Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg
C. Alfes

Aachen, den 14. Dezember 2009

Ebene Geometrie, Übungsblatt 5

Abgabe bis Dienstag, den 12.01.2009, 15:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Beweisen Sie folgende Aussagen:

a) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{(S-B)(S-C)}{BC}$, $\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{S(S-A)}{BC}$.

b) $\sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = \frac{(S-A)(S-B)(S-C)}{ABC}$.

c) $\sin^2 \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\beta}{2} + \sin^2 \frac{\gamma}{2} + 2 \cdot \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\beta}{2} \sin \frac{\gamma}{2} = 1$.

Aufgabe 2 (3 Punkte)

Beweisen Sie den Sehnen-Tangenten-Satz mit elementar-geometrischen Methoden.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für positives $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$ sowie verschiedene $a, b \in \mathbb{E}$ die Menge

$$K := \{x \in \mathbb{E} : |x - a| = \lambda \, |x - b|\}$$

ein Kreis ist. Weiter schneidet die Gerade $a \vee b$ den Kreis K in genau zwei Punkten c, d. Zeigen Sie zudem, dass a, b, c, d harmonisch liegen (d.h. es gilt $\frac{cbd}{cad} = -1$, wobei cbd hier das zugehörige Geradenmaß bezeichne, vgl. Kapitel II und Aufgabe III.2.1b)). Man nennt K den Kreis des Apollonius.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass für zwei Kreise mit Mittelpunkten m, m' und Radien ρ, ρ' folgende Aussagen äquivalent sind:

i) Die Kreise schneiden sich orthogonal, d.h. die Kreise schneiden sich und die Tangenten in den Schnittpunkten sind orthogonal.

ii) $|m - m'|^2 = \rho^2 + \rho'^2$.