höhe durch c) sind mindestens zwei gleich.