Chebyshev-Polynome

Vortrag zum Seminar zur Analysis, 04.10.2010

Inga Blundell, Christian Bayer

In dem Vortag geht es darum, dem Zuhörer die Eigenschaften der Chebyshev-Polynome erster und zweiter Art näher zu bringen, sowie den Zusammenhang der beiden Arten darzustellen.

§1 Chebyshev-Polynome erster Art

Wir untersuchen in diesem Abschnitt eine Klasse von Orthogonalpolynomen.

(1.1) Definition. Die CHEBYSHEV-*Polynome erster Art* $T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$ sind definiert durch

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right), x \in \mathbb{R}.$$

Die Definition führt uns zu folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned}
(1) \quad T_0(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^0 + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^0\right) = \tfrac{1}{2}\cdot 2 = 1 \\
T_1(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^1 + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^1\right) = \tfrac{1}{2}\cdot 2 \cdot x = x \\
T_2(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2 + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1+x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1\right) \\
&= 2x^2-1 \\
T_3(x) &= \tfrac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^3 + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^3\right) \\
&= \tfrac{1}{2}\Big(x^3+3x^2\sqrt{x^2-1}+3x\left(x^2-1\right)+\sqrt{x^2-1}^3 \\
&\quad +x^3-3x^2\sqrt{x^2-1}+3x\left(x^2-1\right)-\sqrt{x^2-1}^3\Big) \\
&= \tfrac{1}{2}\left(x^3+3x^3-3x+x^3+3x^3-3x\right) = 4x^3-3x
\end{aligned}$$

Dass es sich in (1.1) wirklich um Polynome handelt und dass es auf die Wahl der (komplexen) Wurzel für $|x| < 1$ nicht ankommt, zeigt das

(1.2) Lemma. *$T_n(x)$ ist ein gerades bzw. ungerades Polynom vom Grad n in $\mathbb{Z}[x]$, wenn n gerade bzw. ungerade ist. Es gilt*

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} x^{n-2k} \left(x^2-1\right)^k$$

sowie

$$T_n(1) = 1, \;\; T_n(-1) = (-1)^n, \;\; T_n(0) = \begin{cases} 0, & \textit{falls } n \textit{ ungerade}, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \textit{falls } n \textit{ gerade}. \end{cases}$$

Beweis. Mit der binomischen Formel folgt:

$$\begin{aligned} T_n(x) &= \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\sqrt{x^2-1}^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\sqrt{x^2-1}^k(-1)^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}\sqrt{x^2-1}^k \underbrace{\left(1+(-1)^k\right)}_{=0,\ falls\ k\ ungerade} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}x^{n-2k}\sqrt{x^2-1}^{2k}\,(1+1) \\ &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}x^{n-2k}\left(x^2-1\right)^k \end{aligned}$$

Also gilt falls n gerade:

$$\begin{aligned} T_n(-x) &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}(-x)^{n-2k}((-x)^2-1)^k \\ &\underbrace{=}_{n\ gerade} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}\left((-x)^2\right)^{(\frac{n}{2}-k)}((-x)^2-1)^k \\ &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n}{2k}\left(x^2\right)^{(\frac{n}{2}-k)}(x^2-1)^k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k \\
&= T_n(x), \text{und damit ist die Funktion gerade.}
\end{aligned}$$

Und falls n ungerade:

$$\begin{aligned}
T_n(-x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} (-x)^{n-2k}((-x)^2-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} (-x)(-x)^{n-1-2k}((-x)^2-1)^k \\
&\underbrace{=}_{n-1\ gerade} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} (-x)\left((-x)^2\right)^{(\frac{n-1}{2}-k)}((-x)^2-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} x(-1)\left(x^2\right)^{(\frac{n-1}{2}-k)}(x^2-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} x(-1)x^{n-1-2k}(x^2-1)^k \\
&= -\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k \\
&= -T_n(x), \text{und damit ist die Funkrion ungerade.}
\end{aligned}$$

Außerdem gilt:

$$\begin{aligned}
T_n(1) &= \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{1^2-1}\right)^n + \left(1-\sqrt{1^2-1}\right)^n\right) = \frac{1}{2}(1+1) = 1 \\
T_n(-1) &= \frac{1}{2}\left(\left(-1+\sqrt{(-1)^2-1}\right)^n + \left(-1-\sqrt{(-1)^2-1}\right)^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left((-1)^n + (-1)^n\right) = (-1)^n \\
T_n(0) &= \frac{1}{2}\left(\left(0+\sqrt{0^2-1}\right)^n + \left(0-\sqrt{0^2-1}\right)^n\right) = \frac{1}{2}\left(i^n + (-i)^n\right) \\
&= \frac{1}{2} i^n (1+(-1)^n) \\
&= \begin{cases} 0, & falls\ n\ ungerade, \\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & falls\ n\ gerade. \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Die zentralen Eigenschaften formulieren wir in dem

(1.3) Satz. Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

a) $T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N}.$

b) $\sqrt{x^2-1}T_n'(x) = \frac{n}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n\right),\ n \in \mathbb{N}_0.$

c) $f(x) = T_n(x),\ n \in \mathbb{N}$, erfüllt die Differentialgleichung

$$(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + n^2 f(x) = 0.$$

d) $2T_n(x) = \dfrac{T_{n+1}'(x)}{n+1} - \dfrac{T_{n-1}'(x)}{n-1}$ für $n \in \mathbb{N},\ n \geq 2.$

e) $T_n\left(\frac{1}{2}(x+x^{-1})\right) = \frac{1}{2}(x^n + x^{-n}),\ n \in \mathbb{N},\ x \neq 0.$

Beweis. Es genügt die Behauptung für $|x| > 1$ zu beweisen, da es sich um Polynomidentitäten handelt.
a) Es gilt

$$\begin{aligned}
&T_{n+1}(x) - 2xT_n(x) + T_{n-1}(x)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right)\\
&\quad - 2x\frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - 2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n} + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - 2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2} - \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)2x + 1\right)\\
&\quad + \frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)2x + 1\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\underbrace{\left(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1-2x^2-2x\sqrt{x^2-1}+1\right)}_{=0}$$
$$+\frac{1}{2}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\underbrace{\left(x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1-2x^2+2x\sqrt{x^2-1}+1\right)}_{=0}$$
$$=0$$

b)Für n=0 gilt:

$$\sqrt{x^2-1}\cdot T_0'(x)=0=\frac{0}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^0-(x-\sqrt{x^2-1})^0\right)$$

Für n=1 gilt:

$$\sqrt{x^2-1}\cdot T_1'(x)=\sqrt{x^2-1}=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-1}\cdot 2=\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^1-(x-\sqrt{x^2-1})^1\right)$$

Für $n\geq 2$ gilt:

$$\begin{aligned}
T_n'(x) &= \frac{1}{2}\left(n\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\right)\\
&\quad+\frac{1}{2}\left(n\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\left(1-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\right)\\
&=\frac{n}{2}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}+\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}\right)\\
&=\frac{n}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\right).
\end{aligned}$$

c)Für n=0 gilt:

$$(1-x^2)f''(x)-xf'(x)+n^2f(x)\overset{(1)}{=}(1-x^2)\cdot 0-x\cdot 0+1\cdot 0=0$$

Für $n\geq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
T_n''(x) &\overset{b)}{=} \frac{n}{2\sqrt{x^2-1}^3}\left(-\frac{1}{2}\right)2x\left((x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\right)\\
&\quad+\frac{n}{\sqrt{x^2-1}}\,n(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}\left(1+\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2}2x\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \frac{n}{\sqrt{x^2-1}}\, n(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2}2x\right)\\
&= \frac{-nx}{2\sqrt{x^2-1}^3}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\right)\\
&+ \frac{n^2}{\sqrt{x^2-1}}(x+\sqrt{x^2-1})^{n-1}\frac{\sqrt{x^2-1}+x}{\sqrt{x^2-1}}\\
&- \frac{n^2}{\sqrt{x^2-1}}(x-\sqrt{x^2-1})^{n-1}\frac{\sqrt{x^2-1}-x}{\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{-nx}{2\sqrt{x^2-1}^3}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\right)\\
&+ \frac{n^2}{(x^2-1)}T_n(x)
\end{aligned}
$$

Daraus folgt mit $f(x) = T_n(x)$:

$$
\begin{aligned}
&(1-x^2)f''(x) - xf'(x) + n^2 f(x)\\
&= -(x^2-1)f''(x) - xf'(x) + n^2 f(x)\\
&= -(x^2-1)\frac{-nx}{2\sqrt{x^2-1}^3}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\right) - (x^2-1)\frac{n^2}{(x^2-1)}T_n(x)\\
&- x\frac{n}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\right) + n^2T_n(x)\\
&= \frac{nx}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\right) - n^2T_n(x)\\
&- \frac{nx}{2\sqrt{x^2-1}}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n-(x-\sqrt{x^2-1})^n\right) + n^2T_n(x)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

d) Mit b) folgt

$$
\begin{aligned}
&2T_n(x) - \frac{T'_{n+1}(x)}{n+1} + \frac{T'_{n-1}(x)}{n-1}\\
&\overset{b)}{=} \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\\
&- \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n-1}}{2\sqrt{x^2-1}}\\
&= \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n
\end{aligned}
$$

$$- \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n \frac{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^2 - 1}{2\sqrt{x^2-1}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)} - \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n \frac{-\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^2 + 1}{2\sqrt{x^2-1}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)}$$

$$= \left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^n \left(1 - \underbrace{\frac{x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} + x^2 - 2}{2x\sqrt{x^2-1} + 2x^2 - 2}}_{=1}\right)$$

$$+ \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^n \left(1 - \underbrace{\frac{-2x^2 + 2x\sqrt{x^2-1} + 2}{2x\sqrt{x^2-1} - 2x^2 + 2}}_{=1}\right)$$

$$= 0$$

e) Mit (1.1) folgt direkt

$$T_n\left(\frac{1}{2}(x + x^{-1})\right)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(x+x^{-1}) + \sqrt{\frac{1}{4}(x+x^{-1})^2 - 1}\right)^n + \left(\frac{1}{2}(x+x^{-1}) - \sqrt{\frac{1}{4}(x+x^{-1})^2 - 1}\right)^n\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(x+x^{-1}) + \sqrt{\frac{1}{4}(x-x^{-1})^2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}(x+x^{-1}) - \sqrt{\frac{1}{4}(x-x^{-1})^2}\right)^n\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}(x+x^{-1}) + \frac{1}{2}(x-x^{-1})\right)^n + \left(\frac{1}{2}(x+x^{-1}) - \frac{1}{2}(x-x^{-1})\right)^n\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(x^n + x^{-n}\right).$$

$\square$

(1.4) Satz. a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$T_n(\cos\varphi) = \cos(n\varphi),\ \ \varphi \in \mathbb{R},$$
$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \text{ für alle } x \in [-1,1],$$
$$|T_n(x)| \leq 1 \text{ für alle } x \in [-1,1].$$

b) Alle Nullstellen von $T_n(x)$, $n \in \mathbb{N}$, sind von erster Ordnung, liegen im Intervall $[-1,1]$ und sind gegeben durch

$$x_k = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right),\ \ k = 0,1,...,n-1.$$

c) Für alle $m, n \in \mathbb{N}_0, x \in \mathbb{R}$, gilt:

$$T_m(T_n(x)) = T_{mn}(x).$$

d)Für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt:

$$(i) T_n(\varepsilon \cosh\varphi) = \varepsilon^n \cosh(n\varphi), \quad \varphi \in \mathbb{R},\ \varepsilon = \pm 1,$$
$$(ii) T_n(x) = (\text{sgn } x)^n \cosh(n \text{ arcosh } x), \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 1,$$
$$(iii) |T_n(x)| > 1 \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R},\ |x| > 1,\ n \neq 0.$$

Beweis: a) Nach (1.1) gilt

$$\begin{aligned} T_n(\cos\varphi) &= \frac{1}{2}\left[\left(\cos\varphi + \sqrt{\cos^2\varphi - 1}\right)^n + \left(\cos\varphi - \sqrt{\cos^2\varphi - 1}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(\cos\varphi + \sqrt{-\sin^2\varphi}\right)^n + \left(\cos\varphi - \sqrt{-\sin^2\varphi}\right)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n + (\cos\varphi - i\sin\varphi)^n\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\left(e^{i\varphi}\right)^n + \left(e^{-i\varphi}\right)^n\right] = \frac{1}{2}\left[e^{in\varphi} + e^{-in\varphi}\right] = \cos(n\varphi). \end{aligned}$$

Sei $x := \cos\varphi$, dann ist $\varphi = \arccos x$ und es folgt

$$T_n(x) = T_n(\cos\varphi) = \cos(n\varphi) = \cos(n \arccos x)$$

$T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ für alle $x \in [-1,1]$. Daraus folgt $T_n(x) \in [-1,1]$ für alle $x \in [-1,1]$.

b) $T_n(x)$ ist ein Polynom vom Grad n und hat somit höchstens n Nullstellen. Es gilt:

$$\begin{aligned}T_n(x_k) &= \cos(n \arccos x_k) = \cos\left(n \arccos\left(\cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right)\right)\right)\\ &= \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = \cos\left((k+\frac{1}{2})\pi\right) = \cos\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0\end{aligned}$$

Also handelt es sich bei den x_k wirklich um Nullstellen. Es sind n paarweise verschiedene Nullstellen und somit haben alle die Ordnung 1 und es kann keine weiteren geben.

c) Es genügt die Behauptung für $|x| < 1$ zu beweisen, da es sich um Polynomidentitäten handelt. Für $x = \cos\varphi$ folgt mit a)

$$T_m(T_n(x)) = T_m(T_n(\cos\varphi)) = T_m(\cos(n\varphi)) = \cos(mn\varphi) = T_{mn}(\cos\varphi) = T_{mn}(x)$$

d)(i)Wegen $\cosh\varphi = \frac{1}{2}\left(e^{\varphi} + e^{-\varphi}\right)$ impliziert (1.1)

$$\begin{aligned}T_n(\varepsilon\cosh\varphi) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon(e^{\varphi}+e^{-\varphi}) + \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4}\varepsilon^2(e^{\varphi}+e^{-\varphi})^2-1}}_{=\sqrt{sinh^2(\varphi)}}\right)^n\\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon(e^{\varphi}+e^{-\varphi}) - \underbrace{\sqrt{\frac{1}{4}\varepsilon^2(e^{\varphi}+e^{-\varphi})^2-1}}_{=\sqrt{sinh^2(\varphi)}}\right)^n\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon(e^{\varphi}+e^{-\varphi}) + \frac{1}{2}\left|(e^{\varphi}-e^{-\varphi})\right|\right)^n\\ &\quad + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\varepsilon(e^{\varphi}+e^{-\varphi}) - \frac{1}{2}\left|(e^{\varphi}-e^{-\varphi})\right|\right)^n\\ &= \begin{cases} (\frac{1}{2}(e^{n\varphi}+e^{-n\varphi})), & falls\ \varepsilon = 1,\\ (-\frac{1}{2}(e^{n\varphi}+e^{-n\varphi}))(-1)^n, & falls\ \varepsilon = -1.\end{cases}\\ &= \varepsilon^n(\frac{1}{2}(e^{n\varphi}+e^{-n\varphi}))\\ &= \varepsilon^n cosh(n\varphi)\end{aligned}$$

(ii) Mit (i) folgt für alle $x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 1$:

$$\begin{aligned}&(\operatorname{sgn} x)^n \cosh(n\ \ x)\\ &= T_n(\operatorname{sgn} x \cdot \cosh(\ x)) = T_n(\operatorname{sgn} x \cdot |x|)\\ &= T_n(x)\end{aligned}$$

(iii) Mit (ii) folgt, für $n \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R},\ |x| > 1$:

$$\begin{aligned}&|T_n(x)| = |(sgn\ x)^n cosh(n\ arcosh\ x)| = |cosh(n\ arcosh\ x)| \geq 1\\ &und\ |cosh(n\ arcosh\ x)| = 1\\ &\Leftrightarrow\ n\ arcosh\ x = 0\\ &\Leftrightarrow\ arcosh\ x = 0\\ &\Leftrightarrow\ x = 1\\ &\quad \Rightarrow |T_n(x)| > 1\ f\ddot{u}r\ alle|x| > 1\end{aligned}$$

□

Mit (1.4)a) kann man auch die Stellen y_k bzw. z_k bestimmen, in denen $T_n|_{[-1,1]}$ sein Maximum bzw. Minimum annimmt. Sie werden gegeben durch

$$y_k = \cos\left(\frac{2k}{n}\pi\right),\ \ k = 0, 1, ..., \left[\frac{n}{2}\right], \quad z_k = \cos\left(\frac{2k+1}{n}\pi\right),\ k = 0, 1, ..., \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Nun untersuchen wir die erzeugende Funktion

(1.5) Satz. *Für alle $x, t \in \mathbb{R},\ |x| \leq 1,\ |t| < 1$ gilt*

$$w(x,t) = \frac{1-xt}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n.$$

Beweis. Für alle $|x| \leq 1$ gilt $|T_n(x)| \leq 1$, so dass sie geometrische Reihe eine konvergente Majorante der obigen Reihe ist. Dann folgt mit (1) und (1.3)a)

$$\begin{aligned}&\left(\sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n\right) \cdot (1 - 2xt + t^2)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2x T_n(x) t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x) t^{n+2}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= T_0(x) + (T_1(x) - 2xT_0(x))t + \sum_{n=2}^{\infty} T_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xT_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} T_n(x)t^{n+2} \\
&= T_0(x) + (T_1(x) - 2xT_0(x))t + \sum_{n=2}^{\infty} [T_n(x) - 2xT_{n-1}(x) + T_{n-2}(x)]t^n \\
&= 1 + (x-2x)t + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot t^n \\
&= 1 - xt
\end{aligned}
$$

□

Als Folgerung erhalten wir eine weitere explizite Darstellung der $T_n(x)$.

(1.6) Korollar. *Für alle* $n \in \mathbb{N}_0,\ x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$T_n(x) = \frac{n}{2} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(n-1-k)!}{k!(n-2k)!} (2x)^{n-2k}.$$

Beweis. Es genügt die Identität für $|x| \leq \frac{1}{2}$ zu beweisen. Aus (1.5) folgt für $|x| \leq \frac{1}{2}$, $|t| \leq \frac{1}{2}$

$$
\begin{aligned}
w(x,t) &= \frac{1-xt}{1-2xt+t^2} \overset{\text{geom. Reihe}}{=} (1-xt) \sum_{m=0}^{\infty} (2xt+t^2)^m \\
&= (1-xt) \sum_{m=0}^{\infty} (2xt-t^2)^m \overset{\text{bin. Lehrsatz}}{=} (1-xt) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (2xt)^{m-k}(-t^2)^k \\
&= (1-xt) \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (-1)^k (2x)^{m-k} t^{m+k} \\
&= (1-xt) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} (-1)^k (2x)^{n-2k} \right) t^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} (-1)^k (2x)^{n-2k} \right) t^n - \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} (-1)^k (2x)^{n-2k} x \right) t^{n+1} \right] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} (-1)^k (2x)^{n-2k} \right) t^n - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k} (-1)^k (2x)^{n+1-2k} \right) t^{n+1} \right]
\end{aligned}
$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (1.5) folgt daraus $T_0(x) = 1$ und für $n \geq 1$

$$
\begin{aligned}
T_n(x) &= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \binom{n-k}{k}(-1)^k(2x)^{n-2k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-k}{k}(-1)^k(2x)^{n-2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-k}{k}(-1)^k(2x)^{n-2k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \binom{n-1-k}{k}(-1)^k(2x)^{n-2k} \\
&\quad + \begin{cases} \binom{n/2}{n/2}(-1)^{\frac{n}{2}}(2x)^{n-n} = (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls n gerade} \\ 0, & \text{falls n ungerade} \end{cases} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(\binom{n-k}{k} - \frac{1}{2}\binom{n-1-k}{k} \right)(-1)^k(2x)^{n-2k} + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls n gerade} \\ 0, & \text{falls n ungerade} \end{cases} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \left(\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!} - \frac{1}{2}\frac{(n-1-k)!}{k!(n-1-2k)!} \right)(-1)^k(2x)^{n-2k} \\
&\quad + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls n gerade} \\ 0, & \text{falls n ungerade} \end{cases} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-1-k)!}{k!(n-2k)!}\left(n-k-\frac{1}{2}(n-2k) \right)(-1)^k(2x)^{n-2k} \\
&\quad + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls n gerade} \\ 0, & \text{falls n ungerade} \end{cases} \\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} \frac{(n-1-k)!}{k!(n-2k)!}\frac{n}{2}(-1)^k(2x)^{n-2k} \\
&\quad + \begin{cases} (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls n gerade} \\ 0, & \text{falls n ungerade} \end{cases} \\
&= \frac{n}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{(n-1-k)!}{k!(n-2k)!}(-1)^k(2x)^{n-2k}, \ da \ \ \frac{n}{2}\frac{(\frac{n}{2}-1)!}{(\frac{n}{2})!0!}(-1)^{\frac{n}{2}}(2x)^0 = (-1)^{\frac{n}{2}}
\end{aligned}
$$

□

Im nächsten Schritt untersuchen wir die Orthogonalitätsrelation. Dazu bemerken wir die Existenz des uneingentlichen Integrals

$$(2) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_{0}^{\pi} \frac{\sin\varphi}{\sqrt{1-\cos^2\varphi}}\, d\varphi = \int_{0}^{\pi} d\varphi = \pi.$$

Also existiert das Integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{p(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

für jedes $p(x) \in \mathbb{R}[x]$.

(1.7) Satz. *Für alle* $m, n \in \mathbb{N}_0$ *gilt*

$$a) \int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = 0,\ falls\ m \neq n$$

$$b) \int_{-1}^{1} \frac{T_n^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \frac{\pi}{2},\ falls\ n \geq 1$$

$$c) \int_{-1}^{1} \frac{T_0^2(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \pi.$$

Beweis. Mit der Substitution $x = cos\varphi$ erhält man aus (1.4)a)

$$\int_{-1}^{1} \frac{T_m(x)T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = \int_{0}^{\pi} \frac{T_m(\cos\varphi)T_n(cos\varphi)}{\sqrt{1-\cos^2(\varphi)}}\, sin\varphi\, d\varphi$$

$$= \int_{0}^{\pi} cos(m\varphi)cos(n\varphi)\, d\varphi = \begin{cases} 0, & falls\ m \neq n, \\ \frac{\pi}{2}, & falls\ m = n \geq 1, \\ \pi, & falls\ m = n = 0. \end{cases}$$

Da für $m \neq n$ gilt:

$$\int_{0}^{\pi} \cos(m\varphi)\cos(n\varphi)\, d\varphi \overset{Additonstheo.}{=} \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos((m+n)\varphi) + \cos((m-n)\varphi)\, d\varphi$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2(m+n)} \sin((m+n)\varphi)\Big|_0^\pi + \frac{1}{2(m-n)} \sin((m-n)\varphi)\Big|_0^\pi \\
&= \frac{1}{2(m+n)} \left(\sin((m+n)\pi) - \sin(0)\right) \\
&\quad + \frac{1}{2(m-n)} \left(\sin((m-n)\pi) - \sin(0)\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Für $m = n \geq 1$ gilt:

$$\int_0^\pi \cos(m\varphi)\cos(n\varphi)\; d\varphi = \int_0^\pi \cos(m\varphi)^2\; d\varphi = \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{\sin(m\varphi)\cos(m\varphi)}{2m}\right)\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

Für $m = n = 0$ gilt:

$$\int_0^\pi \cos(0\cdot\varphi)\cos(0\cdot\varphi)\; d\varphi = \int_0^\pi 1^2\; d\varphi = \varphi|_0^\pi = \pi$$

□

§2 Chebyshev-Polynome zweiter Art

Es gibt eine weitere Klasse von CHEBYSHEV-Polynomen.

(2.1) Definition. Die CHEBYSHEV-*Polynome zweiter Art* $U_n(x)$, $n \in \mathbb{N}_0$, sind definiert durch

$$\sqrt{x^2-1}\,U_n(x) = \frac{1}{2}\left(\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x - \sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right), x \in \mathbb{R}.$$

Die Definition führt uns zu folgenden Identitäten:

(3)

$$U_0(x) = \frac{\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^1 - (x-\sqrt{x^2-1})^1\right)}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{2}\cdot 2 = 1$$

$$\begin{aligned}
U_1(x) &= \frac{\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^2-(x-\sqrt{x^2-1})^2\right)}{\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{\frac{1}{2}(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1-x^2+2x\sqrt{x^2-1}-x^2+1)}{\sqrt{x^2-1}} = 2x\\
U_2(x) &= \frac{\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^3-(x-\sqrt{x^2-1})^3\right)}{\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{\frac{1}{2}(x^3+3x^2\sqrt{x^2-1}+3(x^3-x)+\sqrt{x^2-1}^3)}{\sqrt{x^2-1}}\\
&\quad - \frac{\frac{1}{2}(x^3-3x^2\sqrt{x^2-1}+3(x^3-x)-\sqrt{x^2-1}^3)}{\sqrt{x^2-1}}\\
&= 3x^2+x^2-1 = 4x^2-1\\
U_3(x) &= \frac{\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^4-(x-\sqrt{x^2-1})^4\right)}{\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{\frac{1}{2}\left(x^4+4x^3\sqrt{x^2-1}+6x^2(x^2-1)+4x(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)^2\right)}{\sqrt{x^2-1}}\\
&\quad - \frac{\frac{1}{2}\left(x^4-4x^3\sqrt{x^2-1}+6x^2(x^2-1)-4x(x^2-1)\sqrt{x^2-1}+(x^2-1)^2\right)}{\sqrt{x^2-1}}\\
&= \frac{4x^3\sqrt{x^2-1}+4x(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = 4x^3+4x^3-4x = 8x^3-4x
\end{aligned}$$

Analog zu (1.2) folgt das

(2.2) Lemma. $U_n(x)$ ist ein gerades bzw. ungerades Polynom vom Grad n in $\mathbb{Z}[x]$, wenn n gerade bzw. ungerade ist. Es gilt

$$U_n(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}\left(x^2-1\right)^k$$

sowie

$$U_n(1) = n+1,\;\; U_n(-1) = (-1)^n(n+1),\;\; U_n(0) = \begin{cases} 0, & \text{falls n ungerade,}\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & \text{falls n gerade.}\end{cases}$$

Beweis. Der Beweis, dass $U_n(x)$ ein gerades bzw. ungerades Polynom ist, wenn n gerade bzw. ungerade ist, ist der gleiche wie der für $T_n(x)$, da die Koeffizienten keine Rolle spielen.

Außerdem folgt mit der binomischen Formel:

$$
\begin{aligned}
U_n(x) &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\left(\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}\sqrt{x^2-1}^k + \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}\sqrt{x^2-1}^k(-1)^{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}x^{n+1-k}\sqrt{x^2-1}^k\left(1+(-1)^{k+1}\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2}\sum_{k=-1}^{n}\binom{n+1}{k+1}x^{n+1-k-1}\sqrt{x^2-1}^{k+1}\underbrace{\left(1+(-1)^{k+2}\right)}_{=0,\ falls\ k\ ungerade} \\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+1}{2k+1}x^{n+1-2k-1}\sqrt{x^2-1}^{2k+1}\cdot 2 \\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+1}{2k+1}x^{n-2k}(x^2-1)^k
\end{aligned}
$$

und:

$$
\begin{aligned}
U_n(1) &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+1}{2k+1}1^{n-2k}(1^2-1)^k = \binom{n+1}{1}1(1-1)^0 + \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+1}{2k+1}1\underbrace{(1-1)^k}_{=0} \\
&= n+1 \\
U_n(-1) &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+1}{2k+1}(-1)^{n-2k}((-1)^2-1)^k \\
&= \binom{n+1}{1}(-1)^{n-0}(1-1)^0 + \sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+1}{2k+1}(-1)^{n-2k}\underbrace{(1-1)^k}_{=0} \\
&= (-1)^n(n+1) \\
U_n(0) &= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}\binom{n+1}{2k+1}0^{n-2k}(0^2-1)^k \\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} 0 = 0, & falls\ n\ ungerade, \\ \binom{n+1}{2\frac{n}{2}+1}0^{n-2\frac{n}{2}}(-1)^{\frac{n}{2}} + \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]-1} 0 = (-1)^{\frac{n}{2}}, & falls\ n\ gerade. \end{cases}
\end{aligned}
$$

□

Grundlegende Rekursionsformeln und Zusammenhänge zwischen beiden Typen von CHEBYSHEV-Polynomen beinhaltet das

(2.3) Lemma. Für alle $x \in \mathbb{R}$

a) $U_{n+1}(x) = 2xU_n(x) - U_{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N},$

b) $T_n(x) = U_n(x) - xU_{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N},$

c) $U_n(x) = \dfrac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) = \sum\limits_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k} = \sum\limits_{k=0}^{n} x^k T_{n-k}(x),\ n \in \mathbb{N}_0,$

d) $U_{n+1}(x) = 2T_{n+1}(x) + U_{n-1}(x),\ n \in \mathbb{N},$

e) $T_n(x) + U_{n-1}(x)\sqrt{x^2-1} = \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n,\ n \in \mathbb{N}.$

Beweis: a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
&U_{n+1}(x) - 2xU_n(x) + U_{n-1}(x)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+2} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+2}\right)\\
&\quad - 2x\frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1}\right)\\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+2} - 2x\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} + \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n}\right)\\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+2} - 2x\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n+1} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n}\left(\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{2} - \left(x+\sqrt{x^2-1}\right)2x + 1\right)\\
&\quad - \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n}\left(\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{2} - \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)2x + 1\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{n}\underbrace{\left(x^2+2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1-2x^2-2x\sqrt{x^2-1}+1\right)}_{=0}\\
&\quad + \frac{1}{2\sqrt{x^2-1}}\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{n}\underbrace{\left(x^2-2x\sqrt{x^2-1}+x^2-1-2x^2+2x\sqrt{x^2-1}+1\right)}_{=0}\\
&= 0
\end{aligned}
$$

b) Sei n ungerade, dann folgt mit (2.3) und (1.2):

$$\begin{aligned}
&U_n(x) - xU_{n-1}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k - x \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} x^{n-1-2k}(x^2-1)^k\\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k - \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k\\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \underbrace{\left(\binom{n+1}{2k+1} - \binom{n}{2k+1}\right)}_{=\binom{n}{2k}} x^{n-2k}(x^2-1)^k\\
&= T_n(x)
\end{aligned}$$

Sei n gerade, dann folgt mit (2.3) und (1.2):

$$\begin{aligned}
&U_n(x) - xU_{n-1}(x)\\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k - x \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} x^{n-1-2k}(x^2-1)^k\\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n+1}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k + (x^2-1)^{\frac{n}{2}} - \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \binom{n}{2k+1} x^{n-2k}(x^2-1)^k\\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n-1}{2}]} \underbrace{\left(\binom{n+1}{2k+1} - \binom{n}{2k+1}\right)}_{=\binom{n}{2k}} x^{n-2k}(x^2-1)^k + (x^2-1)^{\frac{n}{2}}\\
&= \sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]} \binom{n}{2k} x^{n-2k}(x^2-1)^k\\
&= T_n(x)
\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) &\overset{(1.3)b}{=} \frac{1}{n+1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{n+1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}\right)\\
&= \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^{n+1} - (x-\sqrt{x^2-1})^{n+1}\right)
\end{aligned}$$

$$\overset{(2.1)}{=} U_n(x)$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}T'_{n+1}(x) &\overset{(1.6)}{=} \frac{1}{n+1}\frac{n+1}{2}\sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^k\frac{(n+1-1-k)!}{k!(n+1-2k)!}(2x)^{n+1-2k-1}(n+1-2k)2\\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^k\frac{(n-k)!}{k!(n-2k)!}(2x)^{n-2k}\\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n+1}{2}\right]}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}\\
&= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}, & \textit{falls n gerade,}\\ (-1)^{\frac{n+1}{2}}(2x)^{-1}\underbrace{\binom{\frac{n}{2}-\frac{1}{2}}{\frac{n}{2}+\frac{1}{2}}}_{=\,0}+\sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}, & \textit{falls n ungerade}\end{cases}\\
&= \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\binom{n-k}{k}(2x)^{n-2k}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}x^kT_{n-k}(x) &= x^nT_{n-n}(x)+\sum_{k=0}^{n-1}x^kT_{n-k}(x) \overset{b)}{=} x^nT_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}x^k(U_{n-k}(x)-xU_{n-1-k}(x))\\
&= x^nT_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}x^kU_{n-k}(x)-\sum_{k=0}^{n-1}x^{k+1}U_{n-1-k}(x)\\
&\overset{\text{j=k+1}}{=} x^nT_0(x)+\sum_{k=0}^{n-1}x^kU_{n-k}(x)-\sum_{j=1}^{n}x^jU_{n-1-(j-1)}(x)\\
&= x^nT_0(x)+\sum_{k=1}^{n}x^kU_{n-k}(x)+x^0U_{n-0}(x)-\sum_{j=1}^{n}x^jU_{n-j}(x)-x^nU_{n-n}(x)\\
&= x^nT_0(x)+U_n(x)-x^nU_0(x) = x^n+U_n(x)-x^n\\
&= U_n(x)
\end{aligned}$$

d)$U_{n+1}(x) \overset{a)}{=} U_{n+1}(x)+\underbrace{U_{n+1}(x)-2xU_n(x)+U_{n-1}(x)}_{=0} = 2\underbrace{(U_{n+1}(x)-xU_n(x))}_{\overset{b)}{=}T_{n+1}(x)}+U_{n-1}(x) =$

$2T_{n+1}(x)+U_{n-1}(x)$

e) Einsetzen der Definitionen von T_n und U_{n-1} liefert

$$
\begin{aligned}
&T_n(x) + U_{n-1}(x)\sqrt{x^2-1} \\
&= \frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n + (x-\sqrt{x^2-1})^n\right) \\
&+ \sqrt{x^2-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\frac{1}{2}\left((x+\sqrt{x^2-1})^n - (x-\sqrt{x^2-1})^n\right) \\
&= \frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-1})^n + \frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-1})^n + \frac{1}{2}(x+\sqrt{x^2-1})^n - \frac{1}{2}(x-\sqrt{x^2-1})^n \\
&= (x+\sqrt{x^2-1})^n
\end{aligned}
$$

□

(2.4) Lemma.
a) Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$U_n(\cos\varphi) = \frac{\sin((n+1)\varphi)}{\sin\ \varphi}, \qquad \varphi \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}\pi.$$

b) Für alle $|x| \leq 1,\ |t| < 1$ gilt:

$$u(x,t) := \frac{1}{1-2xt+t^2} = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n.$$

c) Für alle m, $n \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx = \begin{cases} 0 & f\ddot{u}r\ m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & f\ddot{u}r\ m = n. \end{cases}$$

Beweis. a) Nach (2.1) gilt:

$$
\begin{aligned}
U_n(cos\varphi) &= \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{cos^2\varphi - 1}}_{=\ i\ \sqrt{sin^2\varphi}}}\left((cos\varphi + i\ sin\varphi)^{n+1} - (cos\varphi - i\ sin\varphi)^{n+1}\right) \\
&= \frac{e^{i(n+1)\varphi} - e^{-i(n+1)\varphi}}{2i\ sin\varphi} \\
&= \frac{sin((n+1)\varphi)}{sin\varphi}
\end{aligned}
$$

b) Für alle $|x| \leq 1$ gilt nach a) $|U_n(x)| \leq 1$, so dass die geometrische Reihe eine konvergente Majorante der obigen Reihe ist. Dann folgt mit (3) und (2.3)a)

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n\right) \cdot (1 - 2xt + t^2) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^n - \sum_{n=0}^{\infty} 2xU_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^{n+2} \\
&= U_0(x) + (U_1(x) - 2xU_0(x))t + \sum_{n=2}^{\infty} U_n(x)t^n - \sum_{n=1}^{\infty} 2xU_n(x)t^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)t^{n+2} \\
&= U_0(x) + (U_1(x) - 2xU_0(x))t + \sum_{n=2}^{\infty} [U_n(x) - 2xU_{n-1}(x) + U_{n-2}(x)]t^n \\
&= 1 + (2x - 2x)t + \sum_{n=2}^{\infty} 0 \cdot t^n \\
&= 1
\end{aligned}
$$

c) Wegen a) folgt durch Substitution mit $\varphi(x) =$, dass $\cos\varphi = x$ ist, und ist φ stetig differenzierbar.

$$
\begin{aligned}
&\int_{-1}^{1} U_m(x)U_n(x)\sqrt{1-x^2}dx \\
&= -\int_{\pi}^{0} U_m(cos\varphi)U_n(cos\varphi)\ sin^2\varphi\ d\varphi \\
&= \int_{0}^{\pi} sin((m+1)\varphi)sin((n+1)\varphi)d\varphi = \begin{cases} 0 & für\ m \neq n, \\ \frac{\pi}{2} & für\ m = n. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Da für $m \neq n$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\int_{0}^{\pi} \sin((m+1)\varphi)\sin((n+1)\varphi)\ d\varphi \\
&\overset{Additonstheo.}{=} \frac{1}{2}\int_{0}^{\pi} \cos((m+1-n-1)\varphi) - \cos((m+1+n+1)\varphi)\ d\varphi \\
&= \frac{1}{2(m-n)} \sin((m-n)\varphi)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{2(m+n+2)} \sin((m+n+2)\varphi)\Big|_0^{\pi}
\end{aligned}
$$

$$= 0.$$

Für $m = n$ gilt:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\pi \sin((m+1)\varphi)\sin((n+1)\varphi)\ d\varphi \\
&= \int_0^\pi \sin^2((m+1)\varphi)\ d\varphi \\
&= \left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\cos((m+1)\varphi)\sin((m+1)\varphi)}{2(m+1)}\right)\Bigg|_0^\pi \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

□