Lehrstuhl A für Mathematik
JRG Algorithmische Algebra
Prof. Dr. J. Hartmann
Dr. Michael Wibmer

Aachen, den 26.11.2010

Algebraische Gruppen, Übungsblatt 4

Abgabe bis Freitag, den 10.12.2010, 10:00 Uhr

Es sei stets k ein algebraisch abgeschlossener Körper.

Aufgabe 14 (5 Punkte)

(1) Es sei V ein endlich dimensionaler k-Vektorraum und $g \in \mathrm{End}(V)$. Zeigen Sie:

  (a) g is nilpotent (unipotent) genau dann wenn alle Eigenwerte von g gleich Null (Eins) sind.

  (b) In Charakteristik Null ist jedes Element endlicher Ordnung in Gl_n halbeinfach. Stimmt das auch in positiver Charakteristik?

(2) Es seien V, W endlich dimensionale k-Vektorräume und $g \in \mathrm{Gl}(V)$, $h \in \mathrm{Gl}(W)$. Dann ist $(g \otimes h)_s = (g_s \otimes h_s)$ und $(g \otimes h)_u = g_u \otimes h_u \in \mathrm{Gl}(V \otimes_k W)$.

Aufgabe 15 (5 Punkte)

Es sei die Charakteristik von k gleich Null. Seien $U \in \mathrm{Gl}_n$ unipotent, $N \in \mathrm{Gl}_n$ nilpotent und $I_n \in \mathrm{Gl}_n$ die Einheitsmatrix. Zeigen Sie:

(1) Die Vorschrift $\log(U) := \sum_{i=1}^{\infty}(-1)^{i+1}\frac{(U-I_n)^i}{i}$ definiert ein nilpotentes Element in $k^{n\times n}$.

(2) Die Vorschrift $\exp(N) := \sum_{i=0}^{\infty}\frac{N^i}{i!}$ definiert ein unipotentes Element in Gl_n.

(3) $\exp(\log(U)) = U$ und $\log(\exp(N)) = N$.

(4) Für $U \neq I_n$ definiert die Abbildung $\phi : \mathbb{G}_a \to \mathrm{Gl}_n,\ \lambda \mapsto \exp(\lambda \log(U))$ einen Isomorphismus von $\mathbb{G}_a$ auf eine abgeschlossene Untergruppe von Gl_n. Dies ist die kleinste abgeschlossene Untergruppe von Gl_n die U enthält.

Aufgabe 16 (5 Punkte)

(1) Es sei $G = \mathrm{Sl}_2(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass G_s und G_u keine Untergruppen von G sind.

(2) Es sei $G = \mathrm{T}_2(\mathbb{C})$. Zeigen Sie, dass G_s weder abgeschlossen noch offen in G ist.

Aufgabe 17 (5 Punkte)

Es sei G eine abgeschlossene Untergruppe von Gl_n, so dass k^n mit der natürlichen Operation von G ein irreduzibler G-Modul ist. Zeigen Sie: Die triviale Gruppe ist die einzige normale abgeschlossene unipotente Untergruppe von G.