Lehrstuhl A für Mathematik
Prof. Dr. A. Krieg
C. Alfes

Aachen, den 13. Januar 2010

Ebene Geometrie, Übungsblatt 6

Abgabe bis Dienstag, den 26.01.2010, 15:00 Uhr

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Sei a, b, c ein nicht-gleichseitiges Dreieck. Zeigen Sie, dass die Euler-Gerade eines Dreiecks genau dann orthogonal zu einer Seite ist, wenn das Dreieck gleichschenklig ist.

Aufgabe 2 (2 Punkte)

Zeigen Sie, dass der Feuerbach-Kreis genau dann durch einen Eckpunkt geht, wenn das Dreieck rechtwinklig ist.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Zeigen Sie, dass die beiden Brocardschen Punkte p und q genau dann übereinstimmen, wenn das Dreieck gleichseitig ist. Dann ist $p = q = s = \frac{1}{3}(a + b + c)$ und der Brocardsche Winkel ist $\frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Lemma (siehe IV, §5*, 5*)
Sei a, b, c ein Dreieck in $\mathbb{C}$ mit Ähnlichkeitsmaß $\Delta = \Delta(a, b, c)$. Nun wählt man p, q, r in $\mathbb{C}$, sodass die 6 Punkte paarweise verschieden sind. Mit $\lambda = \Delta(p, c, b), \mu = \Delta(q, a, c), \nu = \Delta(r, b, a)$ gilt

$$\Delta(p, q, r) = \frac{\lambda\Delta - \left(\frac{1-\lambda\nu}{1\nu}\right)}{\frac{1-\lambda\mu}{1-\mu}\Delta - 1}.$$

Man beweise mit Hilfe des Lemmas den Satz von Napoleon, also:
Sei a, b, c ein nicht-gleichseitiges Dreieck in $\mathbb{E}$. Für $\lambda \in \mathbb{R}$ seien

$$\begin{aligned} a_\lambda &:= \frac{1}{2}(b + c) + \lambda(b - c)^\perp, \\ b_\lambda &:= \frac{1}{2}(c + a) + \lambda(c - a)^\perp, \\ c_\lambda &:= \frac{1}{2}(a + b) + \lambda(a - b)^\perp. \end{aligned}$$

Zeigen Sie, dass die Punkte $a_\lambda, b_\lambda, c_\lambda$ genau dann ein gleichseitiges Dreieck bilden, wenn $12\lambda^2 = 1$ gilt.