Die Cesàro- und Abelsummation

Vortrag zum Seminar zur Fourieranalysis für Lehramtskandidaten WS 09/10, 11.12.2009

Christian Bohnen (273212)

Inhaltsverzeichnis

§1 Motivation

Wir haben noch immer das Problem bzgl. der Konvergenz einer Fourier-Reihe, um hier einen Weg zu finden betrachten wir die Problematik von einem neuen Standpunkt aus. Wir wählen hier den Weg über die Partialsumme einer Fourier-Reihe und deren Grenzwert:

$$\lim_{N\to\infty} S_N(f) = f.$$

Zunächst wiederholen wir nochmal einige Begriffe, die wir im späteren Verlauf benötigen werden.

§2 Grundlagen

Es gelte hier stets $n \in \mathbb{Z}$. Im Folgenden sei $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ stets eine 2π-periodische, Riemann integrierbare Funktion.

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{inx}$$

bezeichne den n-ten Fourier-Koeffizient von f und

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)e^{inx}$$

die zugehörige Fourier-Reihe, sowie

$$\sum_{n=-N}^{N} e^{inx} = S_N(f)(x)$$

deren N-te Partialsumme. Weiterhin werden auch die folgenden Kerne gebraucht:

$$D_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} e^{inx},$$

der N-te Dirichlet-Kern für $x \in [-\pi, \pi]$ und

$$P_r(\Theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\Theta}$$

der Poisson-Kern mit $r \in [0, 1)$ für $\Theta \in [-\pi, \pi]$.

§3 Cesàro-Mittel und Cesàro-Summation

Zunächst, bevor wir auf das Konvergenzproblem von Fourier-Reihen erneut zu sprechen kommen, bedarf es einer neuen Theorie, die der *Abel-Summation* beziehungsweise zunächst die der *Cesàro-Summation*.

(3.1) Definition
Sei $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k \in \mathbb{C}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$ eine Reihe komplexer Zahlen, dann definiert

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k$$

mit $n \in \mathbb{N}_0$ und $c_k \in \mathbb{C}$ deren n-te Partialsumme.
Wir sagen die Reihe konvergiert gegen einen Grenzwert $s \in \mathbb{C}$, wenn für den Grenzwert der Partialsumme gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k = s. \qquad \diamond$$

Mit diesen Voraussetzungen definieren wir nun die Cesàro-Summation.

(3.2) Definition
Sei

$$\sigma_N = \frac{1}{N}(s_0 + s_1 + \cdots + s_{N-1})$$

das Mittel der ersten N Partialsummen von $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$. σ_N bezeichnet das N-te *Cesàro-Mittel* der Folge $\{s_k\}$ oder die N-te *Cesàro-Summe* der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$.
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ heißt *konvergent im Sinne von Cesàro* gegen σ, falls für σ_N gilt

$$\sigma_N \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \sigma.$$

Die Reihe und die Cesàro-Summe besitzen dann den selben Grenzwert. (Beweis siehe Lemma (3.3) $\diamond$

Da wir aber in der Fourier-Analysis mit Funktionen arbeiten wollen, verstehen wir den Grenzwert als gleichmäßig bzw. punktweise Konvergenz. Als erstes wollen wir nun den Zusammenhang zwischen der Konvergenz einer Reihe und deren Cesàro-Mittel herleiten.

(3.3) Lemma
Konvergiert eine Reihe von komplexen Zahlen $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ gegen einen bestimmten Grenzwert s, dann ist sie gegen den selben Wert konvergent im Sinne von Cesàro. $\diamond$

Beweis
Wir nehmen ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass die Reihe gegen den Grenzwert 0 konvergiert. Ansonsten betrachte $(\sum c_k - s)_{n=1}^{\infty}$ statt $(\sum c_k)_{n=1}^{\infty}$. Also

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} c_k = \lim_{n\to\infty} s_n = 0.$$

Nach dem Konvergenz-Kriterium gilt somit:
Sei $\epsilon > 0$ dann existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\left| \sum_{k=0}^{n} c_k - 0 \right| < \frac{\epsilon}{2}$$

für alle $n \geq n_0$. Betrachten wir das Cesàro-Mittel. Sei $\epsilon > 0$ dann müssen wir zeigen, dass ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert so, dass $|\sigma_N - 0| < \epsilon$ für alle $N \geq N_0$ ist. In der Tat gilt für $\epsilon > 0$ und $N \geq N_0$:

$$\begin{aligned}
|\sigma_N - 0| \leq |\sigma_N| &= |\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} c_k| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |s_k| = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^{k} c_i - 0 \right| \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^{n_0-1} c_i + \sum_{i=n_0}^{k} c_i \right| \leq \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^{n_0-1} c_i \right| + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \sum_{i=n_0}^{k} c_i \right| \\
&\overset{\text{Vor.}}{\leq} \underbrace{\frac{1}{N_0} \sum_{k=0}^{N-1} \left| \sum_{i=0}^{n_0-1} c_i \right|}_{\leq \frac{\epsilon}{2}} + \frac{1}{N} N \cdot \frac{\epsilon}{2} \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Reihe konvergent im Sinne von Cesàro gegen den Grenzwert 0. $\square$

Nun illustrieren wir die Definition an einem einfachen Beispiel.

(3.4) Beispiel
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ ist divergent, da sie zwischen 1 und 0 alterniert (Analysis I). Sie ist jedoch konvergent im Sinne von Cesàro, denn ihre ersten N Partialsummen lassen sich unter Verwendung der oberen Gauß-Klammer zu

$$\sigma_N = \frac{1}{N}(1+0+1+\cdots+1) = \frac{1}{N}(\frac{1}{2}[N+1]\cdot 1) = \frac{[N+1]}{2N}$$

zusammenfassen. So folgt für den Grenzwert

$$\lim_{N\to\infty}\sigma_N = \lim_{N\to\infty}\frac{[N+1]}{2N} = \frac{1}{2}$$

Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k$ ist also konvergent gegen $\frac{1}{2}$ im Sinne von Cesàro. $\diamond$

Um nun aus der Theorie der Cesàro-Summation einen Gewinn für die Fourier-Analysis zu erhalten, betrachten wir im Folgenden die Cesàro-Summation von Fourier-Reihen. Zuvor halten wir bereits gezeigt, dass die Familie der Dirichlet-Kerne keine approximierende Identität ist. Jedoch werden wir feststellen, dass ihr im Hinblick auf die Eigenschaften der approximierenden Identität nützlich sein wird.

§4 Theorem von Fejér

Als erstes betrachten wir das Cesàro-Mittel einer Fourier-Reihe.

(4.1) Definition
Der Ausdruck

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N}\left(S_0(f)(x) + S_1(f)(x) \cdots + S_{N-1}(f)(x)\right) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x)$$

beschreibt das N-te Cesàro-Mittel der Fourier-Reihe mit den Partialsummen $S_k(f)(x)$.◇

Dieser Ausdruck lässt sich mit Hilfe einer neuen Familie von Kernen, den Fejér-Kernen, als Faltung schreiben.

(4.2) Definition
Für $N \in \mathbb{N}$ ist der *N-te Fejér-Kern* gegeben durch

$$F_N(x) = \frac{D_0(x) + \cdots + D_{N-1}(x)}{N} = \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} D_i(x)$$

wobei D_i der i-te Dirichlet-Kern ist. ◇

In (4.1) hatten wir gezeigt, dass für Partialsummen der Fourier-Reihe gilt $S_N(f) = f * D_N$, auch für das Cesàro-Mittel erhalten wir eine ähnlich Darstellung.

(4.3) Satz
Das N-te Cesàro-Mittel einer Fourier-Reihe lässt sich darstellen als Faltung mit den Fejér-Kernen, das heißt

$$\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x)$$ ◇

Beweis
Zeigen wir nun die Identität $\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x)$ für alle $x \in [-\pi, \pi]$

$$\begin{aligned}\sigma_N(f)(x) = (f * F_N)(x) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} S_k(f)(x) \\ &\underset{(4.1)}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f * D_k(x) \underset{(3.1)}{=} \left(f * \sum_{k=0}^{N-1}\frac{D_k}{N}\right)(x) \\ &\underset{\substack{\text{Def.}\\ F_N(x)}}{=} (f * F_N)(x).\end{aligned}$$

Als sehr nützliche Eigenschaft haben folgendes Lemma für Fejér-Kerne.

(4.4) Lemma
Für die Fejér-Kerne haben wir folgende Identität

$$F_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin^2(\frac{1}{2}Nx)}{\sin^2(\frac{1}{2}x)}, & \text{für } x \neq 0 \text{ (bzw. } x \notin 2\pi\mathbb{Z}) \\ N, & \text{für } x = 0 \text{ (bzw. } x \in 2\pi\mathbb{Z}) \end{cases}$$

Desweitern ist die Familie der Fejér-Kerne eine Familie von guten Kernen. ◇

Beweis
Wir werden nun die Eigenschaft nachrechnen, die wir benötigen, um eine approximierende Identität zu erhalten.

- (i) Zu der ersten Eigenschaft ist zu zeigen, dass $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\mathrm{d}x = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\mathrm{d}x &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_N(x)\mathrm{d}x \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_N(x) \underset{(4.1)}{=} \sum_{k=0}^{N-1}\frac{1}{N} = 1. \end{aligned}$$

- (ii) Für die zweite Eigenschaft müssen wir zeigen, dass es ein $M > 0$ gibt so, dass

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)|\mathrm{d}x \leq M$$

ist. Da $F_N(x) \geq 0$ für alle N und x ist, gilt mit (i)

$$\int_{-\pi}^{\pi} |F_N(x)|\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} F_N(x)\mathrm{d}x = 2\pi.$$

- (iii) Als letztes müssen wir für $x \neq 0$ zeigen, dass für jedes $\delta > 0$ gilt $\left|\int_{\delta<|x|\leq\pi} |F_N(x)|dx - 0\right| < \epsilon$ für alle $N \geq n_0$. Da $F_N(x) \geq 0$ entfallen die Beträge. Es gilt daher

$$\left|\int_{\delta<|x|\leq\pi} F_N(x)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{\delta<|x|\leq\pi} \frac{1}{N}\frac{\sin^2(N\frac{x}{2})}{\sin^2(\frac{x}{2})}\mathrm{d}x\right|.$$

Auf $[0, \frac{\pi}{2}]$ ist $\sin(s)$ monoton steigend also gilt für $0 < \delta \leq t \leq \pi$

$$\sin^2(\frac{x}{2}) \geq \sin^2(\frac{\delta}{2}) > c_\delta > 0$$

und für $-\pi \leq t \leq -\delta$:

$$\sin^2(\frac{x}{2}) \geq \sin^2(\frac{\delta}{2}) > c_\delta > 0.$$

Also gilt somit

$$\left| \int\limits_{\delta<|x|\leq\pi} F_N(x)\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{N} \int\limits_{\delta<|x|\leq\pi} \frac{1}{\sin(\frac{\delta}{2})}\mathrm{d}x.$$

Nun ist der Integrant unabhängig von den Variabeln so, dass nur noch die Intervalllänge zu berücksichtigen ist. Wir erhalten finden damit für

$\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $N \geq n_0$ gilt

$$\left| \int\limits_{\delta<|x|\leq\pi} F_N(x)\mathrm{d}x \right| \leq \frac{1}{N} \cdot \frac{2(\pi-\delta)}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} < \frac{1}{n_0} \cdot \frac{2(\pi-\delta)}{\sin^2(\frac{\delta}{2})} < \epsilon.$$

Nun zur Identität. Für $x = 0$ gilt

$$\begin{aligned} F_N(0) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(0) \underset{\text{Vortrag 1}}{=} \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}(2k+1) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(2k-1) \\ &= \frac{1}{N}(2\sum_{k=1}^{N} k - \sum_{k=1}^{N} 1) = \frac{1}{N}(N(N+1)-N) = \frac{1}{N}(N(N+1-1)) = N. \end{aligned}$$

Für den Fall $x \neq 0$ ist

$$F_N(x) = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sin^2(\frac{1}{2}Nx)}{\sin^2(\frac{1}{2}x)}$$

zu beweisen. Dazu überführen wir $D_k(x)$ zunächst in eine passende Form.

$$
\begin{aligned}
D_k(x) &\underset{(1.1.4)}{=} \frac{\sin\left(kx+\frac{1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{\frac{1}{2i}\left(e^{i(kx+\frac{1}{2}x)} - e^{-i(kx+\frac{1}{2}x)}\right)}{\frac{1}{2i}\left(e^{i\frac{x}{2}} - e^{-i\frac{x}{2}}\right)} \\
&= \frac{e^{-i\frac{x}{2}}}{e^{-i\frac{x}{2}}} \cdot \frac{\left(e^{ikx+ik} - e^{-ix(k+x)}\right)\cdot\left(e^{-ix}-1\right)}{e^{ix}-1\cdot\left(e^{-ix}-1\right)} \\
&= \frac{e^{ikx}+e^{-ikx} - \left(e^{-ix(k+1)} + e^{ix(k+1)}\right)}{2-\left(e^{-ix}+e^{ix}\right)} \\
&= \frac{2\cos(kx) - 2\cos(x(k+1))}{2-2\cos(x)} = \frac{\cos(kx)-\cos(x(k+1))}{1-\cos(x)}.
\end{aligned}
$$

Damit können wir nun die Fejér-Kerne umschreiben.

$$
\begin{aligned}
F_N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} D_k(x) = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\cos(kx)-\cos(x(k+1))}{1-\cos(x)} \\
&= \frac{1}{N}\cdot\frac{1}{1-\cos(x)}\sum_{k=0}^{N-1}\left(\cos(kx)-\cos((k+1)x)\right) \\
&= \frac{1}{N(1-\cos(x))}\left(\cos(0)-\cos(Nx)\right) \\
&\underset{(*)}{=} \frac{2\sin^2\left(\frac{1}{2}Nx\right)}{2N\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)} = \frac{\sin^2\left(\frac{1}{2}Nx\right)}{N\left(\sin^2\left(\frac{1}{2}x\right)\right)}.
\end{aligned}
$$

Diese Gleichheit $(*)$ gilt mit dem folgenden Additionstheorem:

$$\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{2}(1-\cos(x)) \Leftrightarrow 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = 1-\cos(x). \qquad \square$$

Die Feststellung, dass das Cesàro-Mittel von f als Faltung mit guten Kernen und f geschrieben werden kann liefert folgenden Satz.

(4.5) Satz

(i) Ist f auf dem Kreis integrierbar, dann ist die Fourier-Reihe von f konvergent im Sinne von Cesàro gegen f, in allen Punkten in denen f stetig ist.

(ii) Ist f stetig auf dem ganzen Kreis, dann ist die Fourier-Reihe von f gleichmäßig konvergent im Sinne von Cesàro gegen f. ◇

Beweis
$(F_N)_{N=1}^{\infty}$ sind nach Lemma (4.4) eine approximierende Identität. Weiter ist

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) = (f * F_N)(x).$$

Also erhält man an allen stetigen Stellen von f (nach 4.1)

$$\lim_{N\to\infty}(f * F_N)(x) = f(x).$$

Für eine stetige Funktion folgt so auch die gleichmäßige Konvergenz gegen f. □

Aus diesem Satz lassen sich folgende Korollare ableiten.

(4.6) Korollar

(i) Ist f integrierbar auf dem Kreis und $\hat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ dann folgt direkt $f = 0$, in allen Punkten in denen f stetig ist.

(ii) Stetige Funktionen (auf dem Kreis) können gleichmäßig durch ein trigonometrisches Polynom approximiert werden. ◇

Beweis
Zu (i):
Zunächst wollen wir zeigen, dass wenn f auf dem Kreis integrierbar ist und $\hat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Gleichung $f = 0$ an allen Stetigkeitspunkten erfüllt ist.

Nach (4.5.i) ist die Fourier-Reihe von f im Sinne von Cesàro konvergent an allen Stellen an denen f stetig ist. Also

$$f(x) = \lim_{N\to\infty} \sigma_N(f)(x)$$

für alle x an denen f stetig ist. Weiter gilt $\hat{f}(n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{Z}$, also folgt aus (2.2), dass $f = 0$ an den Stetigkeitstellen gilt.

Zu (ii):
Als nächstes wollen wir zeigen, dass stetige Funktionen durch ein trigonometrisches Polynom gleichmäßig approximiert werden können. Das Cesàro Mittel ist selbst ein trigonometrisches Polynom, denn

$$\sigma_N(f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} S_n(f)(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}\sum_{k=-n}^{n} \hat{f}(k)e^{ixk}.$$

Für $k = 0$ wird der Faktor $N - 1$ N-mal auftreten und für $|k| = 1$ wird der Faktor $N - 1$-mal auftreten. Für $|k| = l$ wird der Faktor $(N - l)$, wobei $l \in [0, N - 1]$ ist, auftreten so, dass sich die Summe wie folgt zusammen fassen lässt:

$$\sigma_N(f)(x) = \sum_{k=-N}^{N} \underbrace{\frac{N - |k|}{N} \cdot \hat{f}(k)}_{=:c_k} e^{ixk}.$$

Polynom $p(x) = \sum_{k=-N}^{N} c_k e^{ixk}$. Da f stetig ist gilt $p(x) = \sigma_N(f)(x)$ konvergiert gleichmäßig gegen $f(x)$. Also kann f durch ein trigonometrisches Polynom approximiert werden. □

Die Methode mit Hilfe des Cesàro-Mittels Probleme in der Fourier-Analysis zu lösen lässt sich auch mit Hilfe einer neuen Summationsmethode, der Abel-Summation, fortsetzen. Aus den Ergebnissen die wir durch das Abel-Mittel gewinnen werden, erschließen sich uns dann Lösungswege für erste anwendungsorientierte Probleme.

§5 Abel-Mittel und Abel-Summation

Die Abel-Summation ist eine weitere Form der Summation die wir zunächst definieren wollen.

(5.1) Definition
Die $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ eine Reihe von komplexen Zahlen c_k. Eine solche Reihe heißt *konvergent im Sinne von Abel* gegen $s \in \mathbb{C}$, falls für alle $r \in [0, 1)$ die Reihe

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^k,$$

genannt *Abel-Mittel*, konvergiert und

$$\lim_{r \to 1} A(r) = s$$

ist. ◇

Aus dem vorherigen Kapitel wissen wir, dass jede konvergente Reihe auch im Sinne von Cesàro konvergent ist. Auch für das Abel-Mittel lässt sich eine solche Aussage treffen.

(5.2) Lemma
Ist eine Reihe konvergent im Sinne von Cesàro, so ist sie auch im Sinne von Abel konvergent. Die Grenzwerte sind dann gleich. ◇

Beweis
Wir wollen nun zeigen, dass eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ die konvergent im Sinne von Cesàro gegen σ ist auch im Sinne von Abel gegen σ konvergiert.
Zunächst nehmen wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit an, dass unser Grenzwert $\sigma = 0$ ist, andernfalls betrachte man $(\sigma_N - \sigma)_{N=1}^{\infty}$ statt $(\sigma_N)_{N=1}^{\infty}$. Als erstes soll nun eine Gleichheit gezeigt werden die wir für unsere weiteren Überlegungen brauchen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = (1 - r)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_n r^n, \tag{1}$$

für $0 \leq r < 1$. Hierzu ist es äquivalent die Gleichheit folgender Gleichung zu zeigen:

$$\frac{1}{(1 - r)^2} \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} n \sigma_n r^n. \tag{2}$$

Für $r \in [0,1)$ wissen wir, dass die geometrische Reihe absolut gegen

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \tag{3}$$

konvergiert. Also konvergiert auch

$$\left(\frac{1}{1-r}\right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1}. \tag{4}$$

absolut. Mit Hilfe von Ausdruck (2) und (4) können wir nun das Cauchy-Produkt berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-r)^2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n &= \sum_{n=1}^{\infty} nr^{n-1} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \\
&\underset{\text{Cauchy-Produkt}}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{n}(n-j)r^{n-j}c_j r^j \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{j=1}^{n}(n-j)c_j.
\end{aligned}$$

Wir wissen

$$\sum_{j=1}^{n-1} s_j = \sum_{k=1}^{1} c_k + \sum_{k=1}^{2} c_k + \cdots + \sum_{k=1}^{n-1} c_k = \sum_{k=1}^{n}(n-k)c_k. \tag{5}$$

Mit dem Ausdruck (5) erhalten wir nun

$$\frac{1}{(1-r)^2}\sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n = \sum_{n=1}^{\infty} r^n \sum_{j=1}^{n-1} s_j \underset{\text{Def.}\sigma_n}{=} \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cdot n\sigma_n$$

Nach Voraussetzung ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergent im Sinne von Cesàro. Nach dem Abelschen-Lemma folgt, dass $\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sigma_n r^n$ konvergiert, da für $r \to 1$, $(\sigma_n r^n)_{n=1}^{\infty}$ durch $(\sigma_n)_{n=1}^{\infty}$ beschränkt ist. Weiter ist die inverse Exponentialfunktion absolut konvergent, nach dem Satz über das Cauchy-Produkt konvergiert auch die linke Seite. Weiter konvergiert für $r \to 1$ die rechte Seite von Ausdruck (1) gegen 0, da nach erneuter Anwendung des Abelschen Lemmas der Grenzwert in die Summe gezogen werden kann.
Damit konvergiert auch die linke Seite gegen den Grenzwert 0. □

Unsere bisherigen Erkenntnisse lassen sich mit einem kleinen Beispiel veranschaulichen.

(5.3) Beispiel
Die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)$ ist konvergent im Sinne von Abel gegen $\frac{1}{4}$, da

$$\begin{aligned} A(r) &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-r)^k(k+1) = \left(\sum_{k=0}^{\infty}(-r)^k\right)^2 \\ &\underset{\text{via geom. Reihe}}{=} \frac{1}{(1+r)^2} \quad \text{für} \quad 0 \leq r < 1 \end{aligned}$$

$$\lim_{r\to 1}\frac{1}{(1-r)^2} = \frac{1}{4}$$

Sie ist aber nicht konvergent im Sinne von Cesàro, da die Summe der Partialsummen weiterhin alternieren. ◇

Ähnlich wie bei dem Cesàro-Mittel wollen wir nun einen Zusammenhang zwischen der Fourier-Reihe und dem Abel-Mittel herleiten.

(5.4) Bemerkung
Ist $f(\Theta) \sim \sum_{n=-\infty}^{\infty}\hat{f}(n)e^{in\Theta}$ die durch f beschriebene Fourier-Reihe so ist deren Abel-Mittel als

$$A_r(f)(\Theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}\hat{f}(n)e^{in\Theta}$$

gegeben. ◇

Da wir bei dem Cesàro-Mittel die Möglichkeit haben dieses als Faltung auszudrücken, wünschen wir uns auch etwas Ähnliches bei dem Abel-Mittel

(5.5) Satz
Die Funktion f ist integrierbar und alle $|\hat{f}(n)|$ sind gleichmäßig beschränkt, daraus folgt die gleichmäßige und absolute Konvergenz von $A_r(f)$ für jedes $r \in [0,1)$. So können wir hier für $A_r(f)(\Theta)$ eine Faltung angeben

$$A_r(f)(\Theta) = (f * P_r(\Theta))$$

wobei $P_r(\Theta)$ Poisson-Kerne sind. ◇

Beweis
Wir wollen nun die Identität $A_r(f)(\Theta) = (f * P_r(\Theta))$ zeigen:

$$
\begin{aligned}
(f * P_r)(\Theta) &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\Theta - y)P_r(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(\Theta - y) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{iny}\mathrm{d}y \\
&\underset{(3.0)}{=} \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in(\Theta - x)}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)(\sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{-inx})\mathrm{d}x e^{in\Theta} \\
&\underset{\text{glm. Konv.}}{=} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}\mathrm{d}x)r^{|n|}e^{in\Theta} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n)r^{|n|}e^{in\Theta} \\
&= A_r(f)(\Theta)
\end{aligned}
$$

□

Um nun einen Nutzen aus der Darstellung von $A_r(f)$ als Faltung ziehen können stellen wie noch eine Anforderung an die Familie der Poisson-Kerne, welche wir in einem Korollar festhalten wollen.

(5.6) Korollar
Poisson-Kerne sind gute Kerne, d.h. die Familie der Poisson-Kerne stellt eine approximierende Identität dar. ◇

Beweis
Wir wollen nun zeigen, dass es sich bei der Familie der Poisson-Kerne um eine approximierende Identität handelt.

(i) Zeige zunächst $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\Theta)\mathrm{d}\Theta = 1$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\Theta)\mathrm{d}\Theta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\Theta}\mathrm{d}\Theta$$
$$\underset{glm.Konv.}{=} \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} r^{|n|}e^{in\Theta}\mathrm{d}\Theta$$
$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\substack{n=-\infty\\ n\neq 0}}^{\infty} \frac{1}{in}r^{|n|}\underbrace{(e^{in\pi}-e^{-in\pi})}_{=0}+1$$

(ii) Als nächstes müssen wir zeigen, dass ein $M > 0$ gibt so, dass $P_r(\Theta)$ folgendes erfüllt

$$\int_{-\pi}^{\pi} |P_r(\Theta)|\mathrm{d}\Theta \leq M.$$

Da $P_r(\Theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r^{|n|}e^{in\Theta} \geq 0$ für alle r, Θ gilt mit (i)

$$\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\Theta)\mathrm{d}\Theta = 2\pi.$$

(iii) Als letztes muss für jedes $\delta > 0$ und $\epsilon > 0$ gezeigt werden, dass ein $r_0 \in [0, 1)$ existiert, dass folgende Bedingung erfüllt ist

$$\left| \int_{\delta<|x|\leq\pi} |P_r(\Theta)|\mathrm{d}\Theta - 0 \right| < \epsilon$$

für alle $r_0 < r$. Da

$$P_r(\Theta) = \frac{1-r^2}{1-2r\cos(\Theta)+r^2} = \frac{1-r^2}{(1-r)^2+2r(1-\cos(\Theta))}$$

ist, gilt

$$(1-r)^2 + 2r(1-\cos(\Theta)) \geq c_\delta > 0$$

sowie $\frac{1}{2} \leq r_0 < 1$ und $0 < \delta \leq |\Theta| \leq \pi$ und damit

$$P_r(\Theta) \leq \frac{1}{c_\delta}(1 - r_0^2) \leq \frac{1}{c_\delta}.$$

Da nun das Integral unabhängig von Θ ist, ergibt sich

$$\left| \int\limits_{\delta<|x|\leq\pi} |P_r(\Theta)| \mathrm{d}\Theta \right| \underset{P_r(\Theta)\geq 0}{=} \left| \int\limits_{\delta<|x|\leq\pi} P_r(\Theta) \mathrm{d}\Theta \right| \leq \frac{1}{c_\delta} \cdot 2(\pi - \delta) < \epsilon. \qquad \square$$

Den Nutzen in der Fourier-Analysis gibt uns folgender Satz

(5.7) Satz
Die Fourier-Reihe einer integrierbaren Funktion auf dem Kreis ist im Sinne von Abel konvergent in allen Punkten in denen f stetig ist. Ist f stetig so ist die Fourier-Reihe gleichmäßig konvergent im Sinne von Abel. $\diamond$

Beweis
Zu zeigen: Die Fourier-Reihe von integrierbaren Funktionen auf dem Kreis sind in allen Stetigkeitsstellen von f konvergent im Sinne von Abel. Ist f stetig, so konvergiert die Fourier-Reihe gleichmäßig.
Hierzu: Da es sich bei der Familie der Poisson-Kernen um eine approximierende Identität handelt und sich das Abel-Mittel als Faltung schreiben lässt, erhält man mit (4.1) an allen stetigen Punkten von f

$$\lim_{r\to 1}(f * P_r)(\Theta) = f(\Theta). \qquad \square$$

Daraus folgt für eine stetige Funktion f die gleichmäßige Konvergenz.

§6 Erste Anwendungen

Betrachten wir $A_r(f)(\Theta)$ als Funktion von zwei Variabeln r und Θ

$$u(r,\Theta) = A_r(f)(\Theta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) P_r(\Theta - x) dx$$

erlaubt dies folgenden Satz.

(6.1) Satz
Sei die Funktion u integrierbar und definiert auf der Einheitsscheibe, dann hat die Funktion u folgende Eigenschaften

(i) u ist zweimal stetig differenzierbar auf der Einheitsscheibe und es gilt $\Delta u = 0$.

(ii) An jedem stetigen Punkt von f gilt

$$\lim_{r \to 1} u(r,\Theta) = f(\Theta)$$

ist f überall stetig, dann ist die obige Konvergenz sogar gleichmäßig.

(iii) Ist f stetig so ist $u(r,\Theta)$ die einzige Lösung der Wärmeleitgleichung

$$\frac{\delta^2 u}{\delta r^2} + \frac{\delta^2 u}{\delta \Theta^2} = 0$$

auf der Einheitsscheibe, die die Bedingungen (i) und (ii) erfüllt. ◇

Beweis
Da u durch eine Reihe beschrieben werden kann, die auf jeder Einheitsscheibe mit Radius ρ $(0 < r < \rho < 1)$ absolut und gleichmäßig konvergiert, kann die Reihe beliebig oft differenziert werden. Die Ableitungen sind erneut absolut und gleichmäßig konvergente Reihen auf der Einheitsscheibe.
Zu (i):

$$u(r,\Theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m) r^{|m|} e^{im\Theta}$$

Zu zeigen ist $\Delta u = 0$:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}u(r,\Theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m)|m|r^{|m|-2}e^{im\Theta}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}u(r,\Theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m)|m|(|m|-1)r^{|m|-2}e^{im\Theta}$$
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2}u(r,\Theta) = -\sum_{m=-\infty}^{\infty} r^{|m|-2}m^2e^{im\Theta}.$$

So erhalten wir für $\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \Theta^2}$ somit

$$\Delta u(r,\Theta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{f}(m)r^{|m|-2}e^{im\Theta}(|m| + m^2 - |m| - m^2) = 0.$$

Zu (ii):
An jeder Stetigkeitsstelle von f gilt für den Grenzwert

$$\lim_{r\to 1} u(r,\Theta) = f(\Theta).$$

Da u sich als Faltung $u(r,\Theta) = (f * P_r)(\Theta)$ schreiben lässt, $(P_r)_r$ eine Familie guter Kerne und f integrierbar auf dem Kreis ist, folgt mit (4.1) die Behauptung.
Zu (iii):
Zu zeigen ist: v ist die einzige Lösung der Wärmeleitungsgleichung die (i) und (ii) erfüllt.
Voraussetzungen: f ist integrierbar auf dem Einheitskreis, $u(r,\Theta) = (f * P_r)(\Theta)$, das heißt Poisson Integral auf dem Einheitskries und f ist stetig.
Annahme: $v(r,\Theta)$ löst die stationäre Wärmeleitungsgleichung in der Kreisscheibe und konvergiert gleichmäßig gegen f für $\lim_{r\to 1^-} v(r,\Theta) = f(\Theta)$. Für ein festes $r \in (0,1)$ hat $v(r,\Theta)$ dann eine Fourier-Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r)e^{in\Theta} \quad \text{mit} \quad a_n(r) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} v(r,\Theta)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta.$$

Unter Berücksichtigung dass $v(r,\Theta)$ die stationäre Wärmeleitungsgleichung löst, also insbesondere in Polarkoordinaten

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 v}{\partial \Theta^2} = 0.$$

Wenn wir nun die Gleichung mit $e^{-in\Theta}$ multiplizieren erhalten wir

$$\frac{\partial^2 ve^{-in\Theta}}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial ve^{-in\Theta}}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial^2 ve^{-in\Theta}}{\partial \Theta^2} = 0.$$

Bilden wir nun über dieser Gleichung das Integralnach Θ erhalten wir nach einer Multiplikation mit $\frac{1}{2\pi}$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 v(r,\Theta)}{\partial r^2}e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta+\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial v(r,\Theta)}{\partial r}e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta+\underbrace{\frac{1}{r^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 v(r,\Theta)}{\partial \Theta^2}e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta}_{*}=0.$$

Betrachten wir nun zunächst den Term $*$, dieser kann partiell integriert werden:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2 v(r,\Theta)}{\partial \Theta^2}e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta\\
=\quad&\frac{1}{r^2 2\pi}\left[\left[\frac{\partial v(r,\Theta)}{\partial\Theta}e^{-in\Theta}\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial v(r,\Theta)}{\partial\Theta}(-in)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta\right]\\
\underset{\text{P.I.}}{=}\quad&\frac{1}{r^2 2\pi}\left[\left[\frac{\partial v(r,\Theta)}{\partial\Theta}e^{-in\Theta}\right]_{-\pi}^{\pi}-\left[\left[v(r,\Theta)(-in)e^{-in\Theta}\right]_{-\pi}^{\pi}-\int_{-\pi}^{\pi}v(r,\Theta)(-n^2)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta\right]\right]\\
\underset{v\ 2\pi\text{-per.}}{=}\quad&\frac{1}{r^2 2\pi}\left[0-\left[0+n^2\int_{-\pi}^{\pi}v(r,\Theta)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta\right]\right]\\
=\quad&-\frac{1}{r^2 2\pi}n^2\int_{-\pi}^{\pi}v(r,\Theta)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta.
\end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$-\frac{1}{r^2}n^2\underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(r,\Theta)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta}_{a_n(r)}=-\frac{1}{r^2}n^2 a_n(r).$$

Nachdem wir nun den Term $*$ behandelt haben, kehren wir zurück zur Ausgangsgleichung. Da v zweimal stetig differenzierbar ist mit $\Delta v = 0$, dürfen Integration und Differntiation vertauscht werden.

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(r,\Theta)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}v(r,\Theta)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta+\frac{1}{r^2}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}v(r,\Theta)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta=0.$$

Nach kurzer Umformung erhalten wir so

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}a_n(r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}a_n(r)+\frac{1}{r^2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial^2}{\partial\Theta^2}v(r,\Theta)e^{-in\Theta}\mathrm{d}\Theta.$$

Unter Verwendung von $*$ erhalten wir nun die Gleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} a_n(r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} a_n(r) - \frac{1}{r^2} n^2 a_n(r) = 0.$$

Diese Gleichung hat nachdem man sie mit r^2 multipliziert hat die Form einer linearen, homogenen Differentialgleichung 2-ter Ordnung, so dass als Lösungen, mit Hilfe des charakteristischen Polynom nur solche der Form

$$A_n r^n + B_n r^{-n} = a_n(r)$$

mit $A_n, B_n \in \mathbb{C}$ und $n \neq 0$ beziehungsweise

$$A_n r^n + B_n \cdot \log(r) = a_n(r)$$

für $n = 0$ in Frage kommen. Da wir wissen, dass unsere Fourier-Koeffizienten beschränkt sind, folgern wir

$$|a_n(r)| = |A_n r^n + B_n r^{-n}| \leq |A_n||r^n| + |B_n||r^{-n}|$$

für $n \neq 0$ beziehungsweise

$$|a_n(r)| \leq |A_n||r^n| + |B_n||\log(r)|$$

für $n = 0$, dass $B_n = 0$, da sowohl $|r^{-n}|$ als auch $|\log(r)|$ für $r \leq 1$ unbeschränkt sind. Somit bleibt $a_n(r) = A_n r^n$. Aus den Voraussetzungen folgt dann

$$\lim_{r\to 1} a_n(r) = \lim_{r\to 1} A_n r^n = A_n.$$

Nun nutzen wir die gleichmäßige Konvergenz von v für $r \to 1$ gegen f aus und dass v in Θ integrierbar ist

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r,\Theta) e^{-in\Theta} \mathrm{d}\Theta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \lim_{r\to 1} v(r,\Theta) e^{-in\Theta} \mathrm{d}\Theta.$$

Mit $\lim_{r\to 1} v(r,\Theta) = f(\Theta)$ nach Voraussetzung erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\Theta) e^{-in\Theta} \mathrm{d}\Theta = A_n.$$

Somit können wir folgern, dass für jedes $0 < r < 1$ die Fourier-Reihe von v gegeben ist durch die Reihe von $u(r,\Theta)$. Wegen der Eindeutigkeit der Fourierkoeffizienten für stetige Funktionen erhalten wir $u = v$. $\square$